

鲁棒自适应波束形成方法的研究

摘要

自适应波束形成在雷达、声纳、地震学、无线通信等领域中有广泛应用。尤其在最近的几十年，鲁棒波束形成算法得到了长足的发展，受到全世界众多学者的关注。

在实际应用过程中，由于传播环境、信源、传感器阵列等诸多条件的复杂变化，引起信号方向向量的偏差，导致现存的自适应波束形成器的性能下降。另外，采样样本数目的变化也会影响自适应波束形成器的性能。鲁棒自适应波束形成算法适用小采样样本的情况，可以克服信号方向向量的偏差，有效地提高自适应波束形成器的性能，在实际环境中广泛地应用。

本文分析了空间阵列信号处理的发展过程，系统地研究了空间信号处理中的波束形成、权重更新算法和到来方向 DOA 估计等，并对鲁棒波束形成器的设计方法进行了深入研究，针对通信系统中实际存在的问题，提出了两种鲁棒波束形成算法。

分析了多径传播环境下，信号方向向量的偏差和采样样本数目的变化对自适应波束形成算法性能的影响，提出了鲁棒递推最小二乘 RLS 波束形成算法，有效地解决了在信号方向向量存在偏差的情况下，波束形成算法的有效性和稳定性问题。该算法不仅具有收敛速度快、抗扰动性强、误差小的特点，而且保证阵列输出的信干噪比 SINR 接近最优值。

针对约束最小均方算法 CLMS 在实际应用中存在的弊端，提出了鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法。该算法不仅对信号方向向量的偏差和采样样本数目的变化具有很好的鲁棒性，而且收敛速度快、阵列输出的信干噪比 SINR 接近最优值。

关键词：波束形成，到来方向，鲁棒自适应波束形成算法，递推最小二乘 RLS，约束最小均方 CLMS 算法

Robust Adaptive Beamforming Algorithm

ABSTRACT

Adaptive beamforming has found numerous applications in radar, sonar, seismology, microphone array speech processing, and, more recently, in wireless communications. In particular, the development of robust adaptive beamforming spans over three decades.

The performance of adaptive beamforming methods is known to degrade severely in the presence of even small mismatches between the actual and presumed array responses to the desired signal. Such mismatches may frequently occur in practical situations because of violation of underlying assumptions on the environment, sources, or sensor array. Therefore, robust approaches to adaptive beamforming appear to be of primary importance in these cases.

The researches in the paper focus on array signal processing and robust adaptive beamforming methods. To solve the problems of practical situations, some researches are as follows:

The performance of the recursive least squares (RLS) algorithm degrades in the presence of even slight mismatches and small training sample size. On the basis of the conventional RLS algorithm, the paper develops a novel robust RLS algorithm against the signal steering vector mismatches and small training sample size. Simulation results demonstrate a visible performance gain of the proposed robust RLS algorithm.

The paper makes some researches on least-mean-square (LMS) algorithm. On the basis of the constrained-LMS algorithm, the paper proposes a robust constrained-LMS (RCLMS) algorithm. RCLMS algorithm provides excellent robustness improvements. Computer simulations show good performances.

Keywords: adaptive beamforming, DOA estimation, robust adaptive beamforming algorithm, RLS algorithm, constrained-LMS algorithm

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是在导师的指导下完成的。论文中取得的研究成果除加以标注和致谢的地方外，不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包括本人为获得其他学位而使用过的材料。与我一同工作的同志为本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本人签名：朱昕
日期：2005.3.1

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者和指导教师完全了解东北大学有关保留、使用学位论文的规定：即学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权东北大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索、交流。

本人签名：

日期：

导师签字：

日期：

第一章 概述

1.1 阵列信号处理的现状

近年来,随着当今社会信息量的急剧增加,无线移动通信的服务需求以爆炸式的速率递增。在移动通信技术的发展过程中,对移动通信的要求也不断提高,增加系统容量和改善服务质量已成为目前移动通信中急需解决的问题。自适应天线阵列作为解决这些问题的一种有效方法,不仅能使系统容量成倍增加,而且还能使系统性能得到改善,目前已成为国内外研究的热点。

自 50 年代 Van Atta 提出自适应天线这个术语以来,自适应天线经过近几十年的研究,其理论已有长足的发展。自适应天线技术能够针对正在变化的信号环境产生空间定向波束,使天线的主波束对准用户信号到达方向,旁瓣或零陷对准干扰信号到达方向,达到提高系统性能和系统容量等目的。在雷达、通信、电子对抗、遥控遥测、电视接收、地球物理和医疗卫生等领域都有着广泛的应用前景,每年都有大量的研究成果问世。自适应信号处理技术大体上可分为三个阶段:20 世纪 60 年代,主要集中在自适应波束控制上,诸如反向波束天线、自适应相控天线、自适应聚束天线、自适应波束操纵天线等;20 世纪 70 年代,主要集中在自适应零点控制上,诸如自适应滤波、自适应调零、自适应旁瓣对消、自适应杂波抑制等;20 世纪 80 年代至今,主要集中在空间谱估计上,诸如最大似然谱估计、最大熵估计、特征空间正交谱估计等,详见[1]—[3]。自适应天线是一种阵列天线,它通过调节各阵元信号的加权向量的幅度和相位来改变阵列方向图的形状,从而抑制干扰信号,提高接收信号的信噪比。

自适应信号处理技术是高速发展的信息技术的组成部分。它涉及信息论、控制论、信号的检测与估计、信号处理、计算机软件、天线阵理论、最优化理论、概率统计与随机过程等方面的知识。由于阵列信号处理已经被广泛应用于人们生活的各个方面,所以对于这方面的研究引起了许多学者的关注。阵列信号处理的主要问题包括:自适应波束形成技术、信号到来方向 DOA 的估计技术、信号数目的估计和多径参数的估计。

1.2 阵列信号处理的模型

自适应阵列天线不仅是天线技术的新兴领域,同时也是一个多学科交

义的技术领域，近几十年已有长足的发展和进步，随着数字信号处理技术的飞速发展，前景是非常光明的。自适应阵列信号处理作为自适应天线阵列的核心部分，对自适应天线阵列的应用前景起着举足轻重的作用。

自适应阵列天线技术是近 30 年中最先进的无线技术之一。它利用基带数字信号处理技术产生空间定向波束，使天线主波束即最大增益点对准用户信号到达方向，旁瓣或零陷对准干扰信号到达方向，从而给有用信号带来最大增益，有效地减少多径效应带来的影响，达到删除和抑制干扰信号的目的。使用自适应阵列天线技术能带来很多好处，如扩大系统覆盖区域、提高系统容量、提高数据传输速率、提高频谱利用效率、降低基站发射功率、节省系统成本、减少信号间干扰与电磁环境污染等。

考虑 M 元各向同性的均匀线阵，阵元间距为 d ，期望信号到来方向为 θ_0 ，有 $D-1$ 个干扰源，到来方向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}$ ，自适应波束形成的结构如图 1.1 所示。各个信源在基准点的复包络表示为 $s_i(t)$ ，在第 l 个阵元端接收的信号可以写成

$$x_l(t) = \sum_{i=0}^{D-1} s_i(t) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (l-1)d \sin \theta_i} + n_l(t) \quad (1.1)$$

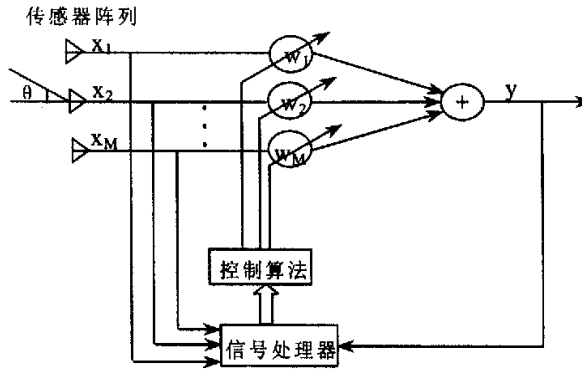


图 1.1 自适应阵列的结构框图
Fig.1.1 Structure of adaptive array

天线阵列的接收向量为

$$\begin{aligned} X(k) &= AS(k) + n(k) \\ &= s_0(k)a(\theta_0) + i(k) + n(k) \\ &= s(k) + i(k) + n(k) \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中， $X(k)=[x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ 为接收向量； $A=[a(\theta_0), a(\theta_1), \dots, a(\theta_{M-1})]$ 为阵列流形； $a(\theta_0)$ 为期望信号的方向向量； $a(\theta_l)=[1, e^{-j2\pi d \sin \theta_l / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi (M-1)d \sin \theta_l / \lambda}]^T$ 为干扰信号的方向向量； $s_0(t)$ 为期望信号的波形； $s(k)$ 为期望信号向量； $i(k)$ 为干扰

向量； $\mathbf{n}(k)$ 为噪声向量。

阵列输出为

$$y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{X}(k) \quad (1.3)$$

其中， $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 为加权系数向量； $(\cdot)^T$ 表示转置； $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

阵列接收向量 $\mathbf{X}(t)$ 的二阶统计量用其外积的统计平均值表示，称之为阵列自协方差矩阵，俗称自相关矩阵，定义为

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} \quad (1.4)$$

1.3 自适应控制算法的性能量度

调整自适应天线阵的加权向量，可以使自适应天线系统的性能达到最佳，确定系统是否达到最优性能有不同的性能量度方法。常用的性能量度如下^[4]：

- (1) 均方误差 (MSE) 量度；
- (2) 信噪比 (SNR) 量度；
- (3) 最大似然比 (ML) 量度；
- (4) 最小噪声方差 (MV) 量度。

下面研究性能量度方法及确定自适应加权向量的最优化稳态解问题。本节采用实向量推导公式，最后给出它的复数表示形式。

1.3.1 均方误差 (MSE) 性能量度

均方误差 (MSE) 性能量度是威德鲁等人提出的。这个性能量度假设期望信号已知，并定义其参考信号为 $d(t)$ 。虽然实际上这个假设不可能严格地满足，但是在大多数情况下，对期望信号具备某些先验知识，通过适当处理输出信号就可以使其在某种意义上逼近参考信号 $d(t)$ 。

在图 1.2 中，参考信号与实际输出信号的误差信号为

$$\varepsilon(t) = d(t) - y(t) = d(t) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t) \quad (1.5)$$

因而，对式(1.5)求平方可得

$$\varepsilon^2(t) = d^2(t) - 2d(t)\mathbf{W}^T \mathbf{X}(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\mathbf{W} \quad (1.6)$$

对式(1.6)两边取数学期望，得

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \overline{d^2(t)} - 2\mathbf{W}^T \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \quad (1.7)$$

向量； $n(k)$ 为噪声向量。

阵列输出为

$$y(k) = W^H X(k) \quad (1.3)$$

其中， $W = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 为加权系数向量； $(\cdot)^T$ 表示转置； $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

阵列接收向量 $X(t)$ 的二阶统计量用其外积的统计平均值表示，称之为阵列自协方差矩阵，俗称自相关矩阵，定义为

$$R_{xx} = E\{X(t)X^H(t)\} \quad (1.4)$$

1.3 自适应控制算法的性能量度

调整自适应天线阵的加权向量，可以使自适应天线系统的性能达到最佳，确定系统是否达到最优性能有不同的性能量度方法。常用的性能量度如下^[4]：

- (1) 均方误差 (MSE) 量度；
- (2) 信噪比 (SNR) 量度；
- (3) 最大似然比 (ML) 量度；
- (4) 最小噪声方差 (MV) 量度。

下面研究性能量度方法及确定自适应加权向量的最优化稳态解问题。本节采用实向量推导公式，最后给出它的复数表示形式。

1.3.1 均方误差 (MSE) 性能量度

均方误差 (MSE) 性能量度是威德鲁等人提出的。这个性能量度假设期望信号已知，并定义其参考信号为 $d(t)$ 。虽然实际上这个假设不可能严格地满足，但是在大多数情况下，对期望信号具备某些先验知识，通过适当处理输出信号就可以使其在某种意义上逼近参考信号 $d(t)$ 。

在图 1.2 中，参考信号与实际输出信号的误差信号为

$$\varepsilon(t) = d(t) - y(t) = d(t) - W^T X(t) \quad (1.5)$$

因而，对式(1.5)求平方可得

$$\varepsilon^2(t) = d^2(t) - 2d(t)W^T X(t) + W^T X(t)X^T(t)W \quad (1.6)$$

对式(1.6)两边取数学期望，得

对式(1.6)两边取数学期望，得

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \overline{d^2(t)} - 2W^T r_{xd} + W^T R_{xx} W \quad (1.7)$$

向量； $\mathbf{n}(k)$ 为噪声向量。

阵列输出为

$$y(k) = \mathbf{W}^H \mathbf{X}(k) \quad (1.3)$$

其中， $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 为加权系数向量； $(\cdot)^T$ 表示转置； $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

阵列接收向量 $\mathbf{X}(t)$ 的二阶统计量用其外积的统计平均值表示，称之为阵列自协方差矩阵，俗称自相关矩阵，定义为

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} \quad (1.4)$$

1.3 自适应控制算法的性能量度

调整自适应天线阵的加权向量，可以使自适应天线系统的性能达到最佳，确定系统是否达到最优性能有不同的性能量度方法。常用的性能量度如下^[4]：

- (1) 均方误差 (MSE) 量度；
- (2) 信噪比 (SNR) 量度；
- (3) 最大似然比 (ML) 量度；
- (4) 最小噪声方差 (MV) 量度。

下面研究性能量度方法及确定自适应加权向量的最优化稳态解问题。本节采用实向量推导公式，最后给出它的复数表示形式。

1.3.1 均方误差 (MSE) 性能量度

均方误差 (MSE) 性能量度是威德鲁等人提出的。这个性能量度假设期望信号已知，并定义其参考信号为 $d(t)$ 。虽然实际上这个假设不可能严格地满足，但是在大多数情况下，对期望信号具备某些先验知识，通过适当处理输出信号就可以使其在某种意义上逼近参考信号 $d(t)$ 。

在图 1.2 中，参考信号与实际输出信号的误差信号为

$$\varepsilon(t) = d(t) - y(t) = d(t) - \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t) \quad (1.5)$$

因而，对式(1.5)求平方可得

$$\varepsilon^2(t) = d^2(t) - 2d(t)\mathbf{W}^T \mathbf{X}(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\mathbf{W} \quad (1.6)$$

对式(1.6)两边取数学期望，得

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = \overline{d^2(t)} - 2\mathbf{W}^T \mathbf{r}_{xd} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \quad (1.7)$$

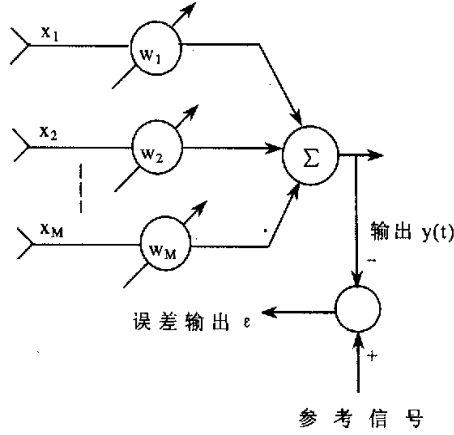


图 1.2 基于期望信号的基本自适应阵列结构

Fig.1.2 Basic adaptive array structure with known desired signal

式中

$$\mathbf{r}_{sd} = \begin{bmatrix} \overline{x_1(t)d(t)} \\ \overline{x_2(t)d(t)} \\ \vdots \\ \overline{x_M(t)d(t)} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

令 $\overline{d^2(t)} = S$ ，则

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = S - 2\mathbf{W}^T \mathbf{r}_{sd} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \quad (1.9)$$

适当选择加权向量 \mathbf{W} ，可使 $E\{\varepsilon^2(t)\}$ 达到最小。由于式(1.9)是 \mathbf{W} 的二次函数，该函数的极值是一个最小值，所以使 $E\{\varepsilon^2(t)\}$ 最小的 \mathbf{W} 值可由式(1.9)对加权向量的梯度为零而求得，即

$$\nabla_{\mathbf{W}} \overline{\varepsilon^2} = 0 \quad (1.10)$$

由于

$$\nabla_{\mathbf{W}} \overline{\varepsilon^2} = -2\mathbf{r}_{sd} + 2\mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \quad (1.11)$$

所以加权向量的最优化值必须满足

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}_{opt} = \mathbf{r}_{sd} \text{ 或 } \mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{sd} \quad (1.12)$$

求解 \mathbf{W}_{opt} 的公式(1.12)是矩阵形式的维纳-霍夫 (Wiener-Hopf) 方程，叫做最优化“维纳解”。

如利用 $d(t) = s(t)$ ，则

$$\mathbf{r}_{sd} = E\{X d\} = S \mathbf{v} \quad (1.13)$$

其中， S 为信号功率， $\mathbf{v} = [1, e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_{M-1}}]^T$ 为方向向量。故

$$\mathbf{W}_{MSE} = S \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{v} \quad (1.14)$$

式中 R_{xx} 是非奇异矩阵, 故 R_{xx}^{-1} 存在。把式(1.14)代入式(1.9)中, 可以得到最小 MSE 为

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = S - r_{xd}^T R_{xx}^{-1} r_{xd} \quad (1.15)$$

对于复数量, 式(1.9)改写为

$$|\overline{\varepsilon(t)}|^2 = S - 2\operatorname{Re}\{W^H r_{xd}\} + W^H R_{xx} W \quad (1.16)$$

式(1.14)改写为

$$W_{MSE} = S R_{xx}^{-1} v^* \quad (1.17)$$

式(1.15)改写为

$$|\overline{\varepsilon}|_{\min}^2 = S - r_{xd}^H R_{xx}^{-1} r_{xd} \quad (1.18)$$

1.3.2 信噪比 (SNR) 性能量度

在通信系统中, 在保证期望信号正常接收的情况下, 应尽量减弱或抑制干扰信号, 即尽量增大系统的信噪比。在自适应阵列天线系统中, 通过调整加权向量, 可使系统的输出信噪比达到最大。图 1.1 的自适应阵列结构图的输出信号为

$$y(t) = W^T X(t) \quad (1.19)$$

式中输入信号向量由信号成分 $s(t)$ 与噪声成分 $n(t)$ 组成, 故

$$X(t) = s(t) + n(t) \quad (1.20)$$

输出信号中的信号成分与噪声成分相应地写为

$$y_s(t) = W^T s(t) = s^T(t)W \quad (1.21)$$

$$y_n(t) = W^T n(t) = n^T(t)W \quad (1.22)$$

式中

$$s(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_M(t) \end{bmatrix}, \quad n(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_M(t) \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

输出信号功率为

$$E\{|y_s(t)|^2\} = \overline{|W^T s|}^2 \quad (1.24)$$

输出噪声功率为

$$E\{|y_n(t)|^2\} = \overline{|W^T n|}^2 \quad (1.25)$$

因而系统的输出信噪比 SNR 为

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{\left|W^T s\right|^2}{\left|W^T n\right|^2} = \frac{W^T \begin{bmatrix} ss^T \\ nn^T \end{bmatrix} W}{W^T \begin{bmatrix} ss^T \\ nn^T \end{bmatrix} W} = \frac{W^T R_{ss} W}{W^T R_{nn} W} \quad (1.26)$$

将式(1.26)改写为如下形式

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{z^T R_{nn}^{-1/2} R_{ss} R_{nn}^{-1/2} z}{z^T z} \quad (1.27)$$

式中

$$z \triangleq R_{nn}^{1/2} W \quad (1.28)$$

式(1.26)是一个标准二次形, 且由对称矩阵 $R_{nn}^{-1/2} R_{ss} R_{nn}^{-1/2}$ (或 $R_{nn}^{-1} R_{ss}$ 更为方便) 的最小和最大特征值所限定已有人证明过。适当选择加权向量 W , 就可实现式(1.26)的最优化, 这是一个求特征值的问题。比值 (s/n) 满足下列关系式

$$R_{ss} W = (s/n) R_{nn} W \quad (1.29)$$

(s/n) 是上述对称矩阵的特征值。满足式(1.29)的最大特征值记为 $(s/n)_{opt}$, 对应 $(s/n)_{opt}$ 有唯一的特征向量 W_{opt} 。所以

$$R_{ss} W_{opt} = \left(\frac{s}{n}\right)_{opt} R_{nn} W_{opt} \quad (1.30)$$

把对应于 $(s/n)_{opt}$ 的式(1.26)代入(1.30), 得

$$R_{ss} W_{opt} = \frac{W_{opt}^T R_{ss} W_{opt}}{W_{opt}^T R_{nn} W_{opt}} R_{nn} W_{opt} \quad (1.31)$$

将 $R_{ss} = [ss^T]$ 代入到(1.31), 由于 $s^T W_{opt}$ 是一个标量, 可以消去, 因此得到如下公式

$$s = \frac{W_{opt}^T s}{W_{opt}^T R_{nn} W_{opt}} R_{nn} W_{opt} \quad (1.32)$$

比值 $\left(\frac{W_{opt}^T s}{W_{opt}^T R_{nn} W_{opt}}\right)$ 是一个复数 (标量), 记为 c 。于是有

$$W_{opt} = \left(\frac{1}{c}\right) R_{nn}^{-1} s \quad (1.33)$$

s 的包络恰是 $\sqrt{S_v}$, 因而

$$W_{SNR} = \alpha R_{nn}^{-1} v \quad (1.34)$$

式中 $\alpha = \frac{\sqrt{S}}{c}$ 。

$(s/n)_{opt}$ 可达到的最大可能值，可以通过把原系统变换为正交系统来导出。由于 R_{nn} 是一个正定赫米特矩阵，它可用非奇异坐标变换来对角线化，如图 1.3 所示。这样一个变换使所有单元通道有相等的不相关的噪声功率成分。这种对角线化的变换矩阵记为 A ，因而得到

$$s' = As \quad (1.35)$$

$$n' = An \quad (1.36)$$

式中 s' 和 n' 为变换后的向量。

现在输出的信号分量变为

$$y_s = W'^T s' = W'^T As \quad (1.37)$$

噪声分量变为

$$y_n = W'^T n' = W'^T An \quad (1.38)$$

要使图 1.3 系统的输出等效于图 1.1 系统的输出，必须满足如下条件，

即

$$W = A^T W' \quad (1.39)$$

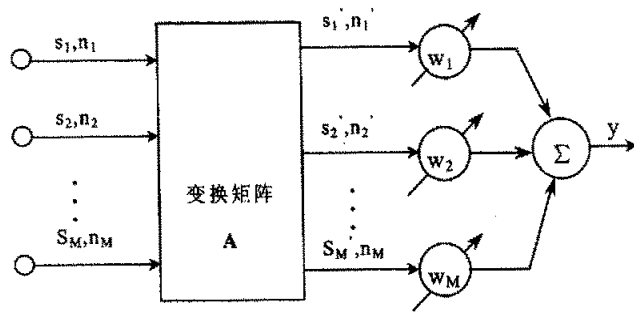


图 1.3 窄带波束形成结构

Fig.1.3 Structure of narrowband beamforming

正交系统的输出噪声功率为

$$E\left\{\left|y_n(t)\right|^2\right\} = E\left\{\left|W'^T n'\right|^2\right\} = W'^T E\left\{n' n'^T\right\} W' \quad (1.40)$$

由于变换矩阵 A 去相关各噪声分量并均衡其功率，故噪声 $n'(t)$ 的协方差矩阵恰是单位矩阵，即

$$E\left\{n' n'^T\right\} = I_n \quad (1.41)$$

由式(1.40)及(1.41)，得到

$$E\left\{\left|y_n(t)\right|^2\right\} = W'^T W' = \|W'\|^2 \quad (1.42)$$

系统的输出噪声功率由下式给出

$$E\left\{\left|y_n(t)\right|^2\right\}=W^T R_{nn} W \quad (1.43)$$

把式(1.39)代入(1.43), 求得

$$E\left\{\left|y_n(t)\right|^2\right\}=W'^T A R_{nn} A^T W' \quad (1.44)$$

为使两个系统的输出噪声功率相等, 必须使

$$A R_{nn} A^T = I_N \quad (1.45)$$

即

$$R_{nn} = [A^T A]^{-1} \quad (1.46)$$

式(1.46)简单地表达了这样一个事实, 变换矩阵 \mathbf{A} 对角化和归一化了矩阵 R_{nn} 。正交系统的信号输出由式(1.37)给出。应用柯西—施瓦茨 (Cauchy--Schwartz) 不等式, 立即得到阵列输出信号功率的上界, 因为

$$\left|y_s(t)\right|^2 \leq \|W'\|^2 \|s'\|^2 \quad (1.47)$$

式中

$$\|s'\|^2 = s'^T s', \quad \|W'\|^2 = W'^T W' \quad (1.48)$$

由式(1.42)和(1.47), 得到 SNR 的最大可能值

$$\text{SNR}_{\max} = \|s'\|^2 \quad (1.49)$$

把式(1.35)代入(1.49), 并利用式 (1.46), 得到

$$\text{SNR}_{\text{opt}} = s^T R_{nn}^{-1} s \quad (1.50)$$

对于复数变量, 式(1.26)改写为

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{W^H \left[\overline{s^* s^T} \right] W}{W^H \left[\overline{n^* n^T} \right] W} = \frac{W^H R_{ss} W}{W^H R_{nn} W} \quad (1.51)$$

式(1.34)改写为

$$W_{\text{SNR}} = \alpha R_{nn}^{-1} v^* \quad (1.52)$$

式(1.46)改写为

$$R_{nn} = [A^T A^*]^{-1} \quad (1.53)$$

式(1.50)改写为

$$\text{SNR}_{\text{opt}} = s^T R_{nn}^{-1} s^* \quad (1.54)$$

设计自适应处理器使加权向量满足 $R_n W = \alpha v^*$ ，这意味着最优化输出 SNR 是主控的性能准则，即使对寂静环境（干扰信号和期望信号都不存在）亦如此。

下面介绍另一种在波束形成上较为灵活的性能量度。假定在正常寂静信号环境中最符合要求的加权向量是 W_q ，此寂静环境的信号协方差矩阵就是 R_{nq} 。用下列式子规定一个列向量 t

$$R_{nq} W_q = \alpha t^* \quad (1.55)$$

比较式(1.55)和(1.52)可见，欲最大化的比值不再是式(1.51)，而是修正过的比值

$$\frac{|W^H t|^2}{W^H R_n W} \quad (1.56)$$

向量 t 叫做广义信号向量，而式(1.56)叫做广义信噪比（GSNR）。此比值较之 SNR 是更一般性的量度，因而经常在实际中应用。

1.3.3 最大似然（ML）性能量度

在实际中当遇到对信号波形完全未知的情况时（例如地震波），信号可以认为是一个待估计的时间函数。信号最大似然估计器的推导要求假定噪声成分满足多维高斯分布。图 1.1 中输入信号向量为

$$X(t) = s(t) + n(t) \quad (1.57)$$

式中

$$s(t) = s(t)v \quad (1.58)$$

要求获得 $s(t)$ 的一个估计。定义输入信号向量的似然函数为

$$L[X(t)] = -\ln[P\{X(t)/X(t) = s(t) + n(t)\}] \quad (1.59)$$

其中， $P\{z/y\}$ 表示在事件 y 发生的条件下 z 的概率密度函数。这样，式(1.59)定义的似然函数是在已知 $X(t)$ 包含期望信号和干扰噪声的条件下输入信号向量 $X(t)$ 的概率函数的负自然对数。

设噪声向量 $n(t)$ 的数学模型是协方差矩阵为 R_n 的零均值平稳高斯随机向量。设 $X(t)$ 也是一个均值为 $s(t)v$ 的平稳高斯随机向量， $s(t)$ 是一个确定的但参量未知的量。有了这些假设，似然函数可写成

$$L[X(t)] = c[X(t) - s(t)v]^T R_n^{-1}[X(t) - s(t)v] \quad (1.60)$$

其中， c 是一个标量常数，与 $X(t)$ 和 $s(t)$ 无关。

求解 $s(t)$ 的估计，记为 $\hat{s}(t)$ ，它可使式(1.60)达到最大，这样就得到最大似然处理器。求取 $L[X(t)]$ 对 $s(t)$ 的偏导数，得

$$\theta = \frac{\partial L[X(t)]}{\partial s(t)} = -2\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{X}(t) + 2\hat{s}(t)\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v} \quad (1.61)$$

令 $\theta=0$ ，就可得到使 $L[X(t)]$ 最大的估计 $\hat{s}(t)$

$$\hat{s}(t)\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{X}(t) \quad (1.62)$$

由于 $\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}$ 是一个标量，式(1.62)可改写为

$$\hat{s}(t) = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{X}(t)}{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}} \quad (1.63)$$

它取 $\hat{s}(t) = \mathbf{W}_{ML}^T \mathbf{X}(t)$ 的形式，因而最大似然权向量

$$\mathbf{W}_{ML} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}} \quad (1.64)$$

对于复数量，式(1.60)变为

$$L[X(t)] = c[X(t) - s(t)\mathbf{v}]^H \mathbf{R}_{nn}^{-1} [X(t) - s(t)\mathbf{v}] \quad (1.65)$$

同样，式(1.62)变为

$$\hat{s}(t)\mathbf{v}^H \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^H \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{X}(t) \quad (1.66)$$

式(1.64)可改写为

$$\mathbf{W}_{ML} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^H \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}} \quad (1.67)$$

1.3.4 最小噪声方差 (MV) 性能量度

当期望信号 $s(t)$ 及其方向都已知时，给系统输入信号加入校正相移，就可使噪声方差最小，保证信号的良好接收。

系统的输出为

$$y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{z}(t) = s(t) \sum_{i=1}^M w_i + \sum_{i=1}^M w_i n'_i \quad (1.68)$$

式中 n'_i 为信号校正相移之后的噪声成分。

如果权系数之和约定为 1，则输出信号

$$y(t) = s(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{n}'(t) \quad (1.69)$$

它是一个无偏输出信号，因为

$$E\{y(t)\} = s(t) \quad (1.70)$$

阵列输出的方差可表示为

$$\text{var}[y(t)] = E\{\mathbf{W}^T \mathbf{n}'(t) \mathbf{n}'^T(t) \mathbf{W}\} = \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{n'n} \mathbf{W} \quad (1.71)$$

在信号校正相移之前出现的噪声向量 $\mathbf{n}(t)$ 和 $\mathbf{n}'(t)$ 之间的关系为

$$\mathbf{n}'(t) = \Phi \mathbf{n}(t) \quad (1.72)$$

其中， Φ 为对角酉变换矩阵，即

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^{j\Phi_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{j\Phi_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{j\Phi_M} \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

阵列输出的方差经过这样一个酉变换之后仍保持不变，即

$$\text{var}[y(t)] = W^T R_{nn} W = W^T R_{nn} W \quad (1.74)$$

要求在下式的约束下使式(1.74)最小

$$W^T I = 1 \quad (1.75)$$

式中

$$I = [1, 1, \dots, 1]^T \quad (1.76)$$

为了求解这个最小化问题，构造一个修正过的性能量度：

$$h_{MV} = \frac{1}{2} W^T R_{nn} W + \lambda [1 - W^T I] \quad (1.77)$$

其中， λ 为拉格朗日乘子，上述 h_{MV} 是 W 的二次函数，故最优 W 可由使梯度 $\nabla_w h_{MV}$ 等于零而得到。梯度由下式给出：

$$\nabla_w h_{MV} = R_{nn} W - \lambda I \quad (1.78)$$

求得的加权向量为

$$W_{MV} = R_{nn}^{-1} I \lambda \quad (1.79)$$

最优解 W_{MV} 必须满足约束条件得

$$W_{MV}^T I = 1 \quad (1.80)$$

把式(1.79)代入式(1.80)，可得

$$\lambda = \frac{1}{I^T R_{nn}^{-1} I} \quad (1.81)$$

把式(1.81)代入(1.79)得到

$$W_{MV} = \frac{R_{nn}^{-1} I}{I^T R_{nn}^{-1} I} \quad (1.82)$$

式中 W_{MV} 满足式(1.80)的约束条件。

把式(1.82)代入(1.74)，得到输出噪声方差的最小值为

$$\text{var}_{\min}[y(t)] = \frac{1}{I^T R_{nn}^{-1} I} \quad (1.83)$$

如果使用复数值，所有前面的表示式都不变，因为需要修改使之适合复数向量的仅是协方差矩阵 R_{nn} 的定义。

1.3.5 最优解的因式分解

各个不同的最优解可分解为一个线性矩阵滤波器链接一个标量处理

器。最小 MSE 性能准则得到的最优权向量为

$$\mathbf{W}_{MSE} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}^* = [\mathbf{S} \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T + \mathbf{R}_{nn}]^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}^* \quad (1.84)$$

通过矩阵求逆引理可得

$$\mathbf{W}_{MSE} = [\mathbf{S} \mathbf{R}_{nn}^{-1} - \frac{S^2 \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1}}{1 + \mathbf{S} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*}] \mathbf{v}^* = [\frac{S}{1 + \mathbf{S} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*}] \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.85)$$

由式(1.85)可见, 最小 MSE 加权向量是一个矩阵滤波器 $\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*$ (它也是其它权向量解的公共部分) 与一个标量因子之积。由于 MV 解仅适用于信号整相阵, 所以为了使其它解适合信号整相阵必须用 \mathbf{I} 向量代换所遇到的 \mathbf{v} 向量。

对应于 $\mathbf{W} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*$ 的线性矩阵滤波器的输出噪声功率和输出信号功率为

$$N_0 = \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{nn} \mathbf{W} = \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.86)$$

和

$$S_0 = \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{W} = S N_0^2 \quad (1.87)$$

MSE 性能量度和 ML 性能量度的最优加权向量通过上式可表示为

$$\mathbf{W}_{MSE} = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{S_0}{N_0 + S_0} \cdot \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.88)$$

$$\mathbf{W}_{ML} = \frac{1}{N_0} \cdot \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.89)$$

同理, 信号整相阵 ($\mathbf{v} = \mathbf{I}$) 的 ML 权向量转化为无偏的 MV 权向量, 即

$$\mathbf{W}_{ML} |_{\mathbf{v}=\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}}{\mathbf{I}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{I}} = \mathbf{W}_{MV} \quad (1.90)$$

由此得到如下结论, 最小 MSE 处理器可以认为是一个线性矩阵滤波器链接一个标量处理器, 标量处理器含相应于其它性能量度的估计, 如图 1.4 所示。

所以, 以上得到的最优加权向量的各不同解, 全都可以表示为如下的形式:

$$\mathbf{W} = \beta \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.91)$$

其中, β 是一个标量增益。因此各解生成相同的 SNR, 它可表示为

$$\left(\frac{s}{n} \right) = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{R}_{nn} \mathbf{W}} = \frac{\beta^2 \mathbf{S} \mathbf{v}^T (\mathbf{R}_{nn}^{-1}) \mathbf{v}^* \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^*}{\beta^2 \mathbf{v}^T (\mathbf{R}_{nn}^{-1}) \mathbf{v}^*} = \mathbf{S} \mathbf{v}^T \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{v}^* \quad (1.92)$$

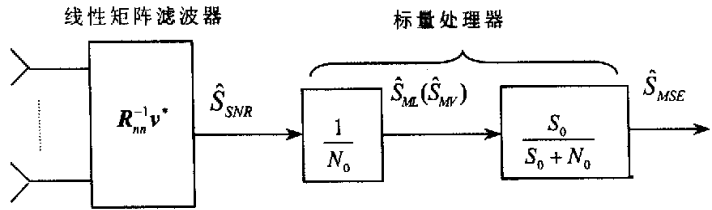


图 1.4 分解了的最小 MSE 处理器
Fig.1.4 Decomposed MSE processor

由此得出如下结论：任何一个基于自适应阵的不同性能量度的最优加权向量，全都可以由维纳解给出（可能差一个常数因子）。因而，在确定自适应阵稳态性能理论极限中，维纳—霍夫方程是非常重要的。理论的性能量度给设计人员提供了一个标准，可用来衡量在完成加强阵稳态性能的任务中实际性能有多大的改善，在判断各种设计的优劣方面也是一个很有价值的工具。

1.4 本文的工作和意义

本文的主要内容是对自适应阵列天线系统和阵列信号处理的分析与研究。本文共六章，第一章主要介绍自适应阵列信号处理的研究基础和现状；第二章介绍了自适应波束形成算法以及 DOA 估计；第三章总结了一些鲁棒波束形成算法；第四章给出了鲁棒递推最小二乘 RLS 自适应算法；第五章研究了约束最小均方 CLMS 算法，提出了鲁棒约束 LMS 波束形成算法；第六章总结了本文的工作，介绍了一些自适应阵列信号处理的发展趋势。

本文以线性阵列天线作为研究对象，研究和分析了鲁棒自适应波束形成算法。在实际的多径环境中，通信系统模型的不确定性和采样样本数目的限制，会导致自适应控制算法的性能下降，因此针对信号方向向量的偏差，鲁棒波束形成器的设计引起了众多研究者的兴趣。本文从实际应用环境出发，通过对传统权重更新算法的研究和分析，结合鲁棒自适应波束形成器，对传统算法进行了改进，使这些自适应控制算法具有一定的实际意义。

第二章 自适应阵列信号处理基本方法

阵列信号处理主要包括：波束形成技术、信号到来方向(DOA)估计技术以及与这些问题相关的技术，还包括信号数目的估计和多径参数的估计。

2.1 波束形成技术

2.1.1 波束形成算法分类

波束形成算法按照期望信号的先验知识可以分成三类^[5]：第一类，基于到来方向的波束形成算法；第二类，基于参考信号的波束形成算法；第三类，盲波束形成算法。

(1) 基于到来方向的波束形成算法

① 最大化信噪比波束形成器

信号到来方向 $\theta_1, \dots, \theta_D$ 以及相应的阵列响应向量 $\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)$ ，可通过 MUSIC^{[6]-[8]}或者 ESPRIT^[9]等算法得到。阵列输出的信噪比表达式为

$$\text{SNR}_0 = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{W}_0^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{W}_0^H \mathbf{R}_{uu} \mathbf{W}_0} \leq \sigma_0^2 \mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) = \text{SNR}_{\max} \quad (2.1)$$

其中， θ_0 为所期望信号的到达方向， \mathbf{W}_0 为相应的最优权重， $\mathbf{R}_{uu} = E\{\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^H(t)\}$ 为干扰和噪声的协方差矩阵，其权重方程为

$$\mathbf{W}_{\text{SNR}} = \xi \cdot \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0) \quad (2.2)$$

② 最大似然波束形成器

输入信号向量似然函数定义为

$$\text{Ln}(X(t)) = f_u(X(t)) = \frac{1}{|\pi \mathbf{R}_{uu}|} e^{-[X(t) - \beta_u s(t) \mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{R}_{uu}^{-1} [X(t) - \beta_u s(t) \mathbf{a}(\theta)]} \quad (2.3)$$

最优加权向量可通过最大化似然函数获得，即

$$\mathbf{W}_{\text{ML}} = \frac{\mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (2.4)$$

由于最优加权向量与 \mathbf{W}_{SNR} 成比例，最大似然波束形成器也可以最大化阵列输出的信噪比。

③ 最小化均方差波束形成器

该波束形成器是通过最小化均方差 $E\{|e(t)|^2\}$ 来实现的，阵列输出误差

$e(t)$ 被定义为

$$e(t) = \beta_i(t)s_i(t) - W_0^H X(t) \quad (2.5)$$

最优维纳解可通过最小化均方误差求得，如下式所示

$$W_{MSE} = R_{xx}^{-1} r_{xd} = R_{xx}^{-1} E\{X(t)\beta_i(t)s_0(t)\} \quad (2.6)$$

假如信号 $\beta_i(t)s_i(t)$, $i=1, \dots, D$ 是不相关的，则维纳权重方程具有一个特殊的形式，如下式所示：

$$W_{MSE} = \frac{\sigma_0^2}{1 + a^H(\theta_0)R_{uu}^{-1}a(\theta_0)} R_{uu}^{-1}a(\theta_0) \quad (2.7)$$

在这种情况下， W_{MSE} 等于信噪比波束形成器的 W_{SNR} 乘以一个比值。

以上介绍的几类波束形成器是基于到来方向 DOA 波束形成算法中比较常见的。通过各种到来方向的估计算法，可获得 N 次快拍的向量 $X(t)$ 和阵列响应向量 $a(\theta_1), \dots, a(\theta_D)$ 的估计值， R_{xx} 和 R_{uu} 的估计值分别如下所示

$$\hat{R}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k X_k^H \quad (2.8)$$

$$\hat{R}_{uu} = \hat{R}_{xx} - \sigma_0^2 a(\theta_0) a^H(\theta_0) \quad (2.9)$$

基于到来方向 DOA 波束形成算法的特点：易于用解析法处理；需要到来方向 DOA 的估计；要求阵列流形知识，并且对该方面的误差比较敏感；对于到来方向 DOA 估计的假设是所有使用者的数目（包括共通道干扰）少于阵列中天线的数目。

(2) 基于参考信号的波束形成算法

当一个参考信号 $d(t)$ 可利用时，通过最小化波束形成器的输出和 $d(t)$ 的均方差，Wiener Hopf 解可以得到，即 Wiener Hopf 方程为

$$W_{MSE} = R_{xx}^{-1} r_{xd} \quad (2.10)$$

$$r_{xd} = E\{X(t)d(t)\} \quad (2.11)$$

W_{MSE} 可以通过最小均方差 LMS 算法或者直接抽样矩阵求逆算法 DMI 获得。

该波束形成算法的特点：不需要进行到来方向 DOA 的估计；不需要知道阵列流形；无需规定多路径角度范围；在共通道干扰存在时，原先的载频和信号很难恢复。

(3) 盲波束形成算法

经典的波束形成要求已知到来方向，即期望信号的方向。盲波束形成不是基于到来方向，而是基于不同信号结构或者通道特点来识别期望信号，见[10]。

对于人工信号，特别是无线通信中使用的信号，信号的统计特性和确定性性质常常是清楚的，并且是准确已知的。通信信号的典型统计特性有

高斯性、循环平稳性等，典型的确定性性质则包括恒模性。如果被利用的性质是信号的统计特性（如非高斯性和循环平稳性），这类盲波束形成称为随机盲波束形成；若被利用的是信号本身的确定性性质（如恒模、有限字符、独立性等）或信道的信号处理模型的结构性质（如矩阵的 Toeplitz 结构等），则称其为确定性盲波束形成。最近许多盲波束形成算法被提出，它们不是基于具体的通道模型，而是基于信号的性质。最著名的一个例子就是恒模算法 CMA，该算法基于它们的基带表达式有一个常模量的事实来分辨信号。对于在无线通信中遇到的那些人造信号，信号性质是完全已知的和准确的，这样可以获得很好的鲁棒算法。

盲波束形成算法的特点：不需要任何训练；不需要知道到来方向 DOA 和阵列流形；收敛特性不能确定。

2.1.2 常见的波束形成器

(1) Bartlett 波束形成器

Bartlett 波束形成器是经典傅里叶 Fourier 分析对传感器阵列数据的一种自然推广。对于任意几何形状阵列，该算法使波束形成的输出功率相对于某个特定输入信号为最大。设来自方向 θ 的信号在等距线阵上获得输出功率最大，阵列接收信号为

$$X(t) = a(\theta)s(t) + n(t) \quad (2.12)$$

其中，方向向量为

$$a(\theta) \triangleq [1, e^{j\phi}, \dots, e^{j(L-1)\phi}] \quad (2.13)$$

式中

$$\phi = -kd \cos \theta = -\frac{w}{c} \cos \theta = -\frac{2\pi f d}{c} \cos \theta \quad (2.14)$$

则阵列输出功率最大化问题可表述为

$$\begin{aligned} \max_w E\{W^H X(t) X^H(t) W\} &= \max_w W^H E\{X(t) X^H(t)\} W \\ &= \max_w \left\{ E|s(t)|^2 |W^H a(\theta)|^2 + \sigma^2 \|W\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

在白噪声方差 σ^2 一定的情况下，加权向量的范数 $\|W\|$ 不影响输出信噪比，故取 $\|W\|=1$ ，求解其最优权重为

$$W^H a(\theta) = \|W\| \cdot \|a\| \cos \alpha = \sqrt{L} \cos \alpha \quad (2.16)$$

其中， α 是两向量之间的夹角。显然 $\alpha=0$ ，即两向量方向相同，内积最大。所以最优加权向量为

$$\mathbf{W}_{BF} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\sqrt{L}} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\sqrt{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}} \quad (2.17)$$

式中， \mathbf{W}_{BF} 的下标 BF 是 Bartlett 滤波器的英文缩写。

加权向量 \mathbf{W}_{BF} 可解释为一个空间滤波器，它与照射到阵列上的信号匹配。直观上，阵列加权向量可使该信号在各阵元上产生的延迟（还可能衰减）均衡，以便使它们各自的贡献最大限度地综合在一起。

定义“空间谱”

$$P_{BF} = \mathbf{W}_{BF}^H \mathbf{R} \mathbf{W}_{BF} = \frac{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta)} \quad (2.18)$$

其中

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \quad (2.19)$$

如果到来方向 θ 确定，可将它代入权重公式，得到 Bartlett 波束形成器的加权向量 \mathbf{W}_{BF} 。

(2) Capon 波束形成器

Capon 波束形成器也称最小方差无畸变响应 (MVDR, minimum variance distortion less response) 波束形成器。它试图使噪声以及来自非 θ 方向的任何干扰所贡献的功率为最小，但又能保持“在观测方向 θ 上的信号功率”不变。用数学表示为

$$\min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \quad \text{且} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta) = 1 \quad (2.20)$$

其中， $\mathbf{a}(\theta)$ 为指定方向的方向向量。现在来求 \mathbf{W} ，令

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} + \lambda [1 - \mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta)] \quad (2.21)$$

通过拉格朗日乘子法求 J 的最小值

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}} = \mathbf{R} \mathbf{W} - \lambda \mathbf{a}(\theta) = 0 \quad (2.22)$$

则得

$$\mathbf{W} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \quad (2.23)$$

而 $\mathbf{W}^H \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \lambda \mathbf{a}(\theta) = 1$ ，则

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (2.24)$$

故可求出最优加权向量，用 \mathbf{W}_{CAP} 记之

$$W_{CAP} = \frac{R^{-1}a(\theta)}{a^H(\theta)R^{-1}a(\theta)} \quad (2.25)$$

此时, 空间谱为

$$P_{CAP} = \frac{1}{a^H(\theta)R^{-1}a(\theta)} \quad (2.26)$$

当 θ 由 -90° 至 90° 进行扫描时, 计算阵列输出功率, 形成方向图, 其所对应的角度为信号入射方向。

2.2 权重更新算法

2.2.1 最小均方差 LMS 算法

使用 LMS 算法估计阵列的最优加权向量的应用很广泛, 且对它的研究如今仍具有相当的价值。当加权向量每次迭代受到限制时, 该算法称之为约束 LMS 算法, 而当加权向量每次迭代不受限制时, 则该算法称之为非约束 LMS 算法。

1) 非约束 LMS 算法

Widrow and Hoff (1960) 提出了一种在 R_{xx} 和 R_{xd} 先验知识未知时求最优权重近似值的方法, 习惯上称之为 Widrow-Hoff LMS 算法^[11]。这种算法是根据最优化方法中的最速下降法。其权重更新公式为

$$W(n+1) = W(n) + \mu X(n)[d(n) - X^H(n)W(n)] \quad (2.27)$$

式中, μ 称之为梯度步距, 为增益常量, 可以控制自适应的速率。当迭代次数无限增加时, 加权向量的期望值可收敛值至维纳解, 其条件是

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (2.28)$$

其中, λ_{\max} 是 R_{xx} 的最大特征值。

最小均方 LMS 算法要求期望信号的先验知识, 即参考信号, 这在数字系统中通过周期发送一个对于接收者已知的训练序列或者在特定序列的 CDMA 系统中使用传送代码来实现。该算法总是收敛的, 但是当 R_{xx} 的特征值范围较大时, 该算法收敛很慢。

2) 标准化的最小均方 NLMS 算法

该算法是常步距最小均方 LMS 算法的变形, 在每次迭代时使用了一个与数据采样有关的步距。在第 n 步迭代时, 步距应为

$$\mu(n) = \frac{\mu_0}{X^H(n)X(n)} \quad (2.29)$$

其中, μ_0 是一个常量。这种算法在[12]—[17]中被广泛研究, 它避免了估计相关矩阵特征值或对于最大允许步距选择期望相关矩阵迹的计算。与通常的最小均方算法相比, 该算法通常有更好的收敛特性和较低的信号敏感度。文献[18]对其在移动通信上的应用进行了讨论。

3) 约束最小均方 CLMS 算法

一个确定最优加权向量 W 的实时约束算法^{[19]-[23]}为

$$W(n+1) = P\{W(n) - \mu g(W(n))\} + \frac{a_0}{a_0^H a_0} \quad (2.30)$$

其中, $P \triangleq I - \frac{a_0 a_0^H}{L}$ 是一个投影因子, $g(W(n))$ 是一个在第 n 步迭代后与 $W(n)$ 有关的功率曲面 $W^H(n) R W(n)$ 的梯度的无偏估计, μ 是梯度步距, a_0 是到来方向上的方向向量。

该算法是受限的, 因为加权向量在每一步迭代均满足约束条件, 即 $W^H(n) a_0 = 1$ 。可以将约束条件扩展为以下条件极值问题

$$\begin{aligned} \min_W & W^H R_x W \\ \text{subject to } & C^H W = f \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中, $C \triangleq [c_1, \dots, c_j, \dots, c_J]$, $f \triangleq [f_1, f_2, \dots, f_J]^T$ 。

用拉格朗日乘子法可以找到满足(2.31)的最优加权向量 W_{opt} 。将约束条件加到目标函数中, 得到

$$\min_W \Gamma(W) = \frac{1}{2} W^H R_x W + \lambda^H (C^H W - f) \quad (2.32)$$

式(2.32)对 W 求梯度

$$\nabla_W \Gamma(W) = R_x W + C \lambda \quad (2.33)$$

令梯度等于零, 得到最优加权向量

$$W_{opt} = -R_x^{-1} C \lambda \quad (2.34)$$

拉格朗日乘子矢量 λ 可由约束方程求得, 即由

$$C^H W_{opt} = f \quad (2.35)$$

得出

$$\lambda = -[C^H R_x^{-1} C]^{-1} f \quad (2.36)$$

把式(2.36)代入式(2.34)得约束最优加权向量

$$W_{opt} = R_x^{-1} C [C^H R_x^{-1} C]^{-1} f \quad (2.37)$$

约束最优加权向量的迭代关系式为

$$W(k+1) = P[W(k) - \mu R_x W(k)] + f \quad (2.38)$$

其中, $P \triangleq I - C(C^H C)^{-1} C^H$, μ 为步距。

2.2.2 直接矩阵求逆 DMI 算法

该算法使用 R_{xx} 和 R_{xd} 的估计值代替它们本身来估计阵列权重, R_{xx} 和 R_{xd} 的估计值通过阵列信号的有限抽样来估计得到^[24], 如下所示

$$\hat{R}_{xx} = \frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{i=N_1}^{N_2} X(i)X^H(i) \quad (2.39)$$

和

$$\hat{R}_{xd} = \frac{1}{N_2 - N_1} \sum_{i=N_1}^{N_2} d(i)X(i) \quad (2.40)$$

其最优权重公式为

$$W = \hat{R}_{xx}^{-1} \hat{R}_{xd} \quad (2.41)$$

直接矩阵求逆 DMI 算法通常要比最小均方 LMS 算法收敛更快, 但是计算复杂。该算法也要求一个参考信号。

2.2.3 递推最小二乘 RLS 算法

递推最小二乘 RLS 算法使用加权累加和来估计 R_{xx} 和 R_{xd} , 详见[25]和[26], 则可得到

$$\hat{R}_{xx} = \sum_{i=0}^N \gamma^{N-i} X(i)X^H(i) \quad (2.42)$$

和

$$\hat{R}_{xd} = \sum_{i=0}^N \gamma^{N-i} d(i)X(i) \quad (2.43)$$

其中, γ 为遗忘因子, 通常取 $0 \leq \gamma \leq 1$ 。自相关矩阵的求逆可以通过递推方法得到, 则权重更新公式为

$$W(n) = W(n-1) + q(n)[d(n) - W^H(n-1)X(n)]^H \quad (2.44)$$

其中

$$q(n) = \frac{\gamma^{-1} R_{xx}^{-1}(n-1)X(n)}{1 + \gamma^{-1} X^H(n)R_{xx}^{-1}(n-1)X(n)} \quad (2.45)$$

而

$$R_{xx}^{-1}(n) = \gamma^{-1} [R_{xx}^{-1}(n-1) - q(n)X^H(n)R_{xx}^{-1}(n-1)] \quad (2.46)$$

假如信噪比较大, 递推最小二乘算法 RLS 的收敛速率比最小均方差 LMS 算法快一个数量级; 它要求一个 R_{xx}^{-1} 的初始估计值和一个参考信号。

2.2.4 恒模 CMA 算法

(1) 基本恒模算法

恒模算法 CMA 是一种基于梯度的盲波束形成算法，它的工作前提是干扰的存在引起阵列输出幅值的变化，参见[27]-[28]，它的性能函数为

$$J(n) = \frac{1}{2} E[(|y(n)|^2 - y_0^2)^2] \quad (2.47)$$

其中 p, q 是正整数，在实际中取值 1 或 2，并相应地记做 “CMA_{p-q}”， y_0 是阵列输出端期望的信号幅值。由于恒模算法的代价函数是非线性的，无法直接求解，一般采用梯度下降法逐步逼近最优解，其迭代公式为

$$W(k+1) = W(k) - \mu \nabla_w F(k) \quad (2.48)$$

$p=1, q=1$

$$e(k) = \frac{y(k)}{|y(k)|} \operatorname{sgn}(|y(k)| - 1) \quad (2.49)$$

$p=1, q=2$

$$e(k) = 2(y(k) - \frac{y(k)}{|y(k)|}) \quad (2.50)$$

$p=2, q=1$

$$e(k) = 2y(k) \operatorname{sgn}(|y(k)|^2 - 1) \quad (2.51)$$

$p=2, q=2$

$$e(k) = 4y(k)(|y(k)|^2 - 1) \quad (2.52)$$

由于随机梯度法控制的恒模算法收敛速度比较慢，并且需要仔细地校正步长，如果步长过小，则收敛速度太慢；若步长过大，性能容易失调。因此，Agee 提出了一种具有快速收敛特性的最小二乘恒模算法，该算法基于高斯方法，无需步长因子。最小二乘恒模算法利用了扩展的高斯方法最小化代价函数，得到加权向量的迭代公式为

$$W(k+1) = [XX^H]^{-1} Xr^*(k) \quad (2.53)$$

由于避免了步长因子的控制，最小二乘恒模算法实现起来更容易，收敛速度更快，但是与随机梯度法控制的恒模算法相比，最小二乘恒模算法复杂度要高一些。

(2) 基于多个恒模用户的算法

从上面的讨论可以看出当只有一个恒模用户信号时，恒模算法能迅速

抑制干扰,较好的恢复恒模信号,然而由于恒模算法仅仅利用了信号的恒包络特性,当多路恒模用户信号同时存在时不能够自适应地辨识出不同的恒模信号,因而不能把所有恒模信号都恢复出来。然而在移动通信的实际环境中,往往是多个用户并存,因此要求算法具有对多路信号实现波束形成的能力。

A. 多级恒模算法

多级恒模算法是利用恒模算法和多级恒模阵恢复多路恒模用户信号的一种方法。他们在每个恒模阵波束形成器后面加上一个自适应信号对消器构成一级恒模阵,并把多个恒模阵列级联在一起设计成多级恒模阵。当每一级恒模阵的波束形成器捕获一个恒模用户信号后,它后面的自适应信号对消器把信号从接收数据中除去,然后把含有其余信号的混合数据输入到下一级恒模阵进行同样处理,直至把所有恒模用户信号捕获并分离出来,从而实现对多路恒模用户信号的分离接收。多级恒模算法主要包括两部分算法:第一部分是基于随机梯度法的恒模算法;第二部分是由最小均方算法控制的信号对消技术。我们不难看出多级恒模算法实现起来比较复杂,它既要实现对恒模用户信号的波束形成,又要从接收数据中除掉已经捕获的恒模信号,两者缺一不可,而且这两部分算法都需要仔细地校正步长因子,这无疑更增加了算法的实施难度。此外,多级恒模算法对信号对消算法的要求比较高,信号对消的结果会直接影响下一级波束形成器恢复其它恒模信号的效果。

B. 解析恒模算法

恒模算法可以归纳为下列恒模分解问题,即已知天线阵列接收数据矩阵 X ,寻找满足方程 $\hat{S} = W^T X$ 的权向量 W ,其中 \hat{S} 是对所有恒模用户信号的估计。解析恒模算法在求出恒模用户信号个数的基础上,利用解析的方法把恒模分解问题转化为它的等价问题,进而求出等价问题的精确解,实现对所有恒模用户的分离接收。解析恒模算法的结果比较精确,并且算法具有很强的鲁棒性,值得一提的是,该算法解决了估计恒模信号个数的问题,这是基于多用户的恒模算法需要解决的首要问题。解析恒模算法的不足之处在于其运算量比较大。

C. 基于 Givens 变换的多用户恒模算法

该算法采用了解析恒模算法的方法,首先确定出恒模用户信号的个数,并把天线阵列的接收数据通过变换映射到信号子空间上,然后在信号子空间中采用 Givens 变换实现对多用户信号的分离接收。事实上,由于各个用户之间是相互独立的,因而他们在信号子空间上也是相互正交的,该算法

正是基于这一思想而采用 Givens 变换分离出若干路正交的信号,从而实现多个信号的波束形成。这种算法收敛速度比较快。若采样数过大时,计算量成倍的增加;若采样数小的话,分离接收的效果并不理想,这是因为小采样数信号向量之间的正交程度不够好,这时需要进一步提高算法的性能。

D. 基于信号波达角估计的多用户恒模算法

在研究恒模算法的过程中发现,当恒模算法收敛于某一用户信号后,从权向量中可以求出其他用户信号的到达角。根据这一思路,提出了基于信号波达角估计的多用户恒模算法。为实现该算法,把多个恒模阵波束形成器级联在一起构成多级恒模阵。当含有多个用户的混合信号被天线接收后,首先利用最小二乘恒模算法在第一级恒模阵形成对某个恒模用户的波束;接着,从第一级恒模阵的加权向量中求出其它用户信号的到达角,进而而在各用户的波达方向上形成初始增益;最后把这些初始增益分别输入到其余各级恒模阵的波束形成器作为初值,再利用最小二乘恒模算法迭代数次以修正前面对波达方向的估计可能带来的误差。这样就实现了对所有恒模用户的分离接收,同时,也得到了对各用户信号波达方向的估计。与前面所述的恒模算法相比,这一算法不需要信号对消,算法的计算复杂度降低了,收敛速度也快了,这有利于提高算法的实时性

E. 基于扩频信号的多用户恒模算法

在 CDMA 通信系统中,基站已知所有用户的扩频信号,而且可以使用这些扩频信号来区分相同频带内的不同用户。由于发射的信号都是恒模信号,CMA 算法只能捕获输出端最强包络的信号,所以我们需要引入其它的信息,这个信息对于每一个用户来说都是独一无二的,这样我们就可以分离多用户信号,所采用的用户的参考信号就是重扩信号。波束形成器输出端口的个数等于系统中用户的个数。这种算法在阵列输出端不需要对信号进行分类,波束形成器的输出端的个数不受阵元数目的限制,可以在低的信干噪比的条件下工作。

2.2.5 神经网络方法

在这部分中, Madaline Rule III 的算法被描述。文献[29]对该算法的不同方面和相关的议题进行了研究。对于神经网络总的理论和它们的应用,可参看[30]和[31]。

当参考信号已知时,可利用 MRIII 算法实现。阵列输出使用一个非线性映射如下式:

$$\tanh(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (2.54)$$

权重更新公式为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu g(\mathbf{W}(n)) \quad (2.55)$$

其中, μ 是梯度步距, $g(\mathbf{W}(n))$ 是与阵列权重 $\mathbf{W}(n)$ 相关的均方差 MSE 曲面上的瞬时梯度。

当阵列使用权重 $\mathbf{W}(n)$ 进行运算时, 产生的阵列输出为

$$y(n) = \mathbf{W}^H(n) \mathbf{X}(n+1) \quad (2.56)$$

对输出 $y(n)$ 用非线性映射修改后为

$$\tilde{y}(n) = \tanh(y(n)) \quad (2.57)$$

误差信号为

$$\tilde{\varepsilon}(n) = \tilde{y}(n) - r(n+1) \quad (2.58)$$

与阵列权重 $\mathbf{W}(n)$ 相关的均方差 MSE 曲面上的瞬时梯度变为

$$\begin{aligned} g(\mathbf{W}(n)) &= \frac{\partial(\tilde{\varepsilon}^*(n)\tilde{\varepsilon}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} \\ &= 2\tilde{\varepsilon}(n) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} \\ &= 2\tilde{\varepsilon}(n) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(n)}{\partial y(n)} \frac{\partial y(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} \\ &= 2\tilde{\varepsilon}(n) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(n)}{\partial y(n)} \mathbf{X}(n+1) \end{aligned} \quad (2.59)$$

对于小的偏差 Δy 使用 $\Delta \tilde{\varepsilon}(n)/\Delta y$ 来代替 $\partial \tilde{\varepsilon}(n)/\partial y(n)$ 可得到

$$g(\mathbf{W}(n)) = 2\tilde{\varepsilon}(n) \frac{\Delta \tilde{\varepsilon}(n)}{\Delta y} \mathbf{X}(n+1) \quad (2.60)$$

其中, $\Delta \tilde{\varepsilon}(n)$ 表示由阵列输出上的变化 Δy 而引起的误差。权重的更新方程变为

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - 2\mu \tilde{\varepsilon}(n) \frac{\Delta \tilde{\varepsilon}(n)}{\Delta y} \mathbf{X}(n+1) \quad (2.61)$$

误差信号 $\tilde{\varepsilon}(n)$ 的均方差曲面可能有局部最小点, 因此, 当参考信号和阵列输出的均方差被最小化的情况不存在时, MRIII 算法的全局收敛特性不能被保证。尽管如此, 该算法具有很强的鲁棒性, 适合于模拟实现和产生较快的权重更新。

2.3 到来方向 DOA 估计算法

传统波束形成算法(如 Bartlett、Capon)的分辨率主要决定于阵列长度,

阵列长度确定后，其分辨率也就被确定，称为瑞利限。超瑞利限的方法称为超分辨率方法。MUSIC 算法^[32]、ESPRIT 算法^[33]为超分辨率 DOA 估计方法中最为典型的两种。

2.3.1 MUSIC 算法

信号处理中的几个重要问题（例如，到达方向估计，噪声中几个叠加指数信号的参数估计，重叠回波的分辨等）都可以归结为估计下列模型的参数：

$$X(t) = A(\theta)s(t) + n(t) \quad (2.62)$$

式中， $X(t) \in C^{M \times 1}$ 是带噪声的数据向量， $s(t) \in C^{D \times 1}$ 是 D 个信号的幅值向量，而 $n(t) \in C^{M \times 1}$ 代表加性噪声向量， $A(\theta) \in C^{M \times D}$ 具有下面的特殊结构：

$$A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_D)] \quad (2.63)$$

其中， $a(\theta_i) \in C^{M \times 1}$ 是第 i 个信号与 $X(t)$ 之间的传输向量，且 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D]^T$ ，对模型(2.62)作以下假设：

假设 1： $M > D$ ，且对应于不同 θ_i 值的向量 $a(\theta_i)$ 是彼此线性独立的。

假设 2： 矩阵 $P = E\{s(t)s^H(t)\}$ 非奇异，且 $N > M$ 。

假设 3： $e(t)$ 是白噪声向量的随机过程，即有 $E\{e(t)\} = 0$ ， $E\{e(t)e^H(t)\} = \sigma^2 I$ 和 $E\{e(t)e^T(t)\} = 0$ 。

由于各阵元的噪声互不相关，且不和信号相关，因此 $X(t)$ 的协方差矩阵可写成

$$R_{xx} = E\{X(t)X^H(t)\} = A(\theta)PA^H(\theta) + \sigma^2 I \quad (2.64)$$

其中， P 为空间信号的自相关矩阵。若空间信号源是互不相关的，则 P 为对角阵，对角线元素就是空间信号的功率；若空间各信号源部分相关，则 P 为非对角阵，但为非奇异阵；若空间各信号源完全相关，则 P 为非对角的奇异阵。由假设 1、2 可知， $A(\theta)PA^H(\theta)$ 的秩为 D 。由于 $A(\theta)$ 为满秩和 P 为正定矩阵， $A(\theta)PA^H(\theta)$ 必然是半正定的，所以矩阵 $A(\theta)PA^H(\theta)$ 特征值均大于零，其中有 D 个与信号相关的正特征值。通过奇异值分解可得

$$R_{xx} = U_s \Sigma_s U_s^H + \sigma^2 U_n U_n^H \quad (2.65)$$

协方差矩阵 R_{xx} 的特征值必然满足下列关系：

$$\begin{aligned} \lambda_i &> \sigma^2, & i &= 1, \dots, D \\ \lambda_i &= \sigma^2, & i &= D+1, \dots, M \end{aligned}$$

其中，特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_D$ ，分别等于 $A(\theta)PA^H(\theta)$ 各正特征值与 σ^2 之和；而协方差矩阵 R_{xx} 的其它特征值均为 σ^2 ，且为 $M-D$ 个。协方差矩阵 R_{xx} 的特征值按降序排列为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_M$ ，它们所对应的特征向量为 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_M$ ，且为相

互正交的，即构成 $M \times M$ 空间中的一组标准正交基。定义

$$\begin{aligned} U_s &= \{e_1, \dots, e_D\} \\ U_n &= \{e_{D+1}, \dots, e_M\} \end{aligned}$$

由于 σ^2 和 U_n 是协方差矩阵 R_{xx} 的特征值和对应的特征向量矩阵，故由特征值定义可知

$$R_{xx} U_n = \sigma^2 U_n \quad (2.66)$$

若用 U_n 右乘式(2.64)，可得

$$R_{xx} U_n = A(\theta) P A^H(\theta) U_n + \sigma^2 U_n \quad (2.67)$$

联立(2.66)和(2.67)，则为

$$A(\theta) P A^H(\theta) U_n = 0 \quad (2.68)$$

从而有 $U_n^H A(\theta) P A^H(\theta) U_n = 0$ ，由于 P 是非奇异的，而 $t^H P t = 0$ 当且仅当 $t = 0$ ，所以可得到

$$A^H(\theta) U_n = 0 \quad (2.69)$$

由上式可知，矩阵 $A(\theta)$ 的各个列向量与噪声空间正交，故可等价于

$$U_n^H a(\theta) = 0, \quad \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_D\} \quad (2.70)$$

或

$$a^H(\theta) U_n U_n^H a(\theta) = 0, \quad \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_D\} \quad (2.71)$$

由于 U 为酉矩阵，所以

$$U U^H = \begin{bmatrix} U_s & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_s^H \\ U_n^H \end{bmatrix} = I \quad (2.72)$$

或

$$U_s U_s^H + U_n U_n^H = I \quad (2.73)$$

所以式(2.71)可化为

$$a^H(\theta)(I - U_s U_s^H)a(\theta) = 0, \quad \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_D\} \quad (2.74)$$

综上所述，MUSIC 算法的基本步骤：

- 1) 根据阵列天线各阵元测得的数据 $x_i(t)$ 来估计协方差矩阵 \hat{R}_{xx} ；
- 2) 将 \hat{R}_{xx} 作特征值分解；
- 3) 确定 \hat{R}_{xx} 的最小特征值的数目 n ，求出这 n 个最小特征值 $\lambda_{D+1}, \dots, \lambda_M$ 。令

$$n = M - D \quad (2.75)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}(\lambda_{D+1}, \lambda_{D+2}, \dots, \lambda_M) \quad (2.76)$$

与之相对应的特征向量为 $e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_M$ ，构造噪声矩阵：

$$U_n = [e_{D+1}, e_{D+2}, \dots, e_M] \quad (2.77)$$

- 4) 计算空间谱 $P_{MU}(\theta)$ ：

$$P_{MU} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (2.78)$$

它的 D 个极大值所对应的 θ 就是信号源的方向；

5) 计算信号协方差矩阵 \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H (\mathbf{R}_{xx} - \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \quad (2.79)$$

上式中, \mathbf{A} 是 $\mathbf{A}(\theta)$ 的简写。

2.3.2 ESPRIT 算法

标准 ESPRIT 算法是一种利用旋转不变因子技术来估计信号参数的方法。设由 m 对偶极子对组成的阵元数为 M 的任意形状的阵列, 两个子阵列对应元素具有相等的敏感度模式和相同的位移偏移量 d , D 个独立的中心频率为 ω_0 窄带信号源入射到该阵列, 两个子阵列第 i 组对应元素接收信号可表示为

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^D s_k(t) a_i(\theta_k) + n_{xi}(t) \quad (2.80)$$

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^D s_k(t) e^{j\omega_0 d \sin \theta_k / c} a_i(\theta_k) + n_{yi}(t) \quad (2.81)$$

式中, θ_k 表示第 k 个信号源的入射方向, 将每个子阵列的接收信号表示为向量形式

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_x(t) \quad (2.82)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\theta) \Phi \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_y(t) \quad (2.83)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\theta) &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)] \\ \mathbf{s}(t) &= [s_1(t), \dots, s_D(t)]^T \\ \Phi &= \text{diag}\{e^{j\omega_0 d \sin \theta_1 / c}, \dots, e^{j\omega_0 d \sin \theta_D / c}\} \\ \mathbf{n}_x(t) &= [n_{x1}(t), \dots, n_{xm}(t)]^T \\ \mathbf{n}_y(t) &= [n_{y1}(t), \dots, n_{ym}(t)]^T \end{aligned}$$

式中, 上标 T 表示向量或矩阵转置, $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in C^{M \times 1}$ 是带噪声的数据向量; $\mathbf{A}(\theta) \in C^{m \times D}$ 为方向矩阵; $\mathbf{s}(t) \in C^{D \times 1}$ 为 D 个信号的入射信号向量; $\Phi \in C^{D \times D}$ 为联系两个子阵列的酉矩阵, 也称为旋转因子; 而 $\mathbf{n}_x(t), \mathbf{n}_y(t) \in C^{D \times 1}$ 为加性噪声向量。

定义整个阵列的接收向量为 $\mathbf{z}(t)$, 子阵列接收向量合并表示成

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \bar{A}s(t) + n_i(t) \quad (2.84)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ A\Phi \end{bmatrix}, \quad n_i(t) = \begin{bmatrix} n_x(t) \\ n_y(t) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

整个阵列接收向量 $z(t)$ 的自相关阵为

$$R_{zz} = E\{z(t)z^H(t)\} = \bar{A}R_{ss}\bar{A}^H + \sigma^2\Sigma_n \quad (2.86)$$

设 $D \leq m$, 则 (R_{zz}, Σ_n) 的 $2m-D$ 个最小的广义特征值等于 σ^2 , 而与 D 个最大广义特征值相对应的 D 个特征向量可以构成一个空间

$$E_s = \Sigma_n[e_1 | \cdots | e_D] \quad (2.87)$$

由于 $R\{E_s\} = R\{\bar{A}\}$, 存在唯一的非奇异矩阵 T 满足

$$E_s = \bar{A}T \quad (2.88)$$

更进一步, 阵列的旋转不变结构暗示着 E_s 能被分解成为 $E_x \in C^{m \times D}$ 和 $E_y \in C^{m \times D}$, 如下式

$$E_s = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AT \\ A\Phi T \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

可得

$$R\{E_s\} = R\{E_y\} = R\{A\} \quad (2.90)$$

因为 E_x 和 E_y 共享一个列空间, 所以 $E_{xy} = [E_x | E_y]$ 的秩为 D , 这表明存在一个唯一的秩为 D 的矩阵 $F \in C^{2D \times D}$ 可满足下式

$$\begin{aligned} 0 &= [E_x | E_y]F = E_x F_x + E_y F_y \\ &= ATF_x + A\Phi TF_y \end{aligned} \quad (2.91)$$

F 张成 $[E_x | E_y]$ 的零空间。定义

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} -F_x[F_y]^{-1} \quad (2.92)$$

把式(2.92)代入式(2.91), 可得

$$AT\Psi = A\Phi T \Rightarrow AT\Psi T^{-1} = A\Phi \quad (2.93)$$

假定 A 满秩, 则可得到

$$T\Psi T^{-1} = \Phi \quad (2.94)$$

因此, Ψ 的特征值必然等于 Φ 的对角元素, 而 T 的列向量为 Ψ 的特征向量。

第三章 鲁棒波束形成器的设计方法

所谓鲁棒性是指通信系统在一定的参数扰动下维持某些性能的特性。由于工作环境变动、外部干扰以及阵列流形误差的缘故，实际系统的精确模型很难得到，而系统的各种干扰或噪声也将导致模型的不确定性，因此可以说模型的不确定性在通信系统中广泛存在。一般情况下的自适应波束形成算法都是基于理想的无偏差条件的，在这些情况下，多种可以应用于小样本的快速收敛算法也相继出现，然而系统的性能却往往因为实际应用中假设条件的变化而受到影响。

3.1 影响阵列鲁棒性的因素

在自适应波束形成问题中影响阵列鲁棒性的诸因素可归结为^[34]：

(1) 信号与干扰的相关性

信号与干扰相关经常出现在多径传输或故意干扰的场合，这将使得波束形成算法的性能受到影响。例如以阵列输出功率作为评价函数，以到来方向作为约束条件来估计权重时，如果入射到天线阵列的信号与干扰相关，波束形成器会自动调整干扰信号的相位以使得干扰和噪声的输出功率最小，但这同时也会削弱有用信号。

(2) 信号到来方向的偏差

很多波束形成算法基于对信号到来方向的精确估计，当实际信号方向与期望方向出现小的偏差时，处理器就会将其作为干扰信号进行滤除。

(3) 阵列单元的不确定

阵列单元位置的不确定将导致方向向量的偏差，使得阵列增益降低，从而影响阵列的接收性能。

(4) 权重偏差

权重的实际幅值和相角与理想的幅值和相角间常常存在一定偏差，其原因有多种，如入射到阵列的信号并非假定的平面波，阵列单元的位置和特性的不确定，通过有限抽样计算得到的自相关阵与实际自相关阵间的误差，由于有限精度计算引起的误差，将模拟形式的权重转换为数字形式进行存储的过程中引起的误差等。

3.2 鲁棒波束形成器的设计算法

自适应波束形成器的权重可以通过对某一标准求最优而得到。信号与

干扰和噪声比（信干噪比）定义为

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |W^H a_s|^2}{W^H R_{i+n} W} \quad (3.1)$$

其中，

$$R_{i+n} = E\{(i(k) + n(k))(i(k) + n(k))^H\} \quad (3.2)$$

上式中的 R_{i+n} 是干扰加噪声的协方差矩阵， σ_s^2 是信号的功率， a_s 为期望信号的方向向量。求解(3.1)式的最优解可等价于下面条件极值问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & W^H R_{i+n} W \\ \text{subject to} \quad & a_s^H W = 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

最优解为：

$$W_{opt} = \gamma R_{i+n}^{-1} a_s \quad (3.4)$$

其中， γ 是任意的标量常数，它的数值并不影响输出的信干噪比。把式(3.4)代入式(3.1)得到最优信干噪比为

$$\text{SINR} = \sigma_s^2 a_s^H R_{i+n}^{-1} a_s \quad (3.5)$$

式(3.5)给出了式(3.1)的上限。

在讲述各种算法前先介绍信号方向向量不匹配的问题，设 \tilde{a} 表示信号的实际方向向量， a_s 表示期望的信号方向向量， Δ 表示向量偏差，从而有下式成立： $\tilde{a}_s = a_s + \Delta \neq a_s$ 。

3.2.1 抽样矩阵转置 SMI 算法

将信干噪比 $\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |W^H a_s|^2}{W^H R_{i+n} W}$ 最大化，即等价于下式

$$\min W^H R_{i+n} W \quad \text{subject to} \quad W^H a_s = 1 \quad (3.6)$$

最优加权向量为

$$W_{opt} = \alpha R_{i+n}^{-1} a_s \quad (3.7)$$

其中， $\alpha = (a_s^H R_{i+n}^{-1} a_s)^{-1}$ 是一标准化常数，不影响输出 SINR。

在实际应用中，干扰加噪声协方差阵 R_{i+n} 很难得到，故常用样本协方差矩阵 \hat{R} 来代替 R_{i+n}

$$\hat{R} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k X(n) X^H(n) \quad (3.8)$$

在这种情况下，式(3.6)可写为

$$\min W^H \hat{R} W \quad \text{subject to} \quad W^H a_s = 1 \quad (3.9)$$

通过求解式(3.9)可得到抽样矩阵转置 SMI 算法^[35]的加权向量为

$$W_{SMI} = \hat{R}^{-1} a_s \quad (3.10)$$

3.2.2 对角载入 SMI (LSMI) 算法

针对 SMI 算法在信号方向向量偏差和小样本情况下性能下降的缺点, 可以采用对角载入 SMI 算法来对其进行改进。将样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 用对角载入协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_{di}$ 来代替, 即

$$\tilde{\mathbf{R}}_{di} = \xi \mathbf{I} + \hat{\mathbf{R}} \quad (3.11)$$

其中, ξ 为对角载入因子, \mathbf{I} 为单位矩阵, 故

$$\mathbf{W}_{LSMI} = \tilde{\mathbf{R}}_{di}^{-1} \mathbf{a}_s = (\xi \mathbf{I} + \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{a}_s \quad (3.12)$$

该算法的关键问题是 ξ 的确定, Cox et al.^[36] 曾提出使用所谓白噪声增益约束的方法, 但是白噪声增益约束的参数与对角载入因子的关系非常复杂。为了实现约束关系, 需要设计多步迭代程序来不断更新对角载入因子, 而每次迭代都需要对对角载入协方差矩阵进行转置运算, 算法的运算量远远大于 SMI 算法。

3.2.3 特征空间算法

该算法的主要思想^[37]是用假设的方向向量 \mathbf{a} 在信号加干扰子空间内的投影代替 \mathbf{a} 本身, 式(3.8)式的特征值分解为

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H + \mathbf{G} \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}^H \quad (3.13)$$

其中, \mathbf{E} 表示 $\hat{\mathbf{R}}$ 的信号加干扰子空间的特征向量, $\mathbf{\Lambda}$ 表示对应的特征值构成的对角阵; \mathbf{G} 表示 $\hat{\mathbf{R}}$ 的噪声子空间的特征向量, $\mathbf{\Gamma}$ 表示对应的特征值构成的对角阵。

基于特征空间波束形成的加权向量为

$$\mathbf{W}_{sig} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{v} \quad (3.14)$$

其中, $\mathbf{v} = \mathbf{P}_E \mathbf{a}$, $\mathbf{P}_E = \mathbf{E} \mathbf{E}^H$, \mathbf{v} 和 \mathbf{P}_E 分别表示信号加干扰子空间内的投影向量和正交投影矩阵。

由(3.13)和(3.14)可以得到

$$\mathbf{W}_{sig} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{E}^H \mathbf{a}_s \quad (3.15)$$

与其它算法相比, 该算法在任意方向向量有偏差的情况下鲁棒性有了很大提高, 但是仍存在一些不足, 它主要应用于高信噪比情况和信号加干扰的子空间是低维确知的情况。由于移动通信的用户可能有低的信噪比也可能信号加干扰的子空间是高维不确知的, 所以这种方法并不适合移动通信。

3.2.4 最差情况下的性能最优鲁棒算法

该算法是针对在任意信号方向向量不匹配及小采样样本的情况下提出的，是一种基于最差情况下的性能最优鲁棒算法

首先设定在实际应用中方向向量偏差 \mathbf{e} 的范数小于某个已知常数 ε ，实际信号方向向量属于下面的阵列流形：

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \{\mathbf{c} = \mathbf{a}_s + \mathbf{e}, \|\mathbf{e}\| \leq \varepsilon\} \quad (3.16)$$

自适应波束形成器的约束条件可以描述如下：

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{W} \\ & \text{subject to } |\mathbf{W}^H \mathbf{c}| \geq 1 \\ & \text{for all } \mathbf{c} \in \mathcal{A}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.17)$$

由于向量 \mathbf{c} 属于集合 $\mathcal{A}(\varepsilon)$ ，因而该算法考虑了接收信号方向向量的不匹配问题，算法的鲁棒性得到很大提高。上述最小化问题可以等价为

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{W} \\ & \text{subject to } \min |\mathbf{W}^H \mathbf{c}| \geq 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

利用不等式性质可以得到

$$\min |\mathbf{W}^H \mathbf{c}| = |\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s| - \varepsilon \|\mathbf{W}\| \quad (3.19)$$

式(3.18)的条件极值可以描述为

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{W}^H \hat{\mathbf{R}} \mathbf{W} \\ & \text{subject to } |\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s| - \varepsilon \|\mathbf{W}\| \geq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

观察式(3.20)可知当 \mathbf{W} 进行任意角度旋转时，代价函数不发生变化，这样可以在不影响目标函数的情况下，对 \mathbf{W} 进行旋转，从而使得 $\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s$ 为实数，即

$$\text{Re}\{\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s\} \geq 0 \quad \text{Im}\{\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s\} = 0 \quad (3.21)$$

这样，整个问题最终可以描述为：

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{W}^H \mathbf{a}_s \geq \varepsilon \|\mathbf{W}\| + 1 \\ & \text{subject to } \mathbf{W}^H \mathbf{a}_s \geq \varepsilon \|\mathbf{W}\| + 1 \\ & \quad \text{Im}\{\mathbf{W}^H \mathbf{a}_s\} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

对于上述问题就可以利用 SOC 来实现，具体实现过程见参考文献[38]。

3.2.5 Bayesian 波束形成算法

Bayesian 自适应波束形成对于信源到来方向不确知的情况具有鲁棒性。在高信噪比的情况下，MVDR 波束形成器指向有用信号，而在低信噪

比的情况下，波束形成器形成了比较宽的波束，这对于信源 DOA 的不确定具有鲁棒性。但当信号的方向向量不匹配时，MVDR 波束形成器的性能下降很显著。在这种情况下，提出一种鲁棒自适应算法来提高系统的性能。

角度 θ 是随机参数，它有先验的密度函数 $p(\theta)$ ，反映信源 DOA 的不确定程度。为了计算上的简单，假设 $p(\theta)$ 由 M 个离散点 $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_M\}$ 来限定，波束形成器的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= E\{s_0(t)|X_L\} = E\{E\{s_0(t)|X_L, \theta\}\} \\ &= \sum_{i=1}^M p(\theta_i|X_L) E\{s_0(t)|X_L, \theta_i\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中， $s_0(t)$ 为期望信号， X_L 为 L 次快拍的阵列接收矩阵， $p(\theta_i|X_L)$ 是角度 θ 的后验密度函数，

$$p(\theta_i|X_L) = \frac{p(\theta_i)p(X_L|\theta_i)}{\sum_{k=1}^M p(\theta_k)p(X_L|\theta_k)} \quad (3.24)$$

对于 MMSE 波束形成器的输出为

$$y(t) = \sum_{i=1}^M p(\theta_i|X_L) \mathbf{W}_{MS}^H(\theta_i) X(t) \quad (3.25)$$

在高斯的假设下， $p(\theta_i|X_L)$ 是具有零均值高斯密度函数，在没有干扰的情况下，后验密度函数为

$$p(\theta_i|X_L) = \frac{p(\theta_i) \exp\{\beta L \mathbf{a}(\theta_i)^H \hat{\mathbf{R}}_L \mathbf{a}(\theta_i)\}}{\sum_{k=1}^M p(\theta_k) \exp\{\beta L \mathbf{a}(\theta_k)^H \hat{\mathbf{R}}_L \mathbf{a}(\theta_k)\}} \quad (3.26)$$

其中， $\hat{\mathbf{R}}_L$ 是样本的自相关矩阵， β 为单调增加的 SNR 的函数，式(3.26)的分母是归一化的常量，分子是传统波束形成器空间谱估计 $\mathbf{a}(\theta_i)^H \hat{\mathbf{R}}_L \mathbf{a}(\theta_i)$ 的单调函数。在高信噪比的情况下，上式在信源到来方向的附近有一个峰值，而在低信噪比的情况下，所有方向的 DOA 是相对平滑的。而 $p(\theta_i|X_L)$ 具有相同的变化趋势，它只是通过指数函数扩大了上述性质。在高信噪比时，后验密度函数在最接近期望 DOA 处有一峰值，而 Bayesian 波束形成器^[39]也成为了一个最小方差无失真响应 MVDR 波束形成器，而在低信噪比时，后验密度函数将回归到先验密度函数，波束的方向图在先验参数空间将有一个比较宽的主波束。

$$q(\theta_i|X_L) = \alpha p(\theta_i) \exp\{\beta L (\mathbf{a}(\theta_i)^H \hat{\mathbf{R}}_L^{-1} \mathbf{a}(\theta_i))^{-1}\} \quad (3.27)$$

其中， α 为归一化常量。 β 是 SNR 的函数，通常情况下是未知，但是它可以作为一个变量来调整对于信源 SNR 的波束形成器的响应。快拍数 L 用

来计算 $q(\theta_i|X_L)$ 。

加权向量通过下式求得

$$W_B = \sum_{i=1}^M q(\theta_i|X_L) W_{MV}(\theta_i) \quad (3.28)$$

其中, W_{MV} 为 MVDR 的加权向量。

3.2.6 用于宽带、移动、相干干扰的鲁棒自适应波束形成算法

对于传统窄带线性阵列, 提高系统的鲁棒性是为了处理宽带和移动的干扰。这种鲁棒性可以通过在干扰方向引入约束条件来实现。尽管干扰发射台的方向未知, 但这些限制条件可以通过所谓的干扰子空间最大似然的性质体现。

对于窄带最优波束形成器, 阵列输出是加权向量作用在接收信号上而得到的, 同时最大可能的削弱干扰信号。对于这样的波束形成器, 当有干扰存在时, 性能将明显地下降。可以利用能够处理相干和非相干干扰的鲁棒自适应波束形成算法来克服这些缺点。

如图 1.1 所示, 阵列接收矩阵为

$$X(t) = A \begin{bmatrix} s_0(t) \\ \tilde{s}(t) \end{bmatrix} + n(t) \quad (3.29)$$

其中, $A = [a(\theta_0), \tilde{A}]$ 。

阵列的输出响应为

$$y(t) = W^H a(\theta_0) s_0(t) + e(t) \quad (3.30)$$

其中, $e(t)$ 为由于干扰和噪声引起的误差。

假设干扰方向是已知的, 波束形成器的最优化问题为

$$\begin{aligned} & \min_w E[e(t)^H e(t)] \\ & \text{subject to } W^H a(\theta_0) = 1 \\ & \quad W^H a(\theta_p) = 0 \quad p = 1, 2, \dots, D-1 \\ & \quad \frac{d^m (W^H a(\theta))}{d\tau^m} \Big|_{\theta=\theta_p} = 0 \quad m = 1, 2, \dots, q \quad p = 1, 2, \dots, D-1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

式(3.31)的约束条件可转化为

$$W^H C^m a(\theta_p) = 0 \quad (3.32)$$

其中, $C = \text{diag}\{0, 1, \dots, M-1\}$ 。

满足约束条件的加权向量等价于

$$W = DW \quad (3.33)$$

其中, $D = I - F(F^H F)^{-1} F^H$, $F = [\tilde{A}, C\tilde{A}, \dots, C^q \tilde{A}]$ 。

波束形成器的最优解为

$$W = \frac{Da(\theta_0)}{a(\theta_0)^H Da(\theta_0)} \quad (3.34)$$

式(3.34)需要知道干扰信号的到来方向，而在许多的实际问题中，无法确知干扰信号的到来方向，但可以通过接收到的观测数据用最大似然法求取参数^[40]。

3.2.7 鲁棒 Capon 波束形成器

为了解决阵列信号方向向量偏差，可以通过使用约束条件来增加系统的鲁棒性。可是每增加一个限制条件，波束形成器就会减少抑制干扰的自由度。对于增加 Capon 波束形成器的鲁棒性采用对角载入的方法比较有效，但是参数的选择具有局限性。为了解决上述问题，介绍一种鲁棒 Capton 波束形成器。

Capon 波束形成器

$$\begin{aligned} \min W^H RW \\ \text{subject to } W^H a_0 = 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

最优加权向量为

$$W_{opt} = \frac{R^{-1}a_0}{a_0^H R^{-1}a_0} \quad (3.36)$$

对于阵列信号的方向向量误差，增加的限制条件为 $[a_0 - \bar{a}]^H C^{-1} [a_0 - \bar{a}] \leq 1$ 。最优化问题经过变换可得到

$$\begin{aligned} \min a^H R^{-1} a \\ \text{subject to } \|a - \bar{a}\|^2 = \varepsilon \end{aligned} \quad (3.37)$$

求解上式(3.37)可得到^[41]

$$\hat{a}_0 = \left(\frac{R^{-1}}{\lambda} + I \right)^{-1} \bar{a} = \bar{a} - (I + \lambda R)^{-1} \bar{a} \quad (3.38)$$

$$g(\lambda) \triangleq \|(I + \lambda R)^{-1} \bar{a}\|^2 = \varepsilon \quad (3.39)$$

3.2.8 可在线执行的鲁棒自适应波束形成算法

当实际信号的阵列响应与期望信号的阵列响应有偏差时，自适应波束形成器的性能下降，即使信号的阵列响应能够精确得到，但如果采样样本数目比较小，同样会引起性能下降。在实际系统中，波束形成器需要对接收的新数据进行在线处理。

由于存在误差矩阵 Δ

$$\tilde{\mathbf{R}}_s = \mathbf{R}_s + \Delta \neq \mathbf{R}_s, \quad \|\Delta\| \leq \varepsilon \quad (3.40)$$

求解的最优化问题为

$$\begin{aligned} & \min_W \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \\ & \text{subject to } \mathbf{W}^H (\mathbf{R}_s + \Delta) \mathbf{W} \\ & \text{for all } \|\Delta\| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.41)$$

利用拉各朗日乘子算法求得

$$\Delta = -\frac{1}{2\lambda} \mathbf{W} \mathbf{W}^H, \quad \lambda = \frac{\|\mathbf{W}\|^2}{2\varepsilon} \quad (3.42)$$

式(3.41)的最优化问题可以转化为

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \\ & \text{subject to } \mathbf{W}^H (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \mathbf{W} = 1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

通过式(3.43)求得最优权重为

$$\mathbf{W}_{rob} = \psi \{ \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \} \quad (3.44)$$

其中, $\psi\{\cdot\}$ 是最大特征值对应的特征向量。

用式(3.8)中的 $\hat{\mathbf{R}}$ 代替 \mathbf{R} 可得

$$\mathbf{W}_{rob,s} = \psi \{ \hat{\mathbf{R}}^{-1} (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \} \quad (3.45)$$

若对于由以下的情况引起其它类型的不匹配如: 环境的变化、信源的波动、传感器阵列的破坏等。最优化问题为

$$\begin{aligned} & \min_W \max_{\|\Delta_1\| \leq \gamma} \mathbf{W}^H (\mathbf{R} + \Delta_1) \mathbf{W} \\ & \text{subject to } \mathbf{W}^H (\mathbf{R}_s + \Delta_2) \mathbf{W} \geq 1 \\ & \text{for all } \|\Delta_2\| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.46)$$

式(3.46)的最优解为

$$\mathbf{W}_{rob} = \psi \{ (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \} \quad (3.47)$$

用式(3.8)中的 $\hat{\mathbf{R}}$ 代替 \mathbf{R} , 式(3.47)可写为

$$\mathbf{W}_{rob,s} = \psi \{ (\hat{\mathbf{R}} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}_s - \varepsilon \mathbf{I}) \} \quad (3.48)$$

这种方法可以在线进行迭代实现^[42]。

第四章 鲁棒 RLS 波束形成器

自适应波束形成是在无线通信、雷达和声纳^{[43]-[47]}中广泛应用的关键技术之一。一般情况下，由于通信系统模型的不确定性和采样样本数目的限制，导致自适应波束形成算法的性能下降。因此针对信号方向向量的偏差，鲁棒自适应波束形成器的设计引起了众多研究者的兴趣。例如 R. A. Monzingo 等人提出了线性约束最小方差(LCMV)波束形成器^[48]，K. L. Bell 设计了 Bayesian 波束形成器^[39]，B. D. Carlson 研究了协方差矩阵的对角载入^[49]，J. R. Guerci 研究的 CMT 方法^[50]。但这些方法存在的共同弱点是在低信噪比、多径传播环境下鲁棒性不同程度的变弱。本文针对信号方向向量偏差和小样本的问题，提出了一种鲁棒 RLS 自适应波束形成算法。该算法对于信号方向向量偏差具有很好的鲁棒性，不但可以在信号到来方向存在偏差的情况下提高系统的输出信干噪比，而且可以保证阵列权向量的归一化偏差是有界的^[51]。

4.1 RLS 波束形成算法

考虑各向同性的 M 个阵元的均匀线阵，阵元间距为 d ，期望信号到来方向为 θ_0 ，有 $D-1$ 个干扰源，到来方向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}$ ，自适应波束形成的结构如图 4.1 所示。各个信源在基准点的复包络表示为 $s_i(t)$ ，则第 l 个阵元端接收的信号为

$$x_l(t) = \sum_{i=0}^{D-1} s_i(t) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (l-1) d \sin \theta_i} + n_l(t) \tag{4.1}$$

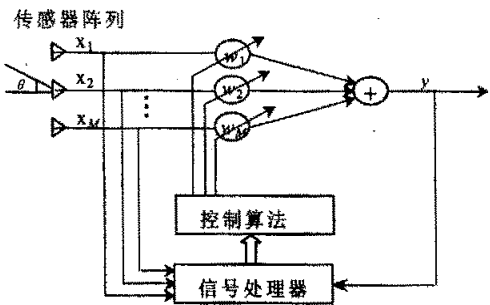


图 4.1 自适应波束形成结构图
Fig. 4.1 Structure of adaptive beamforming

天线阵列的接收向量为

$$\begin{aligned}
X(k) &= AS(k) + n(k) \\
&= s_0(k)a(\theta_0) + i(k) + n(k) \\
&= s(k) + i(k) + n(k)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中, $X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ 为接收向量; $A = [a(\theta_0), a(\theta_1), \dots, a(\theta_{M-1})]$ 为阵列流形; $a(\theta_i) = [1, e^{-j2\pi d \sin \theta_i / \lambda}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)d \sin \theta_i / \lambda}]^T$ 为方向向量; $a(\theta_0)$ 为期望信号的方向向量; $s_0(k)$ 是期望信号; $s(k)$ 为期望信号向量; $i(k)$ 为干扰向量; $n(k)$ 为噪声向量。阵列输出为

$$y(k) = W^H X(k) \tag{4.3}$$

其中, $W = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 为加权向量, 上标 T 表示转置, 上标 H 表示共轭转置。

阵列输出的信于噪比定义为

$$\text{SINR} = \frac{W^H R_s W}{W^H R_{i+n} W} \tag{4.4}$$

其中,

$$R_s = E\{s(k)s(k)^H\} \tag{4.5}$$

$$R_{i+n} = E\{(i(k) + n(k))(i(k) + n(k))^H\} \tag{4.6}$$

分别为阵列期望信号的自相关阵, 干扰和噪声的协方差阵。

阵列的最优加权向量满足:

$$\begin{aligned}
&\min_w W^H R_{xx} W \\
&\text{subject to } W^H R_s W = 1
\end{aligned} \tag{4.7}$$

如果只有一个期望信号, 那么 $R_s = \sigma_s^2 a_s a_s^H$, 其中 σ_s^2 表示期望信号的功率, 则最优加权向量为:

$$W_{opt} = \frac{R_{xx}^{-1} a_s}{a_s^H R_{xx}^{-1} a_s} \tag{4.8}$$

其中, $R_{xx} = E[X(k)X(k)^H]$ 为阵列接收信号的自相关矩阵, a_s 为期望信号的方向向量。按照最小均方误差准则求出的加权向量为

$$W_{MS}(\theta_s) = \sigma_s^2 R_{xx}^{-1} a_s \tag{4.9}$$

可以证明式(4.8)和式(4.9)是等价的。

求解式(4.8)给出的最优加权向量可以采用 RLS 算法, 具体描述如下 [52]:

$$e(n) = d(n) - W^H(n-1)X(n) \tag{4.10}$$

$$P(n) = \frac{1}{\lambda} [P(n-1) - \frac{P(n-1)X(n)X^H(n)P(n-1)}{\lambda + X^H(n)P(n-1)X(n)}] \tag{4.11}$$

$$W(n) = W(n-1) + P(n)X(n)e^*(n) \tag{4.12}$$

其中, λ 为遗忘因子, 且 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

RLS 算法采用循环求逆方法计算逆矩阵, 与矩阵直接求逆相比, 大大减少了运算量。RLS 算法最大的缺点是截止误差导致系统发散。文献[53]的研究结果证明: 如果系统存在扰动, 那么 RLS 算法在第 n 次迭代时由扰动引起的加权向量 $W(n)$ 的归一化偏差满足下列不等式

$$\frac{\|\delta W(n)\|}{\|W(n)\|} \leq \frac{\kappa[R(n)] \left[\frac{\|\delta R(n)\|}{\|R(n)\|} + \frac{\|\delta U(n)\|}{\|U(n)\|} \right]}{1 - \kappa[R(n)] \frac{\|\delta R(n)\|}{\|R(n)\|}} \quad (4.13)$$

$$\text{其中, } \kappa[R(n)] = \begin{cases} \|R^{-1}(n)\| * \|R(n)\| & (R(n) \text{ 非奇异}) \\ \infty & (R(n) \text{ 奇异}) \end{cases}$$

由式(4.13)可知, 若 $\|R^{-1}(n)\|^{-1} = \|\delta R(n)\|$, 则 RLS 算法的归一化偏差有可能是无界的, 即算法存在发散的可能性。

4.2 鲁棒 RLS 自适应波束形成算法

考虑由偏差产生的误差矩阵 Δ

$$\tilde{R}_s = R_s + \Delta \neq R_s, \quad \|\Delta\| \leq \varepsilon \quad (4.14)$$

根据文献[42]的研究结果, 求解最优加权向量问题变为

$$\begin{aligned} \min_w & W^H R_{xx} W \\ \text{subject to} & W^H (R_s + \Delta) W \geq 1 \\ \text{for all } & \|\Delta\| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (4.15)$$

求解式(4.15)的最优化问题可转化为等式约束

$$\begin{aligned} \min & W^H R_{xx} W \\ \text{subject to} & W^H (R_s - \varepsilon I) W = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

求得最优加权向量为

$$W_{rob} = \Psi\{R_{xx}, (R_s - \varepsilon I)\} \quad (4.17)$$

其中, $\Psi\{\cdot\}$ 为最小特征值所对应的广义特征向量。

如果信号、干扰、噪声是互不相关的, 可以采用递推算法逼近上式中的最优加权向量。

$$\text{令} \quad P_b(n) = [R_{xx}(n) - \varepsilon I]^{-1} \quad (4.18)$$

将式(4.18)代入公式(4.10)-(4.12)给出的 RLS 算法, 可以得到鲁棒 RLS 自适应算法为

$$e(n) = d(n) - W_b^H(n-1)X(n) \quad (4.19)$$

$$U(n) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} X(i) d^*(i) \quad (4.20)$$

$$W_b(n) = P_b(n) U(n) \quad (4.21)$$

设当数据发生扰动时对应的自相关矩阵为 $\tilde{R}_x(n)$ ，则 $P_r(n) = [\tilde{R}_x(n) - \varepsilon I]^{-1}$ ，代入式(4.19)-(4.21)的鲁棒 RLS 算法中，得到阵列的加权向量为 W_r ，对应的归一化偏差为

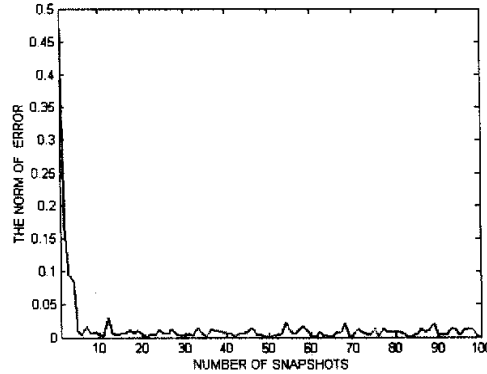
$$\frac{\|W_r(k) - W(k)\|}{\|W(k)\|} \quad (4.22)$$

在基本 RLS 算法中由扰动引起的归一化偏差为

$$\frac{\|W_p(k) - W(k)\|}{\|W(k)\|} \quad (4.23)$$

4.3 仿真实验结果

考虑 10 个阵元的等距线阵，间距为半个波长，信噪比 $SNR = -10dB$ ，期望信号到来方向为 3° ，有两个干扰源，到来方向分别为 30° 和 50° 。仿真结果如图 4.2—图 4.4 所示。图 4.2 给出了误差变化曲线，横坐标表示采样次数，纵坐标表示误差的模。从图 4.2 可以看出，本文提出的鲁棒 RLS 算法不仅收敛速度快，而且误差小，抗干扰性强。



4.2 鲁棒 RLS 算法的误差曲线

Fig. 4.2 The error of robust RLS algorithm

图 4.3 给出了在有偏差的情况下，归一化偏差的变化曲线，实线为鲁棒 RLS 算法，虚线为基本 RLS 算法。从图中可以看出，鲁棒 RLS 算法的加权向量与基本 RLS 算法相比较，鲁棒 RLS 算法具有很小的归一化偏差，能够保证系统不是发散的，而基本 RLS 自适应算法具有比较大的偏差，这

将导致系统发散，这种发散的情况对于系统的破坏力比较严重，因此我们应该避免。

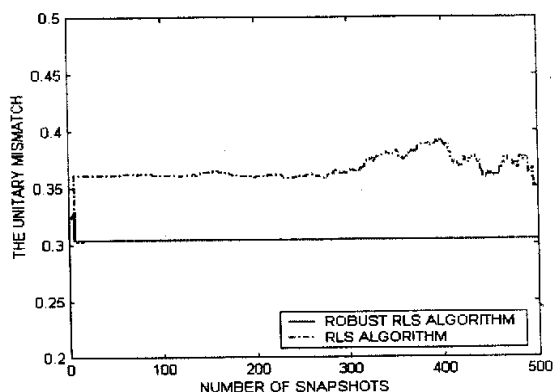


图 4.3 归一化偏差的变化曲线

Fig. 4.3 The unitary mismatch

阵列输出的 SINR 随采样次数的变化曲线如图 4.4 所示。实线为理想信干噪比，虚线为鲁棒 RLS 算法，点划线为基本 RLS 算法。从图中可以看出在信号方向向量出现偏差时，采用鲁棒 RLS 自适应算法可使阵列输出的 SINR 接近最优值，而基本 RLS 算法却存在较大偏差。

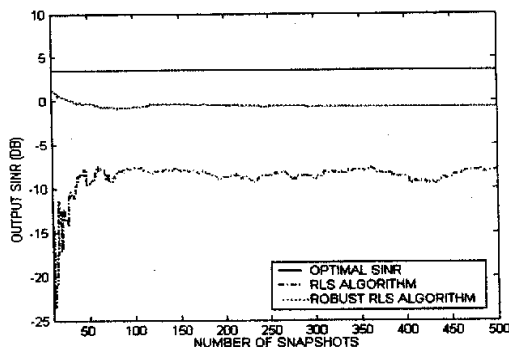


图 4.4 输出的 SINR (3°偏差)

Fig. 4.4 Output SINR to 3° mismatch

4.4 小结

分析了在实际环境中，信号方向向量的偏差对自适应波束形成算法性能的影响，提出了一种鲁棒 RLS 波束形成算法。仿真实验结果表明，鲁棒 RLS 波束形成算法具有如下特点：

- (1) 收敛速度快、误差小、抗扰动性强；

(2) 由于考虑了信号方向向量的偏差, 极大地改善了 RLS 算法的归一化偏差, 而且对幅度较大的扰动, 系统有较强的鲁棒性;

(3) 有效地改善了阵列输出的信干噪比。

因此有效地解决了在偏差存在的情况下, 波束形成算法的有效性和稳定性的问题。

第五章 具有鲁棒约束 LMS 波束形成器

约束 LMS 算法在保证信号到来方向上无失真响应的同时,使阵列输出的干扰和噪声功率为最小。但在实际应用中,由于信源波阵面的失真、信源的多径传播、多径干扰等因素带来的阵列模型误差,使得信号方向向量出现偏差。不精确的信号方向向量及数目小的采样样本都会导致约束 LMS 算法的性能下降。针对上述原因造成的偏差,本文提出了一种鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法。该算法不仅对信号方向向量的偏差和采样样本数目的变化具有很好的鲁棒性,而且收敛速度快、阵列输出的信干噪比接近最优值。仿真实验表明,鲁棒约束 LMS 算法的性能明显优于约束 LMS 算法^[54]。

5.1 信号模型

考虑各向同性的 M 个阵元的均匀线阵,阵元间距为 d ,期望信号到来方向是 θ_0 ,有 $D-1$ 个干扰源,到来方向分别为 $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-1}\}$,自适应波束形成的结构如图 4.1 所示。各个信源在基准点的复包络表示为 $s_i(t)$,则第 l 个阵元端接收的信号为

$$x_l(t) = \sum_{i=0}^{D-1} s_i(t) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} (l-1)d \sin \theta_i} + n_l(t) \quad (5.1)$$

天线阵列的接收向量为

$$\begin{aligned} X(k) &= s_0(k)a + i(k) + n(k) \\ &= s(k) + i(k) + n(k) \end{aligned} \quad (5.2)$$

其中, $X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ 为接收向量; $s_0(k)$ 为期望信号; a 为期望信号的方向向量; $s(k)$ 为期望信号向量; $i(k)$ 为干扰向量; $n(k)$ 为噪声向量。

阵列输出为

$$y(k) = W^H X(k) \quad (5.3)$$

其中, $W = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 为加权向量, $(\cdot)^T$ 表示矩阵的转置, $(\cdot)^H$ 表示矩阵的共轭转置。

阵列输出的信干噪比定义为

$$\text{SINR} = \frac{W^H R_s W}{W^H R_{i+n} W} \quad (5.4)$$

其中,

$$R_s = E\{s(k)s(k)^H\} \quad (5.5)$$

$$R_{i+n} = E\{(i(k) + n(k))(i(k) + n(k))^H\} \quad (5.6)$$

分别为阵列期望信号的自相关阵，干扰和噪声的协方差阵。

5.2 约束 LMS 算法

约束 LMS 算法是一个确定最优加权向量的实时约束算法^[55]，它将一些限制条件（例如在自适应处理期间保持某些主波束特性）加在自适应的加权向量上，即加权向量在每一步迭代时均满足约束条件。

约束最优化问题可归结为以下条件极值问题：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}} \quad & \mathbf{W}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{W}^H \mathbf{a} = 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

其中， $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{X}(k)\mathbf{X}(k)^H\}$ 为接收向量的自相关矩阵。

用拉格朗日乘子法求解式(5.7)的最优加权向量为

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}} \quad (5.8)$$

在实际应用中，用采样的协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i) \quad (5.9)$$

代替 \mathbf{R}_{xx} ，可以分别得出 SMI 算法^[35]和 LSMI 算法^[36]的加权向量

$$\mathbf{W}_{SMI} = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{W}_{LSMI} = \mathbf{R}_{aa}^{-1} \mathbf{a} = (\zeta \mathbf{I} + \hat{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{a} \quad (5.11)$$

其中， ζ 为对角载入因子， \mathbf{I} 为单位矩阵。

采用约束 LMS 自适应算法逼近公式(5.8)的最优加权向量，该约束 LMS 算法描述如下^[55]：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{a}[\mathbf{a}^H \mathbf{a}]^{-1} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \mathbf{a}[\mathbf{a}^H \mathbf{a}]^{-1} \mathbf{a}^H \\ \mathbf{W}(k+1) &= \mathbf{P}[\mathbf{W}(k) - \mu \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}(k)] + \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.12)$$

约束 LMS 算法要求准确给出已知信号的方向向量，而在实际的应用环境中，信号方向向量往往会出现偏差，使得这种自适应算法的性能下降，输出的信干噪比偏离最优值。

5.3 鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法

针对上述问题，基于约束 LMS 算法，本文提出了鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法，该算法对于信号方向向量偏差和采样样本数目小的问

题，具有很好的鲁棒性。

在实际应用中，我们假设信号方向向量偏差为 e

$$\|e\| \leq \varepsilon \quad (5.13)$$

那么，信号的实际方向向量属于集合

$$\Phi(\varepsilon) \triangleq \{b \mid b = a + e, \|e\| \leq \varepsilon\} \quad (5.14)$$

这样，在保证观测信号方向上无失真响应的同时，使输出干扰和噪声的功率为最小，于是约束最优化问题归结为以下的条件极值问题^[38]

$$\begin{aligned} \min_W W^H R_{xx} W \\ \text{subject to } \min_{b \in \Phi(\varepsilon)} |W^H b| \geq 1 \end{aligned} \quad (5.15)$$

可以把式(5.15)的不等式约束转化为等式约束

$$\begin{aligned} \min_W W^H R_{xx} W \\ \text{subject to } W^H a = \varepsilon \|W\| + 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

通过引入拉格朗日乘子 λ ，求得最优加权向量为

$$\begin{aligned} W_{rob} &= -\lambda(R_{xx} + \lambda\varepsilon^2 I - \lambda a a^H)^{-1} a \\ &= \frac{\lambda}{\lambda a^H (R_{xx} + \lambda\varepsilon^2 I)^{-1} a - 1} (R_{xx} + \lambda\varepsilon^2 I)^{-1} a \end{aligned} \quad (5.17)$$

可通过最小化代价函数 $H(W, \lambda)$ 求解最优加权向量

$$H(W, \lambda) = W^H R_{xx} W + \lambda(\varepsilon^2 W^H W - W^H a a^H W + W^H a + a^H W - 1) \quad (5.18)$$

对式(5.18)求梯度得

$$\Gamma(W, \lambda) = (R_{xx} + \lambda\varepsilon^2 I - \lambda a a^H)W + \lambda a \quad (5.19)$$

鲁棒约束 LMS 算法的递推公式为

$$\begin{aligned} W(k+1) &= W(k) - \mu \Gamma(W, \lambda) \\ &= W(k) - \mu[(R_{xx} + \lambda\varepsilon^2 I - \lambda a a^H)W(k) + \lambda a] \end{aligned} \quad (5.20)$$

鲁棒约束 LMS 算法步骤归纳如下：

- (1) 初始化 $W(0)$ ；
- (2) 按公式(5.9)，得出采样的协方差矩阵 \hat{R} ；
- (3) 根据公式(5.20)和公式(5.16)，求出拉格朗日乘子 λ ；
- (4) 把拉格朗日乘子 λ 带入式(5.19)，得出梯度 $\Gamma(W, \lambda)$ ；
- (5) 把求出的梯度带入式(5.20)，求出下一时刻的加权向量；
- (6) 循环 (3) ~ (6)，直至循环结束。

5.4 仿真实验结果

考虑 10 个阵元的等距线阵，阵元间距为半个波长，采样次数为 100，

对于每一点都进行 100 次的仿真实验, 仿真结果如图 5.1—图 5.5 所示。假设期望信号的到达方向为 3° , 两个干扰源的到达方向分别为 30° 和 50° 。

实验一: $\varepsilon=3$, $\zeta=10\sigma^2$, σ^2 为噪声的方差, $\text{INR}=10\text{dB}$, 实际的到达方向为 5° , 即有 2° 的偏差。在图 5.1 中对鲁棒波束形成器(5.17)、SMI 波束形成器(5.10)、LSMI 波束形成器(5.11)的输出信干噪比进行了比较, 可以看出 SMI 波束形成器的性能最差, LSMI 波束形成器的性能有所改善, 而鲁棒波束形成器的输出信干噪比接近最优值。

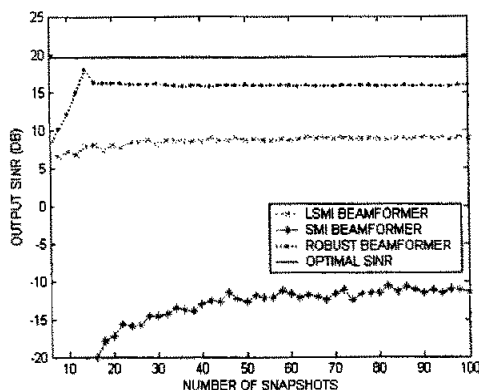


图 5.1 各种算法输出 SINR 的比较
Fig.5.1 Output SINR of these algorithms

实验二: 信号到来方向为 3° , $\text{SNR}=10\text{dB}$, $\varepsilon=1.5$ 。图 5.2 给出了阵列输出 SINR 随采样数目的变化曲线, 而阵列输出的 SINR 随 SNR 的变化曲线在图 5.3 中给出。从实验二可以看出与约束 LMS (CLMS) 算法相比,

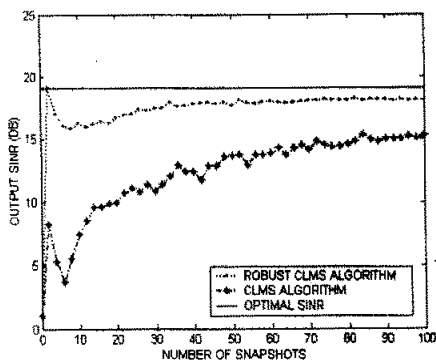


图 5.2 两种算法输出 SINR 的比较
Fig.5.2 Output SINR of two algorithms

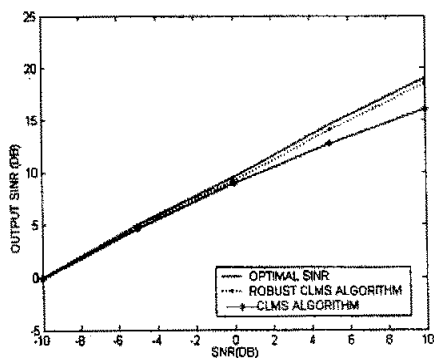


图 5.3 两种算法输出 SINR 的比较
Fig.5.3 Output SINR of two algorithms

本文提出的鲁棒约束 LMS (RCLMS) 自适应波束形成算法的输出信干噪比更接近于最优值, 这表明鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法的性能优于约束 LMS 算法。

实验三: 假设信号实际到来方向有 2° 的偏差, $\text{SNR} = 10\text{dB}$, $\varepsilon = 1.5$ 。图 5.4 给出了阵列输出的 SINR 随采样数目的变化曲线, 而阵列输出的 SINR 随 SNR 的变化曲线在图 5.5 中给出。从实验三可以看出, 在信号方向向量存在偏差的情况下, 约束 LMS (CLMS) 算法的性能比较差, 而鲁棒约束 LMS (RCLMS) 算法对偏差的敏感程度比较低, 在任意的采样数目 N 和输入信噪比(SNR)的情况下, 阵列输出的信干噪比与最优值的偏差比较小。

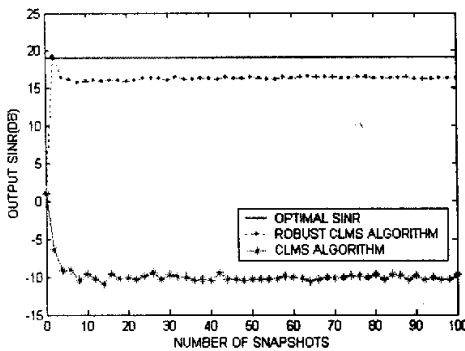


图 5.4 两种算法输出 SINR 的比较
Fig.5.4 Output SINR of two algorithms

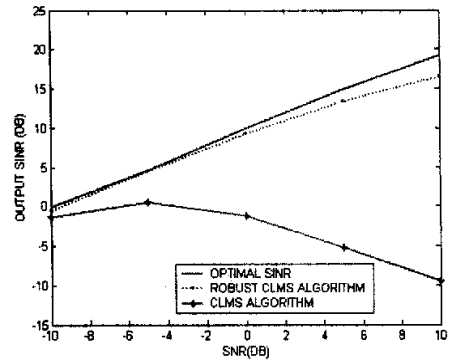


图 5.5 两种算法输出 SINR 的比较
Fig.5.5 Output SINR of two algorithms

5.5 小结

针对约束 LMS 算法在实际应用中存在的弊端, 提出了一种鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法, 并对其性能进行了分析。鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法具有如下特点:

- (1) 收敛速度快、误差小、抗扰动性强;
- (2) 采用的鲁棒波束形成器可以看作是对角载入的方法;
- (3) 鲁棒约束 LMS 自适应波束形成算法, 对各种原因引起的偏差有很强的鲁棒性;
- (4) 阵列输出的信干噪比接近最优值。

仿真实验结果表明: 鲁棒约束 LMS 算法不仅对于偏差和小样本具有很强的鲁棒性, 而且该算法的性能明显优于约束 LMS 算法。

第六章 结论

伴随社会信息化的迅速发展,无线移动通信的服务需求以爆炸式的速率在递增。移动通信装置将成为人们生活中不可缺少的一部分,安装在车辆、船只、飞行器、卫星和无线基站上的天线阵列将扮演一个特别重要的角色。自适应阵列信号处理作为一个研究方向具有很大的社会效益和经济效益。

自适应阵列信号处理的主要内容包括波束形成技术、DOA 估计技术和信道设计技术等。在实际应用过程中,由于传播环境、信源、传感器阵列等诸多条件的复杂变化,引起信号方向向量的偏差,导致现存的自适应波束形成器的性能下降,而且自适应波束形成器对在实际环境中存在的小偏差也十分敏感。因此,在最近的十几年,鲁棒自适应波束形成器的设计引起了众多研究者的兴趣,鲁棒波束形成技术在实际应用中也发挥着重要作用。本文以线性阵列天线作为研究对象,尝试将近些年新兴的数字信号处理技术应用到阵列信号处理中,结合传统波束形成算法,提出了一些鲁棒自适应波束形成算法。这些算法的性能明显优于其它算法。

➤ 本文的主要工作:

(1) 对自适应阵列信号处理的研究现状进行了概述;建立了阵列信号处理的模型,并介绍了自适应控制算法的性能量度。

(2) 对自适应阵列信号处理算法进行总结,其中包括波束形成分类、常见的波束形成器、权重更新和到来方向 DOA 估计算法。在权重更新算法中,着重介绍了最小均方 LMS 算法。

(3) 对鲁棒波束形成算法进行了研究,简要介绍了影响阵列鲁棒性的因素,总结了近些年学者们所提出的鲁棒波束形成算法。

(4) 对基本递推最小二乘 RLS 算法进行了研究,简要介绍了递推最小二乘 RLS 算法和鲁棒波束形成算法的思想,提出了鲁棒 RLS 自适应波束形成算法。仿真实验结果表明,鲁棒 RLS 自适应算法具有收敛速度快、误差小、抗扰动性强等优点。由于该算法考虑了信号方向向量的偏差,极大地改善了 RLS 算法的归一化偏差,而且对幅度较大的扰动,系统有较强的鲁棒性,并且有效地改善了阵列输出的信干噪比。合理的解决了在方向向量有偏差的情况下,波束形成算法的有效性和稳定性的问题。

(5) 对基于训练数据的最小均方 LMS 算法进行了研究,简要介绍了约束 LMS 算法和鲁棒波束形成算法的思想,提出了鲁棒约束 LMS 自适应

波束形成算法, 并通过仿真验证了该算法的有效性。仿真实验结果表明: 鲁棒约束 LMS 算法不仅对于偏差和小样本具有很强的鲁棒性, 而且该算法的其它性能明显优于约束 LMS 算法。

➤ 展望

除了本文研究的鲁棒波束形成算法以外, 近些年还出现了很多其它的热门方向, 其中包括神经网络方法、小波域的多分辨率阵列信号处理、基于高阶量的阵列信号处理、盲信号分离、多输入多输出 MIMO 系统。

1. 神经网络方法

神经网络具有很强的容错和逼近能力, 易于并行实现, 近年来在阵列信号处理领域引起了人们的广泛注意。许多神经网络方法已经成功应用于波束形成技术, 如多层感知器方法^[56], Hopfield 方法^[57], 径向基函数网络方法^[58], 主元分析网络方法^[59], 模糊神经网络方法^[60]等。

2. 小波域的多分辨率阵列信号处理方法

小波包理论可以在很少数据量时得到高分辨率的估计值, 甚至取原数据量的十分之一仍能提高分辨率; 由于正交小波包分解可以消除模式之间的干扰, 因此提高了估计的性能。基于小波包理论的优点出现了许多新的分析理论, 如文献[61]提出了小波包理论的高分辨率谱分析方法。

3. 多输入多输出 MIMO 系统

无线通信领域的多输入多输出(即 MIMO)技术虽然出现仅短短几年时间, 但是已经广泛渗透到宽带无线接入、无线局域网(WLAN)和第三代移动通信网络, 成为现代通信的一个重要的技术突破, 它代表了无线通信系统设计方法的巨大变化, 这一变化反映了我们如何看待一个无线通信系统中的多径问题^[62]。空时信号处理是 MIMO 的一个核心概念^[63]。通过在空间上使用多个分布天线利用了空间维, 并在时间上进行补偿, MIMO 可以看作利用天线阵列来提高无线传输质量的智能天线的扩展, 通过在发送端和接收端各设置多重天线来提高空间分集效应, 克服电波衰落的不良影响。因此 MIMO 系统的特点是将多径(一般认为是无线传输中的不利因素)变为有利因素, 它有效使用随机衰落及多径时延扩展, 加倍提高传输速率, 而无需增加额外的频谱。

参考文献

- [1] 石镇. 自适应天线原理[M]. 北京: 国防工业出版社. 1991, 16-18.
- [2] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(7): 67-94.
- [3] Liu T H, Mei J M. A space-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics [J]. IEEE Trans SP, 2001 (49): 1605-1613.
- [4] 汪晋宽, 顾德英. 空间自适应信号处理[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
- [5] 刘志刚. 空间信号参数辨识的研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2004.
- [6] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Trans AP, 1986, 34(3): 276-280.
- [7] Kundu D. Modified MUSIC algorithm for estimating DOA of signals [J]. Signal Processing, 1996, 50: 39-55.
- [8] Charge P, Wang Y, and Sillard J. An extended cyclic MUSIC algorithm [J]. IEEE Trans SP, 2003, 51(7): 1695-1701.
- [9] Roy R, Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Trans ASSP, 1989, 37(7): 984-995.
- [10] Veen V D. Algebraic Methods for Deterministic Blind Beamforming [J]. Proc. IEEE, 1998, 86(10): 1987-2008.
- [11] Widrow B, Stearns S. Adaptive Signal Processing [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1985, 1-30.
- [12] Tsympkin Y Z. Foundation of the theory of searching systems [C]. Academic. New York, 1973.
- [13] Nagumo J I, Noda A. A learning method for system identification [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, AC-12: 282-287.
- [14] Nitzberg R. Application of the normalized LMS algorithm to MSLC [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1985, AES-21: 79-91.
- [15] Bershad N J. Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs [J]. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1986, ASSP-34: 793-806.
- [16] Slock D T M. On the convergence behavior of the LMS and the normalized LMS algorithms [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41: 2811-2825.
- [17] Rupp M. The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41:

- 1149-1160.
- [18] Barrett M, Arnott R. Adaptive antennas for mobile communications [J]. Electron. Commun. Eng. J., 1994, 6: 203-214.
- [19] Frost III O L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing [J]. Proc. IEEE, 1972, 60: 926-935.
- [20] Cantoni A. Application of orthogonal perturbation sequences to adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1980, AP-28: 191-202.
- [21] Godara L C, Cantoni A. Analysis of the performance of adaptive beamforming using perturbation sequences [J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1983, AP-31: 268-279.
- [22] Godara L C, Gray D A. A structure gradient algorithm for adaptive beamforming [J]. J. Acoust. Soc. Amer., 1989, 86: 1040-1046.
- [23] Godara L C. Improved LMS algorithm for adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1990, 38: 1631-1635.
- [24] Horowitz L J, Blatt H, Brodsky W G, Sene K D. Controlling adaptive antenna arrays with the sample matrix inversion algorithm [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst., 1979, 15(6): 840-847.
- [25] Carayannis G, Kakoupsidis N, Manolakis N. Fast recursive algorithms for a class of linear equations [J]. IEEE Trans ASSP, 1982, 30(2): 227-239.
- [26] Carayannis G, Manolakis N, Kakoupsidis N. A fast sequential algorithm for least squares filtering and prediction [J]. IEEE Trans ASSP, 1983, 31(6): 1394-1402.
- [27] Treichler J R and Agee B G. A new approach to multipath correction of constant modulus signals [J]. IEEE Trans ASSP, 1983, 31(3): 459-472.
- [28] Shynk J J, Chan C K. Performance surfaces of the constant modulus algorithm based on a conditional Gaussian model [J]. IEEE Trans SP. 1993, 41(5): 1965-1969.
- [29] Widrow B, Lehr M A. 30 years of adaptive neural networks: perception madaline, and back propagation [J]. Proc. IEEE, 1990, 78(9): 1415-1442.
- [30] Lau C, Widrow B, Eds. Special issue on neural networks [J]. Proc. IEEE, 1990, 78(9): 1411-1414.
- [31] Gelenbe E, Barhen J. Special issue on artificial neural network applications [J]. Proc. IEEE, 1996, 84(10).
- [32] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000, 326-331.
- [33] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000, 332-335.
- [34] Vorobyov S A, Gershman A B, Luo Z Q. An application of second-order cone

- programming to robust adaptive beamforming [C]. in Proc. 5th Int. Conf. Optim. Techn. Applicat., Hong Kong, 2001.
- [35] Reed I S, Mallet J D, Brennan L E. Rapid convergence rate in adaptive arrays [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1985, AES-10 (11): 853-863.
- [36] Cox H, Zeskind R M, Owen M H. Robust adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Acoust., speech, signal processing, 1987, ASSP-35(10): 1365-1376.
- [37] Chang L, Yeh C C. Performance of DMI and eigenspace-based beamformers [J]. IEEE Trans. Antennas Propagat., 1992, 40(11): 1336-1347.
- [38] Vorobyov S A, Gershman A B and Luo Z Q. Robust adaptive beaming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, 51(2): 2257-2269.
- [39] Bell K L, Ephraim, Van Trees H L. A Bayesian approach to robust adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2000, 48(2): 386-398.
- [40] Agrawal M, Prasad S. Robust Adaptive Beamforming for Wide-Band, Moving, and Coherent Jammers via Uniform Linear Arrays [J]. IEEE Trans. Antennas Propagation, 1999, 47(8): 1267-1275.
- [41] Li J, Stoica P, Wang Z W. On robust capon beamforming and diagonal loading [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, 51(7): 1702-1715.
- [42] Shahbazpanahi S, Gershman A B, Luo Z Q, *et al.* Robust adaptive beamforming for general-rank signal models [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, 51(9): 2257-2269.
- [43] Brennan L E, Mallet J D, Reed I S. Adaptive arrays in airborne MTI radar [J]. IEEE Trans. Antennas Propagation, 1976, 24(9): 607-615.
- [44] Krolik J L. The performance of matched-field beamformers with Mediterranean vertical array data [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(10): 2605-2611.
- [45] Gorodetskaya E Y, Malekhanov A I, Sazontov A G, *et al.* Deep-water acoustic coherence at long ranges: Theoretical prediction and effects on large-array signal processing [J]. IEEE J. Ocean. Eng., 1999, 24 (4): 156-171.
- [46] 汪晋宽, 刘志刚, 薛延波, 等. 4 阶量算法在盲波束形成上的应用[J]. 东北大学学报, 2003, 24(9): 900-902.
- [47] 汪晋宽, 薛延波, 刘志刚, 等. DOA 估计方法的探讨[J]. 控制与决策, 2003, 18: 57-59.
- [48] Monzingo R A, Miller T W. Introduction to Adaptive Arrays. New York: Wiley, 1980.

- [49] Carlson B D. Covariance matrix estimation errors and diagonal loading in adaptive arrays [J]. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., 1988, 24(7): 397-401.
- [50] Guerci J R. Theory and application of covariance matrix tapers for robust adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(4): 985-997.
- [51] Song X, Wang J K, Wang H. Robust RLS adaptive beamforming algorithm [C]. ISCIT 2004, Japan, 2004, 238-241.
- [52] 张贤达, 保铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000, 265-267.
- [53] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995, 146-151.
- [54] Song X, Wang J K, Wang H. Robust constrained-LMS adaptive beamforming algorithm [C]. TENCON 2004, Thailand, 2004, 479-482.
- [55] Godara L C. Application of antenna arrays to mobile communication, Part II: Beam-forming and direction-of-arrival considerations [J]. Proc. IEEE, 1997, 85 (8): 1213-1216.
- [56] Suksmono A B, Hirose A. Adaptive beamforming by using complex-valued multiplayer perceptron [M]. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag Heidelberg, 2003, 959-966.
- [57] Leung H, Quach B, Lo T, Litva J. A chaotic neural beamformer for wireless communication [C]. Proceedings of the IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers, and Signal Processing, Victoria, BC, Canada, 1995, 5: 538-541.
- [58] Du K L, Cheng K K M, Swamy M N S. A fast neural beamformer for antenna arrays [C]. IEEE International Conference on Communications, New York City, 2002, 139-144.
- [59] Fiori S. Neural minor component analysis approach to robust constrained beamforming [J]. IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing, 2003, 150(4): 205 - 218.
- [60] Akhmetov D F, Dote Y, Ovaska S J. Fuzzy neural network with general parameter adaptation for modeling of nonlinear time-series [J]. IEEE Trans. Neural Networks, 2001, 12(1): 148-152.
- [61] Lambrecht C B, Karrakhou M. Wavelet packets-based high-resolution spectral estimation [J]. Signal Processing. 1995, 47(11): 135-144.
- [62] Gorokhov A, Gore D A, Paulraj A J. Receive antenna selection for MIMO spatial multiplexing: theory and algorithm [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2003, 51(11): 2796-2807.

-
- [63] Gesbert D, Shafi M, Smith P J, et al. From theory to practice: an overview of MIMO space-time coded wireless systems [J]. Proc. IEEE, 2003, 21(3): 281-299.

在校期间发表的论文

- [1] Song X, Wang J K, Wang H. Robust constrained-LMS algorithm [C]. ISSN2004, Dalian city, 2004, 8: 344-349.
- [2] Song X, Wang J K, Wang H. Robust RLS adaptive beamforming algorithm [C]. ISCIT 2004, Japan, 2004, 10: 238-241.
- [3] Song X, Wang J K, Wang H. Robust constrained-LMS adaptive beamforming algorithm [C]. TENCON 2004, Thailand, 2004, 11: 479-482.
- [4] Wang J K, Wang H, Song X. Azimuth/elevation angle estimation via TST-ESPRIT technique [C]. TENCON 2004, Thailand, 2004, 11: 536-566.
- [5] 宋昕, 汪晋宽, 王晗, 张建林. 一种鲁棒约束 LMS 算法[C]. 电子学会第十届青年学术会议, 2004, 9: 27-30.
- [6] 张建林, 汪晋宽, 宋昕. 平面阵的 DOA 估计[C]. 电子学会第十届青年学术会议, 2004, 9: 35-38.
- [7] 王晗, 汪晋宽, 韩英华, 宋昕. 一种基于 L 型阵列的方向—频率联合估计方法[C]. 电子学会第十届青年学术会议, 2004, 9: 23-26.

致 谢

本文的工作是在导师汪晋宽教授的悉心指导下完成的。两年多来，导师不仅在理论方面给了我很多的指导和帮助，而且在生活中也给了我无微不至的关怀。对我影响最深的是导师高瞻远瞩的见解、忘我的工作热情、智慧幽默的言谈和豁达包容的为人。

感谢实验室共同奋斗的同学们，谢谢大家所给予的每一份鼓励，每一条意见。

最后我要深深的感谢我的家人，是他们的支持、鼓励和关怀才使我的研究生阶段的学业得以顺利完成。

再次对关心我的人表示深深的感谢！

个人简历

1978年9月生于吉林省通化市,1998年9月考入东北大学秦皇岛分校自动化工程系,2002年7月获得工学学士学位,同年9月考入东北大学信息科学与工程学院控制理论与控制工程专业攻读硕士至今。