习题1-1

1. 指出下列命题哪些正确，哪些不正确？

(1) $A\cup B = A\bar{B}\cup B$.

解：$A\cup B = A\bar{B}\cup AB\cup \bar{A}B = A\bar{B}\cup[(A\cup\bar{A})B] = A\bar{B}\cup B$. 所以正确.

(2) $A = A\bar{B}\cup AB$.

解：$A = A\Omega = A(B\cup\bar{B}) = A\bar{B}\cup AB$. 所以正确.

(3) $\bar{A}B = A\cup B$.

解：由(1)的推导可知 $A\cup B = A\cup\bar{A}B$，所以 $\bar{A}B \ne A\cup B$，原命题不正确.

(4) $(\overline{A\cup B})C = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

解：$(\overline{A\cup B})C = \bar{A}\bar{B}C \ne \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. 原命题不正确.

(5) $(AB)(A\bar{B}) = \phi$.

解：$(AB)(A\bar{B}) = A(B\bar{B}) = A\phi = \phi$. 所以命题正确.

(6) 若 $A\subset B$，则 $A = AB$.

解：若 $A\subset B$，则 $A\bar{B} = \phi$. $A = A\Omega = A(B\cup\bar{B}) = AB\cup A\bar{B} = AB\cup\phi = AB$. 所以命题正确.

(7) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B = A$.

解：$\because$ $A\cup B = A\cup\bar{A}B$，要 $A\cup B = A$，则 $\bar{A}B = \phi$，而若 $A\subset B$，则 $\bar{A}B\ne\phi$. 所以原命题不正确.

(8) 若 $A\subset B$，则 $\bar{B}\subset\bar{A}$.

解：若 $A\subset B$，则 $A\bar{B} = \phi$，由 $\bar{B} = \bar{B}\Omega = \bar{B}(A\cup\bar{A}) = \bar{B}A\cup\bar{B}\bar{A} = \phi\cup\bar{B}\bar{A}$ $= \bar{B}\bar{A}\subset\bar{A}$. 所以原命题正确.

(9) 若 $AB = \phi$，则 $\bar{A}\bar{B}\ne\phi$.

解：当 $AB = \phi$ 时，若 $A\cup B = \Omega$，则 $\bar{A}\bar{B} = \phi$，所以命题不正确.

(10) 若 $AB = \phi$，则 $\bar{A}\bar{B} = \phi$.

解：当 $AB = \phi$ 时，若 $A\cup B\ne\Omega$，则 $\bar{A}\bar{B}\ne\phi$，所以命题不正确.

2. 在分别标有号码1~8的八张卡片中任抽一张，设事件A为“抽得一张标号不大于4的卡片”，事件B为“抽得一张标号为偶数的卡片”，事件C为“抽得一张标号为能被3整除的卡片”.

(1) 试写出试验的样本点和样本空间.

解：记 ω_i = “标号为 i 的卡片”，$i=1,2,3,4,5,6,7,8$，为试验的样本点，样本空间 $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8\}$.

(2) 试将下列事件表示为样本点的集合，并说明分别表示什么事件？

(a) AB，(b) $A\cup B$，(c) $\bar{B}$，(d) $A-B$，(e) $\overline{BC}$，(f) $\overline{B\cup C}$.

解：$A = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，$B = \{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}$，$C = \{\omega_3,\omega_6\}$.

(a) $AB = \{\omega_2,\omega_4\}$ = “抽得一张标号不大于4，且为偶数的卡片”.

(b) $A\cup B = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}$ = “抽得一张标号不大于4，或者为

偶数的卡片".

(c) $\overline{B}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7\}$="抽得一张标号不是偶数(标号为奇数)的卡片".

(d) $A-B=\{\omega_1,\omega_3\}$="抽得一张标号不大于4,但不是偶数的卡片".

(e) $\overline{BC}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$="抽得的一张标号不能为被3整除的偶数(即除标号为6的卡片外)的卡片".

(f) $\overline{B\cup C}=\{\omega_1,\omega_5,\omega_7\}$="抽得一张标号既不是偶数,又不是能被3整除的卡片"(用$\overline{B}\,\overline{C}$作解释).

3. 将下列事件用A,B,C表示出来:

(1) 只有A发生.

解: $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) A不发生,但B、C至少有一发生.

解: $\overline{A}\cdot(B\cup C)$.

(3) 三个事件恰有一个发生.

解: $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(4) 三个事件至少有两个发生.

解 $AB\cup AC\cup BC$ (注: AB 即 $ABC\cup AB\overline{C}$. 其余同理)

或者为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

(5) 三个事件都不发生,

解: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(6) 三个事件最多有一个发生.

解: 即至少有两个事件不会发生. $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$.

(7) 三个事件不都发生.

解: 不都发生意味着至少有一个不发生. 故为$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(8) 三个事件至少有一个发生.

解: $A\cup B\cup C$.

4. 设$\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$, $A=\{2,3,5\}$, $B=\{3,5,7\}$, $C=\{1,3,4,7\}$

求下列事件: (1) $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$; (2) $\overline{A(\overline{BC})}$.

解: (1) $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=A\cup B=\{2,3,5,7\}$.

(2) $\overline{A(\overline{BC})}=\overline{A}\cup(\overline{\overline{BC}})=\overline{A}\cup(BC)$

$\overline{A}=\{1,4,6,7,8,9,10\}$, $BC=\{3,7\}$.

$\therefore\ \overline{A(\overline{BC})}=\overline{A}\cup(BC)=\{1,3,4,6,7,8,9,10\}$.

习题 1－2

1. 已知 $P(A\cup B)=0.8$，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$．求 $P(AB)$，$P(\bar{A}\bar{B})$，$P(\bar{A}\cup\bar{B})$．

解：$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.6-0.8=0.3$；

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$；

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.3=0.7$．

2.* 已知 $P(A)=0.6$．$P(B)=0.7$．求 $P(AB)$ 的最大值和最小值．

解，$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$．

$\because$ $P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$．故 $P(A\cup B)\neq 0$．注意到 $P(A)<P(B)$．故当 $A\subset B$ 时 $P(A\cup B)=P(B)$．则 $P(AB)=P(A)=0.6$ 取到最大值；而当 $P(A\cup B)=1$ 即 $A\cup B=\Omega$ 时，$P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.3$ 取到最小值．

3. 已知 $P(A)=x$；$P(B)=2x$．$P(C)=3x$．$P(AB)=P(BC)$，求 x 的最大值．

解，$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$．　(*)

当 $A\cup B\cup C=\Omega$，且 $A\subset B$．$A\subset C$ 时．有 $AB=BC=AC=ABC$．

则 (*) 式为 $1=x+2x+3x-x-x-x+x$，即 $4x=1$．

$\therefore$ $x=\frac{1}{4}$ 时取到最大值．

4. 设 $P(A)>0$，$P(B)>0$．将下列四个数 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A\cup B)$，$P(A)+P(B)$ 按由小到大的顺序排列．用符号 $\leqslant$ 联系它们，并指出在什么情况下可能有等式成立？

解：顺序为 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

当 $A\subset B$ 时．$P(AB)=P(A)$；当 $B\subset A$ 时．$P(A)=P(A\cup B)$．

当 $AB=\phi$ 时．$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

习题 1－3

1. 电话号码由六个数字组成，每个数字可以是 0, 1, 2, …, 9 中的任一数，(但第一数字不能为 0)。求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率。

解：记 A＝"电话号码由完全不相同的数字组成"

$$P(A)=\frac{9\cdot A_9^5}{9\cdot 10^5}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^5}=0.1512.$$

(注) 记 A_i＝"电话号码的第 i 个数字"，$i=1,2,\cdots,6$

利用 §1.4 乘法公式：

$$P(A)=P(A_1A_2\cdots A_6)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5)$$

$$=\frac{9}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{10}=0.1512.$$

2. 在 11 张卡片分别写上 Probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果是 ability 的概率。

解：记 A＝"排列结果是 ability"。

$$P(A)=\frac{A_2^1A_2^2}{A_{11}^7}=\frac{1}{415800}$$

(注) 在 A 事件的样本点中，a, l, t, y 都仅一张卡片，b, i 各有两张，因此共有 $A_1^1A_2^1A_2^2A_1^1A_1^1A_1^1$ 即 $A_2^1A_2^2$ 个点。本题也可用乘法公式解。

3. 随机地将 15 名新生平均分配到三个班级中去，这 15 名新生中有 3 名运动员，问 (1) 每个班级各分配到一名运动员的概率是多少？(2) 3 名运动员被分配到同班级的概率是多少？

解：(1) 记 A＝"各班分配到一名运动员"。

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{12}^4\cdot C_2^1C_8^4}{C_{15}^5C_{10}^5}\ \left(\text{或}=\frac{A_{12}^{12}\cdot A_3^3(C_5^1)^3}{A_{15}^{15}}\right)，\text{得 } P(A)=\frac{25}{91};$$

(2) 记 B＝"3 名运动员分配到同班级"。

$$P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_{12}^2C_3^3\cdot C_{10}^5}{C_{15}^5C_{10}^5}\ \left(\text{或}=\frac{A_{12}^{12}\cdot A_3^3\cdot C_3^1C_5^3}{A_{15}^{15}}\right)，\text{得 } P(B)=\frac{6}{91}.$$

4. 某工厂生产的一批产品共 100 个，其中有 5 个次品，从这批产品中任取一半来检查，求取到的次品不多于一个的概率。

解：记 A＝"取到的次品不多于 1 个"。

$$P(A)=\frac{C_{95}^{50}C_5^0+C_{95}^{49}C_5^1}{C_{100}^{50}}=\frac{\frac{95!}{50!45!}+\frac{95!\cdot 5}{49!46!}}{\frac{100!}{50!50!}}=0.181.$$

5. 袋内放有 2 个伍分的钱币，3 个贰分的钱币，5 个壹分的钱币，任取其中 5 个，求总数超过一角的概率

解：记 A＝"5个钱币总数超过一角"．

$$P(A)=\frac{1}{C_{10}^5}[C_2^1C_3^2C_5^2+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^2C_3^0C_5^3+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^3C_5^0]$$
$$=0.5.$$

6．一学生宿舍有6名学生，问：(1) 6人生日都在星期天的概率是多少？(2) 6人的生日都不在星期天的概率是多少？(3) 6人的生日不都在星期天的概率是多少？

解：(1) 记 A＝"6人生日都在星期天"．

$P(A)=\frac{1}{7^6}$．（注：可利用相互独立事件的积事件的概率公式：记 A_i＝"第 i 人生日在星期天"，$i=1,2,3,4,5,6$ 相互独立，且 $P(A_i)=\frac{1}{7}$，$i=1,\cdots,6$．则 $P(A)=P(A_1A_2\cdots A_6)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_6)=(\frac{1}{7})^6$．）

(2) 记 B＝"6人生日都不在星期天"．

$P(B)=(\frac{6}{7})^6$．（注：记 B_i＝"第 i 人生日不在星期天"，$P(B_i)=\frac{6}{7}$，$i=1,\cdots,6$ 相互独立．则 $P(B)=P(B_1B_2\cdots B_6)=P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_6)=(\frac{6}{7})^6$．）

(3) 记 C＝"6人的生日不都在星期天"．

$P(C)=1-P(\bar{C})=1-P(A)=1-(\frac{1}{7})^6$．

7．在 1～100 共一百个数中任取一个数，求这个数能被 3 或 5 整除的概率．

解：记 A＝"这个数能被 3 或 5 整除"．

在 1～100 中能被 3 整除的数共有 $[\frac{100}{3}]=33$ 个；能被 5 整除的共 $[\frac{100}{5}]=20$ 个；能被 3×5 整除的共有 $[\frac{100}{15}]=6$ 个．故

$$P(A)=\frac{1}{100}[33+20-6]=\frac{47}{100}=0.47.$$

8．设袋中有 5 个白球与 4 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不放回去，求 (1) 第二次才取得白球的概率；(2) 第二次取得白球的概率．

解：(1) 记 A＝"第二次才取得白球"．

这表明第一次取得的是黑球，第二次取得的是白球．故

$$P(A)=\frac{A_4^1A_5^1}{A_9^2}=\frac{5}{18}.$$

（注：可用§1.4的乘法公式：记 A_i＝"第 i 次取得白球"，$i=1,2$．

$P(A)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)=\frac{C_4^1}{C_9^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_8^1}=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{18}$）．

(2) 记 B＝"第二次取得白球"．

这表明第一次取得的可能是白球，也可能是黑球．因此可直

接利用例6的结论，这里取 $a=5$，$b=4$. 故 $P(B)=\frac{5}{5+4}=\frac{5}{9}$.

直接计算则有 $P(B)=\frac{A_5^1\cdot A_8^1}{A_9^2}=\frac{5}{9}$.

（注：记 A_i=“第 i 次取出白球”，$i=1,2$.

则 $P(A)=P(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2)=P[(A_1\cup\bar{A}_1)\cdot A_2]=P(A_2)=\frac{5}{9}$.

或 $P(A)=P(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)=P(A_1)P(A_2/A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)$

$=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$. 此式为全概率公式）

9. 猎人在距离100米处射击一动物，击中的概率为0.6，如果第一次未击中，则进行第二次射击，但由于动物逃跑而使距离变为150米；如果第二次又未击中，则进行第三次射击，这时距离变为200米. 假如击中的概率与距离成反比. 求猎人击中动物的概率.

解：记 A=“猎人击中动物”，又记 A_i=“猎人第 i 次击中动物”，$i=1,2,3$.

由题意可得：$P(A_1)=0.6$；$P(A_2/\bar{A}_1)=\frac{100}{150}\times 0.6=0.4$；

$P(A_3/\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{150}{200}\times 0.4=0.3$.

$\therefore P(A)=P\{A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\}$

$=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$=0.6+0.4\times 0.4+0.4\times 0.6\times 0.3=0.832$.

（注：A_1，$\bar{A}_1A_2$，$\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 是互斥事件，显然可见

$A_1(\bar{A}_1A_2)=(A_1\bar{A}_1)A_2=\phi$,

$A_1(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=(A_1\bar{A}_1)\bar{A}_2A_3=\phi$.

$(\bar{A}_1A_2)(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=(A_2\bar{A}_2)\bar{A}_1A_3=\phi$.

习题1－4

1 玻璃杯成箱出售，每箱20只，假设各箱含0,1,2只残次品的概率相应为0.8, 0.1和0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时售货员随意取一箱，而顾客随机地察看4只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：(1) 顾客买下该箱的概率 α；(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

解：设 B_i = "一箱玻璃杯中有 i 只残次品"， $i=0,1,2$，

$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$.

又设 A = "该箱通过察看4只无残次品".

$$P(A/B_0)=1,\quad P(A/B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},\quad P(A/B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

(1) $$\alpha=P(A)=P(B_0)P(A/B_0)+P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)$$
$$=\frac{4}{5}\times 1+\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{12}{19}=\frac{448}{475}=0.9432$$

(2) $$\beta=P(B_0/A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A/B_0)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{5}\times 1}{448/475}=\frac{95}{112}=0.8482.$$

2. 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是0.03，第二台出现废品的概率是0.02，加工的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍. 求：(1) 任意取出的零件是合格的概率；(2) 如果任意取出的零件是废品，求它是第二台车床加工的概率.

解：设 B_i = "第 i 台车床加工的零件"， $i=1,2$

$P(B_1)=\frac{2}{3}$，$P(B_1)=\frac{1}{3}$.

又设 A = "任取出来的零件是合格的".

$P(A/B_1)=1-P(\bar{A}/B_1)=1-0.03=0.97$;

$P(A/B_2)=1-P(\bar{A}/B_2)=1-0.02=0.98$.

(1) $P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=0.973$.

(2) $$P(B_2/\bar{A})=\frac{P(\bar{A}B_2)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B_2)\,P(\bar{A}/B_2)}{1-P(A)}=\frac{P(B_2)(1-P(A/B_2))}{1-P(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}\times(1-0.98)}{1-0.973}=\frac{0.2/3}{0.027}=0.25.$$

3. 为防止意外，某矿井内同时设有两种报警系统A与B，每种系统单独使用时，其有效运行的概率，系统A为0.92，系统B为0.93，而在A失灵的条件下B有效的概率为0.85. 求：

(1) 发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(2) B失灵条件下，A有效的概率．

解：已知 $P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B/\bar{A})=0.85$．

(1) $P\{$两系统至少有一个有效$\}=P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(B/\bar{A})=1-[1-P(A)][1-P(B/\bar{A})]$

$=1-(1-0.92)(1-0.85)=0.988$．

(2) $P\{B$失灵条件下A有效$\}=P(A/\bar{B})=1-P(\bar{A}/\bar{B})=1-\dfrac{P(\bar{A}\cdot\bar{B})}{P(\bar{B})}$

$=1-\dfrac{(1-P(A))(1-P(B/\bar{A}))}{1-P(B)}=1-\dfrac{(1-0.92)(1-0.85)}{1-0.93}=0.829$．

4. 一批电子元件中，甲类的占80%，乙类的占12%，丙类的占8%．三类元件的使用寿命能达到指定要求的概率依次为0.9，0.8和0.7．今任取一个元件，求其使用寿命达到指定要求的概率．

解 设 B_i＝"一批 i 类的电子元件"，i＝甲、乙、丙．

$P(B_甲)=0.8$，$P(B_乙)=0.12$，$P(B_丙)=0.08$

又 A＝"元件使用寿命达到指定要求"

$P(A/B_甲)=0.9$，$P(A/B_乙)=0.8$，$P(A/B_丙)=0.7$．

则 $P(A)=P(B_甲)P(A/B_甲)+P(B_乙)P(A/B_乙)+P(B_丙)\cdot P(A/B_丙)$

$=0.8\times0.9+0.12\times0.8+0.08\times0.7=0.872$．

5. 甲袋中有3只白球4只红球，乙袋中有5只白球，2只红球，从甲袋中任取2球投入乙袋，再从乙袋中任取2球，求最后取出的两只球全是白球的概率．

解 设 B_{ij}＝"从甲袋中取出 i 只白球，j 只红球共2球"．

$i=0,1,2$．$j=0,1,2$．$i+j=2$．

$P(B_{20})=\dfrac{C_4^0C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$，$P(B_{11})=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_7^2}=\dfrac{4}{7}$，$P(B_{02})=\dfrac{C_4^2C_3^0}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$．

又 A＝"从乙袋中取出2只白球"

$P(A/B_{20})=\dfrac{C_7^2C_2^0}{C_9^2}=\dfrac{7}{12}$，$P(A/B_{11})=\dfrac{C_6^2C_3^0}{C_9^2}=\dfrac{5}{12}$，$P(A/B_{02})=\dfrac{C_5^2C_4^0}{C_9^2}=\dfrac{5}{18}$．

$\therefore P(A)=P(B_{20})P(A/B_{20})+P(B_{11})P(A/B_{11})+P(B_{02})\cdot P(A/B_{02})$

$=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{7}{12}+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{5}{12}+\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{5}{18}=0.4008$．

习题 1-5

1.* (1) 设 A, C 独立，B, C 独立，A, B 互斥，证明：$A\cup B$ 与 C 独立。

证：$\because P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AB)=0$，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

由 $P[(A\cup B)C]=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)$

$=(P(A)+P(B))P(C)=P(A\cup B)\cdot P(C)$。$\therefore A\cup B$ 与 C 独立。

(2) 设 A, B, C 独立，证明：$A\cup B$ 与 $\bar{C}$ 独立。

证：$P[(A\cup B)\bar{C}]=P(A\bar{C}\cup B\bar{C})=P(A\bar{C})+P(B\bar{C})-P(AB\bar{C})$

由 $P(A\bar{C})=P(A)-P(AC)$，$P(B\bar{C})=P(B)-P(BC)$，$P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)$

且由 A, B, C 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

$\therefore P[(A\cup B)\bar{C}]=(P(A)-P(AC))+(P(B)-P(BC))-(P(AB)-P(ABC))$

$=P(A)(1-P(C))+P(B)(1-P(C))-P(AB)(1-P(C))$

$=(P(A)+P(B)-P(AB))\cdot(1-P(C))=P(A\cup B)\cdot P(\bar{C})$。$\therefore A\cup B$ 与 $\bar{C}$ 独立。

2. 甲、乙、丙三车间生产同种产品，次品率分别为 0.05，0.08 和 0.1。从三个车间各取一件产品检查，求下列事件的概率：

(1) 恰有 2 件次品；(2) 至少有 1 件次品。

解：设 $A_i=$"第 i 车间的一件产品是次品"，$i=1,2,3$，相互独立。

$P(A_1)=0.05$，$P(\bar{A}_1)=0.95$；$P(A_2)=0.08$，$P(\bar{A}_2)=0.92$；$P(A_3)=0.1$，$P(\bar{A}_3)=0.9$。

(1) P(恰有 2 件次品) $=P(A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup \bar{A}_1A_2A_3)$

$=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$

$+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)=0.05\times0.08\times0.9+0.05\times0.92\times0.1+0.95\times0.08\times0.1$

$=0.0158$。

(2) P(至少有 1 件次品) $=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$

$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-0.95\times0.92\times0.9=0.2134$。

3. 一个工人看管三台车床，在一小时内车床不需要工人照管的概率：第一台等于 0.9，第二台等于 0.8，第三台等于 0.7。求一小时内三台车床中最多有一台需要工人照管的概率。

解：设 $A_i=$"第 i 台车床需要工人照管"，$i=1,2,3$ 且相互独立。

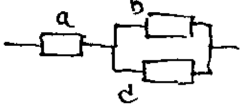
P(最多有一台需要工人照管) $=P\{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\}$

$=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)$

$+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7+0.9\times0.8\times(1-0.7)$

$+0.9\times(1-0.8)\times0.7+(1-0.9)\times0.8\times0.7=0.902$

4. 电路由电池a与两个并联的电池b及c串联而成. 设电池a, b, c损坏的概率分别为0.3, 0.2和0.2. 求电路发生中断的概率.

解 

设电池a, b, c正常工作的事件依次为A, B, C 且相互独立. $P(A)=0.7$, $P(\bar{A})=0.3$; $P(B)=0.8$; $P(\bar{B})=0.2$; $P(C)=0.8$, $P(\bar{C})=0.2$.

$P\{$电路发生中断$\}=P(\bar{A}\cup\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A})+P(\bar{B}\bar{C})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$=P(\bar{A})+P(\bar{B})P(\bar{C})-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0.3+0.2\times0.2-0.3\times0.2\times0.2=0.328.$

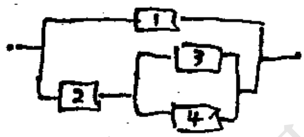
(注): $P\{$电路发生中断$\}=1-P\{$电路正常$\}=1-P\{A(B\cup C)\}$

$=1-P(AB\cup AC)=1-[P(AB)+P(AC)-P(ABC)]$

$=1-[P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)]=1-[0.7\times0.8+0.7\times0.8-0.7\times0.8\times0.8]$

$=0.328.$

5. 设下列系统各个部件的可靠性都是γ. 且各部件能否正常工作是相互独立的. 已知A至B只要有一条通路正常工作, 系统便能正常运行. 求各系统的可靠性.

(1) 

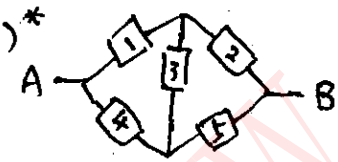
设E_i="第i个部件工作正常", $i=1,2,3,4$. $P(E_i)=\gamma$. 且各E_i, $i=1,2,3,4$ 相互独立.

$P\{$系统正常$\}=P\{E_1\cup[E_2(E_3\cup E_4)]\}=P\{E_1\cup(E_2E_3\cup E_2E_4)\}$

$=P(E_1)+P(E_1E_2)+P(E_2E_4)-P(E_1E_2E_3)-P(E_1E_2E_4)-P(E_2E_3E_4)+P(E_1E_2E_3E_4)$

$=P(E_1)+P(E_1)P(E_2)+P(E_2)P(E_4)-P(E_1)P(E_2)P(E_3)-P(E_1)P(E_2)P(E_4)-P(E_2)P(E_3)P(E_4)$

$+P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)=\gamma+\gamma^2+\gamma^2-\gamma^3-\gamma^3-\gamma^3+\gamma^4=\gamma+2\gamma^2-3\gamma^3+\gamma^4.$

(2)* 

设E_i="第i个部件工作正常", $i=1,2,3,4,5$ 且相互独立. $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=P(E_4)=P(E_5)=\gamma$.

$P\{$系统正常$\}=P\{E_1E_2\cup E_1E_3E_5\cup E_4E_5\cup E_2E_3E_4\}=P(E_1E_2)+P(E_1E_3E_5)$

$+P(E_4E_5)+P(E_2E_3E_4)-P(E_1E_2E_3E_5)-P(E_1E_2E_4E_5)-P(E_1E_2E_3E_4)$

$-P(E_1E_3E_4E_5)-P(E_2E_3E_4E_5)-P(E_1E_2E_3E_4E_5)+4P(E_1E_2E_3E_4E_5)$

$-P(E_1E_2E_3E_4E_5)=P(E_1)P(E_2)+P(E_1)P(E_3)P(E_5)+P(E_4)P(E_5)$

$+P(E_2)P(E_3)P(E_4)-P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_5)-P(E_1)P(E_2)P(E_4)P(E_5)$

$-P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)-P(E_1)P(E_3)P(E_4)P(E_5)+2P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)P(E_5)$

$=\gamma^2+\gamma^3+\gamma^2+\gamma^3-\gamma^4-\gamma^4-\gamma^4-\gamma^4-\gamma^4+2\gamma^5$

$=2\gamma^2+2\gamma^3-5\gamma^4+2\gamma^5$

6. 甲、乙、丙三人向同一飞机射击，设击中的概率分别是0.4，0.5和0.7。如果只有一人击中，则飞机被击落的概率是0.2；如果有两人击中，则飞机被击落的概率是0.6；如果三人都击中，则飞机一定被击落。求飞机被击落的概率。

解：设 B_i ="有 i 人击中飞机"，$i=0,1,2,3$.

又记甲、乙、丙各自击中飞机的事件依次为 C_1, C_2, C_3，且相互独立

则 $P(B_0)=P(\bar{C}_1\bar{C}_2\bar{C}_3)=P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2)P(\bar{C}_3)=0.6\times0.5\times0.3=0.09$；

$P(B_1)=P(C_1\bar{C}_2\bar{C}_3\cup\bar{C}_1C_2\bar{C}_3\cup\bar{C}_1\bar{C}_2C_3)=P(C_1\bar{C}_2\bar{C}_3)+P(\bar{C}_1C_2\bar{C}_3)+$
$+P(\bar{C}_1\bar{C}_2C_3)=P(C_1)P(\bar{C}_2)P(\bar{C}_3)+P(\bar{C}_1)P(C_2)P(\bar{C}_3)+P(\bar{C}_1)P(\bar{C}_2)P(C_3)$
$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$；

$P(B_2)=P(C_1C_2\bar{C}_3\cup C_1\bar{C}_2C_3\cup\bar{C}_1C_2C_3)=P(C_1C_2\bar{C}_3)+P(C_1\bar{C}_2C_3)+$
$+P(\bar{C}_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(\bar{C}_3)+P(C_1)P(\bar{C}_2)P(C_3)+P(\bar{C}_1)P(C_2)P(C_3)$
$=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$，

$P(B_3)=P(C_1C_2C_3)=P(C_1)P(C_2)P(C_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$.

且设 A ="飞机被击落"，则有 $P(A/B_0)=0$；$P(A/B_1)=0.2$；$P(A/B_2)=0.6$；
$P(A/B_3)=1$.

则 $P(A)=P(B_0)P(A/B_0)+P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$
$=0.09\times0+0.36\times2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$.

7. 甲、乙、丙三人同时破译一份密码，已知三人能译出的概率分别是 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{5}$。求密码能译出的概率。

解：设甲、乙、丙各人译出密码的事件分别为 A, B, C，相互独立，且

$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{5}$；$P(\bar{A})=\frac{2}{3}$，$P(\bar{B})=\frac{3}{4}$，$P(\bar{C})=\frac{4}{5}$.

则 $P\{$密码能译出$\}=1-P\{$密码不能译出$\}=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$
$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}=0.6$.

（注）：$P\{$密码能译出$\}=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$
$-P(BC)+P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)$
$+P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{3\times4\times5}$
$=\frac{1}{60}(20+15+12-5-4-3+1)=\frac{36}{60}=0.6$.

复习题 1 （三. 计算题与证明题）

1. 设 x 为自然数 1 至 100 中随机地选取的一个数. 求 $x+\frac{100}{x}>50$ 的概率.

解：由 $x+\frac{100}{x}>50$ 得 $x^2-50x+100>0$，即 $(x-2.09)(x-47.91)>0$.

则有 $x<2.09$ 或 $x>47.91$，在 1～100 的自然数中有 $x=1,2,48,49,50,\cdots,100$，共有 55 个数. 则

$$P\{x+\frac{100}{x}>50\}=\frac{55}{100}=0.55.$$

2. 掷两颗骰子，求下列各事件的概率：A＝"两颗骰子出现点数不同"，B＝"两颗骰子出现点数之和为 7"，C＝"两颗骰子出现点数之和大于 5 且小于 9".

解：记两颗骰子出现的点数 $\omega=(i,j)$，$i,j=1,2,3,4,5,6$. 则

$A=\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,6);(2,1),(2,3),\cdots,(2,6);(3,1),(3,2),(3,4),\cdots,(3,6);(4,1),\cdots,(4,3),(4,5),(4,6);(5,1),\cdots,(5,4),(5,6);(6,1);\cdots,(6,5)\}$. 共 30 种.

$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，共 6 种.

$C=\{(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6);(3,3),(3,4),(3,5);(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2)\}$ 共 16 种.

故 $P(A)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$；$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$；$P(C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

3. 从 1, 2, …, 10 这 10 个数字中任取 1 个，然后放回，先后取出 6 个数字. 求下列各事件的概率：A＝"6 个数字全不相同"；B＝"6 个数字不含 10 和 1".

解：$P(A)=\frac{A_{10}^6}{10^6}=0.060$，$P(B)=\frac{8^6}{10^6}=(0.8)^6=0.262$.

4. 证明：若 $P(A/B)=P(A/\bar{B})$，则事件 A 与 B 独立.

证：$P(A/B)=P(A/\bar{B}) \Rightarrow P(AB)/P(B)=P(A\bar{B})/P(\bar{B})$

$\Rightarrow P(AB)P(\bar{B})=P(A\bar{B})P(B) \Rightarrow P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$.

$\Rightarrow P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(AB)P(B) \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

∴ A，B 独立.

5. 一个工厂有一、二、三 3 个车间生产同一产品，每个车间的产量占总产量的 45%，35%，20%. 如果每个车间成品中的次品率分别为 5%，4%，2%.

(1) 从全厂产品中任意抽取一个产品，求取出是次品的概率；

(2) 如果从全厂产品抽出的一个恰好是次品，求这个产品是由一车间生产的概率.

解：设 B_i＝"第 i 个车间生产的产品"，$i=1,2,3$

则 $P(B_1)=0.45$，$P(B_2)=0.35$，$P(B_3)=0.20$.

又 A＝"抽取出的一个产品是次品".

则 $P(A/B_1)=0.05$，$P(A/B_2)=0.04$，$P(A/B_3)=0.02$

(1) $P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)$

$=0.45\times0.05+0.35\times0.04+0.2\times0.02=0.0405.$

(2) $P(B_1/A)=P(AB_1)/P(A)=P(B_1)P(A/B_1)/P(A)=0.45\times0.05/0.0405\approx0.56.$

6. 寝室中有四个人，求：(1)至少有2人的生日同在12月的概率；(2)至少有2人的生日在同一个月的概率；(3)至少有2人的生日同在星期一的概率.

解：(1) $P\{$至少有2人的生日同在12月$\}=(C_4^2\cdot11^2+C_4^3\cdot11+1)/12^4=0.0372.$

(2) $P\{$至少有2人的生日在同一个月$\}=1-P\{$四人生日不在同一个月$\}$

$=1-A_{12}^4/12^4=0.4271.$

(3) $P\{$至少有2人的生日同在星期一$\}=(C_4^2\cdot6^2+C_4^3\cdot6+1)/7^4=0.1004.$

(注)：(1).(3)可用第二章的方法处理：如(1)题：

设随机变量 $X_i=\begin{cases}1: & \text{第}i\text{人生日在12月;}\\ 0. & \text{第}i\text{人生日不在12月.}\end{cases}$ $i=1,2,3,4$ 相互独立.

且 $P\{X_i=1\}=\frac{1}{12}$，$P\{X_i=0\}=\frac{11}{12}$. $i=1,2,3,4$.

则随机变量 $X=$"4人中生日在12月的人数"$=\sum_{i=1}^{4}X_i\sim B(4,\frac{1}{12})$.

$\therefore P\{$至少有2人的生日在12月$\}=P\{X\geq2\}=\sum_{i=2}^{4}P\{X=i\}=\sum_{i=2}^{4}C_4^i(\frac{1}{12})^i(\frac{11}{12})^{4-i}$

$=C_4^2\cdot\frac{11^2}{12^4}+C_4^3\cdot\frac{11}{12^4}+C_4^4\cdot\frac{1}{12^4}=0.0372.$

第(3)题可类似处理.

7. 从5双不同尺码的鞋子中任取4只，求至少有两只凑成一双的概率.

解：记 $A=$"所取4只鞋子中至少有两只凑成一双".

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

(注)：$$P(A)=\frac{C_5^1\cdot C_2^2+C_4^2(C_2^1)^2}{C_{10}^4}+\frac{C_5^2C_2^2C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

本题易错解为 $P(A)=\frac{C_5^1C_2^2\cdot C_8^2}{C_{10}^4}$，则分子中样本点有重复计数之错误.

9. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$. 求下列事件的概率：(1) A,B,C全不发生；(2) A,B,C恰好发生一个.

解：$\because P(A)=P(B)\neq0$. $P(AB)=0$，$\therefore$ A,B 互斥，$AB=\Phi$.

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(BC)=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}.$

(1) $P\{A,B,C$全不发生$\}=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}=0.375.$

(2) $P\{A,B,C$恰好发生一个$\}=P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)=\left(P(A)-P[A(B\cup C)]\right)+\left(P(B)-P[B(A\cup C)]\right)$

$+\left(P(C)-P[C(A\cup B)]\right)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB\cup AC)-P(AB\cup BC)-P(AC\cup BC)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-[P(AB)+P(AC)-P(ABC)]-[P(AB)+P(BC)-P(ABC)]$

$-[P(AC)+P(BC)-P(ABC)]=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(BC)-P(AC)-P(BC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$

(注)：(2)中使用事件运算关系：例如 $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A)-P(A\overline{\bar{B}\bar{C}})$

$=P(A)-P(A(B\cup C))$. 是由 $A=A\Omega=A(\bar{B}\bar{C}\cup\overline{\bar{B}\bar{C}})=A\bar{B}\bar{C}\cup A\overline{\bar{B}\bar{C}}$

则 $P(A)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(A\overline{\bar{B}\bar{C}})$，则 $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A)-P(A\overline{\bar{B}\bar{C}})$. 其余同理.

10. 假设有两箱同种零件，第一箱内装50件，其中10件一等品；第二箱内装30件，其中18件一等品，现从两箱中先后随机取出2个零件（取出的零件不放回），试求：(1) 先取出的零件是一等品的概率；(2)* 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的条件概率.

解：设 B_i = "第 i 箱的零件"，且 $P(B_i)=\frac{1}{2}$，$i=1,2$.

又 A_i = "第 i 次取出一个零件是一等品"，$i=1,2$.

(1) $P(A_1/B_1)=C_{10}^1/C_{50}^1=\frac{1}{5}$；$P(A_1/B_2)=C_{18}^1/C_{30}^1=\frac{3}{5}$.

$\therefore P\{$先取出的零件是一等品$\}=P(A_1)=P(B_1)P(A_1/B_1)+P(B_2)P(A_1/B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$
$=0.4$；

(2) $P(A_2/A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{P(A_1)}[P(B_1)P(A_1A_2/B_1)+P(B_2)P(A_1A_2/B_2)]$

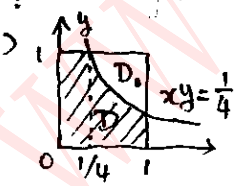
由 $P(A_1A_2/B_1)=C_{10}^2/C_{50}^2=0.03673$；$P(A_1A_2/B_2)=C_{18}^2/C_{30}^2=0.35172$.

$\therefore P(A_2/A_1)=\frac{1}{0.4}\left[\frac{1}{2}\times0.03673+\frac{1}{2}\times0.35172\right]=0.4856.$

8*. 在区间 (0,1) 中随机地取2个数，求：(1) 两数之积小于 $\frac{1}{4}$ 的事件的概率；(2) 两数之和大于1.2的事件的概率.

解：设 x,y 为所取的2个数. $0\le x\le1$，$0\le y\le1$.

(1)



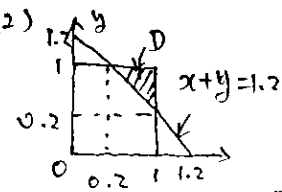
$P(xy<\frac{1}{4})=S_D/S_{正方形}=1-S_{D_0}/S_{正方形}$

$S_{D_0}=\iint\limits_{D_0}dxdy=\int_{1/4}^{1}dx\int_{1/4x}^{1}dy=\int_{1/4}^{1}(1-\frac{1}{4x})dx=\left(x-\frac{\ln x}{4}\right)\Big|_{1/4}^{1}=\frac{3}{4}-\frac{\ln2}{2}.$

$S_{正方形}=1.$

$\therefore P\{xy<\frac{1}{4}\}=1-(\frac{3}{4}-\frac{\ln2}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln2.$

(2)



$P\{x+y>1.2\}=S_D/S_{正方形}$

$S_D=0.8\times0.8/2=0.32.$ $S_{正方形}=1.$

$\therefore P\{x+y>1.2\}=0.32.$

习题2-1

1. 10件产品中有8件合格品和2件不合格品，从中任取3次，每次取一件，分别依照(1)放回；(2)不放回方式，求取得不合格品数X的分布律。

解：X="从10件产品中任取3次，每次一件，取得不合格品的个数"。

(1) 放回方式：

$$P(X=K)=\frac{C_3^K 2^K 8^{3-K}}{10^3}=C_3^K\left(\frac{2}{10}\right)^K\left(\frac{8}{10}\right)^{3-K},\quad K=0,1,2,3.$$

(2) 不放回方式：

$$P(X=K)=\frac{C_2^K C_8^{3-K}}{C_{10}^3}.\quad K=0,1,2.$$

2. 掷2颗骰子，记点数之和为X。(1)写出X的分布；(2)计算 $P(X\geq 6/X\geq 3)$.

解：X="2颗骰子点数之和"。

(1) X的分布律：

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_K	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

(2) $P(X\geq 6/X\geq 3)=P((X\geq 6)\cap(X\geq 3))/P(X\geq 3)=P(X\geq 6)/P(X\geq 3)$

$$=\sum_{K=6}^{12}P(X=K)\Big/\sum_{K=3}^{12}P(X=K)=\frac{26}{36}\Big/\frac{35}{36}=\frac{26}{35}.$$

3. 袋中有5只球，编号为1,2,3,4,5，从中同时取3只，设X为取出的3只球中的最大号码，写出X的分布律。

解：$P(X=K)=\dfrac{C_{K-1}^2}{C_5^3}$，$K=3,4,5$ 或

X	3	4	5
P_K	1/10	3/10	6/10

4. 设随机变量X具有分布律：

X	0	1	2	3
P_K	1/9	$2\theta(1-\theta)$	1/9	$1-2\theta$

试确定常数θ。

解：由 $1=\sum_{K=0}^{3}P(X=K)=\frac{1}{9}+2\theta(1-\theta)+\frac{1}{9}+(1-2\theta)=\frac{11}{9}-2\theta^2$.

$\therefore \theta^2=\frac{1}{9}$. $\because \theta>0$. 故 $\theta=\frac{1}{3}$.

习题 2-2.

1. 一条自动生产线上产品的一级品率为 0.6，随机检查 10 件，求至少有两件一级品的概率.

解：设 X = "随机检查 10 件中的一级品个数"，则 $X \sim B(10, 0.6)$

$\therefore P\{$至少有 2 件一级品$\} = P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X<2\} = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - C_{10}^{0}(0.6)^0(0.4)^{10} - C_{10}^{1}\, 0.6 \cdot (0.4)^9 = 1 - 0.000105 - 0.001573 = 0.9983.$

2. 设从学校乘汽车到火车站的途中有 5 个十字路口，每个十字路口遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都等于 0.6. 以 X 表示途中遇到红灯的次数，求 X 的分布律.

解：设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个十字路遇到红灯;} \\ 0. & \text{第 } i \text{ 个十字路口未遇到红灯.} \end{cases}$ $P(X_i = 1) = 0.6$，$i = 1, 2, \cdots, 5$

而 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立.

则 X = "途中遇到红灯的次数" $= \sum_{i=1}^{5} X_i \sim B(5, 0.6)$.

有分布律 $P(X=K) = C_5^K (0.6)^K (0.4)^{5-K}$. $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

3. 某种灯泡使用时数在 1500 小时以上的概率为 0.7，求 5 个灯泡中至少有 3 个能使用 1500 小时以上的概率.

解：设 $X_i = \begin{cases} 1; & \text{第 } i \text{ 个灯泡能使用 1500 小时以上;} \\ 0. & \text{第 } i \text{ 个灯泡不能使用 1500 小时以上.} \end{cases}$ $P(X_i = 1) = 0.7$

且 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立.

又设 X = "5 个灯泡中能使用 1500 小时以上的个数"

则 $X = \sum_{i=1}^{5} X_i \sim B(5, 0.7)$. 有 $P\{X=K\} = C_5^K (0.7)^K (0.3)^{5-K}$，$K = 0, 1, 2, \cdots, 5$.

故 $P\{X \geq 3\} = \sum_{K=3}^{5} P\{X=K\} = \sum_{K=3}^{5} C_5^K (0.7)^K (0.3)^{5-K} = C_5^3 (0.7)^3 (0.3)^2 + C_5^4 (0.7)^4 0.3$

$+ C_5^5 (0.7)^5 = 0.3087 + 0.36015 + 0.16807 = 0.837.$

4. 一批种子发芽率为 0.98，任取其中 5 粒，求以下概率：

(1) 恰有 3 粒种子能发芽；(2) 至少有 4 粒种子能发芽.

解：设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 粒种子能发芽;} \\ 0. & \text{第 } i \text{ 粒种子不能发芽.} \end{cases}$ $P\{X_i = 1\} = 0.98$，$i = 1, 2, \cdots, 5$

X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 相互独立.

又由 X = "5 粒种子中能发芽的粒数" $= \sum_{i=1}^{5} X_i \sim B(5, 0.98)$，故

(1) $P($恰有 3 粒种子能发芽$) = P(X=3) = C_5^3 (0.98)^3 (0.02)^2 = 0.003765.$

(2) $P($至少有 4 粒种子能发芽$) = P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5)$

$= C_5^4 (0.98)^4 \cdot 0.02 + C_5^5 (0.98)^5 = 0.09224 + 0.90392 = 0.9962.$

5. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，求该射手的命中率.

解：设 X = "4次射击中击中目标的次数"，可知 $X \sim B(4, p)$.

其中 p 为该射手的命中率，$0<p<1$. 由 $P(X\geq 1)=80/81$.

$\because P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-C_4^0 p^0(1-p)^4=1-(1-p)^4$

$\therefore 1-(1-p)^4=\frac{80}{81}$ 即 $(1-p)^4=\frac{1}{81}$，$\therefore p=\frac{2}{3}$.

6. 一条流水线上产品合格率为0.9，合格品中有80%为一级品，从该产品中任取10件，求(1)取到7件合格品，3件不合格品的概率；(2)至少取到8件一级品的概率；(3)已知其中有一件不是一级品，求非一级品数不超过2件的概率.

解：(1) 设 X = "任取10件中的合格品个数"，则 $X\sim B(10, 0.9)$

$\therefore P(X=7)=C_{10}^7(0.9)^7(0.1)^3=0.0574$.

(2) 设 Y = "任取10件中的一级品个数"，则 $Y\sim B(10, 0.9\times 0.8)$

即 $Y\sim B(10, 0.72)$.

$\therefore P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=C_{10}^8(0.72)^8(0.28)^2+C_{10}^9(0.72)^9(0.28)$

$+C_{10}^{10}(0.72)^{10}=0.25479+0.14560+0.03744=0.4378$.

(3) 由(2) $Y\sim B(10, 0.72)$.

$\therefore P$(已知其中有一件不是一级品的条件下，非一级品数不超过2件)

$=P(Y\geq 8 / Y\leq 9)=\frac{P(8\leq Y\leq 9)}{P(Y\leq 9)}=\frac{P(Y=8)+P(Y=9)}{1-P\{Y=10\}}$

$=\frac{C_{10}^8(0.72)^8(0.28)^2+C_{10}^9(0.72)^9 0.28}{1-C_{10}^{10}(0.72)^{10}}=\frac{0.25479+0.14560}{1-0.03744}=0.4160$.

习题 2－3

1. 设某本书中每页印刷错误的个数 X 服从泊松分布 $\pi(0.2)$，求一页上至多有一个印刷错误的概率.

解：X＝"每页印刷错误的个数"，$X\sim\pi(0.2)$，$P(X=K)=\frac{0.2^K}{K!}e^{-0.2}$，$K=0,1\cdots$

则 $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{0.2^0}{0!}e^{-0.2}+\frac{0.2}{1!}e^{-0.2}=e^{-0.2}+0.2e^{-0.2}=1.2e^{-0.2}$

$=0.9825$.

2. 设某电话总机5分钟内接到电话呼叫的次数 X 服从泊松分布 $\pi(2)$，(1)计算该总机5分钟内共接到 K 个电话（$K=0,1,\cdots,6$）的概率；(2)求5分钟内至多接到3个电话的概率.

解：X＝"5分钟内接到电话呼叫次数"，$X\sim\pi(2)$

$P(X=K)=\frac{2^K}{K!}e^{-2}=\frac{2^K}{K!}\times 0.13535$，$K=0,1,2,\cdots$

(1)

X	0	1	2	3	4	5	6
P_K	0.13535	0.2707	0.2707	0.18047	0.09023	0.03609	0.01203

(2) $P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=0.13535+0.2707+0.2707+0.18047=0.8572$.

3. 某商店某种商品的月销售量服从参数为5的泊松分布，问在月初应库存多少该种商品，才能保证当月不脱销的概率达到0.999？

解：X＝"某商品的月销售量"，$X\sim\pi(5)$，$P(X=K)=\frac{5^K}{K!}e^{-5}$，$K=0,1,2,\cdots$

设月初应库存 K 个该商品，使 $P(X\le K)=0.999$.

即 $P(X\le K)=\sum_{i=0}^{K}\frac{5^i}{i!}e^{-5}=0.999$. 经试算得 $K=12$.

4. 某医院在长度为 t 的时间间隔内收治的急诊病人数 X 服从参数为 $\frac{t}{2}$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计），

(1) 求某一天中午12时至下午3时没有急诊病人的概率；

(2) 求某一天中午12时至下午5时至少有2个急诊病人的概率.

解：(1) 设 X＝"中午12时至下午3时的急诊病人数"，则 $X\sim\pi(\frac{3}{2})$.

$\therefore P\{没有急诊病人\}=P(X=0)=\frac{(\frac{3}{2})^0}{0!}e^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}=0.2231$.

(2) 设 Y＝"中午12时至下午5时的急诊病人数"，则 $X\sim\pi(\frac{5}{2})$.

$\therefore P\{至少有2个急诊病人\}=P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y<2\}$

$=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-e^{-\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}}=1-\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}}$

$=1-0.287297=0.7127$.

习题 2-4

1. 设从学校乘汽车到火车站的途中有5个十字路口，每个十字路口遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都等于0.6。以X表示途中遇到的红灯次数，求X的分布律和分布函数。

解：参见习题2-2第2题：$X \sim B(5, 0.6)$。即 $P(X=K)=C_5^K(0.6)^K(0.4)^{5-K}$. $K=0,1,2,\cdots,5$

计算得：

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0102	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.0778

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{K\le x}P(X=K)=\begin{cases}0\ , & x<0\ ;\\ 0.0102\ ; & 0\le x<1\ ;\\ 0.0870\ ; & 1\le x<2\ ;\\ 0.3174\ ; & 2\le x<3\ ;\\ 0.6630\ ; & 3\le x<4\ ;\\ 0.9222\ ; & 4\le x<5\ ;\\ 1\ . & 5\le x\ .\end{cases}$$

2.* 设某电话总机5分钟内接到电话呼叫的次数X服从泊松分布 $\pi(2)$，对 $x\le 6$，计算X的分布函数 $F(x)$。

解：X = "5分钟内电话呼叫次数"，$X\sim\pi(2)$

有分布律：$P(X=K)=\dfrac{2^K}{K!}e^{-2}=\dfrac{2^K}{K!}\times 0.135335$. $K=0,1,2,\cdots\cdots$

X	0	1	2	3	4	5	6	…
P	0.135335	0.27067	0.27067	0.180447	0.090223	0.036089	0.012030	…

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{K\le x}P(X=K)=\begin{cases}0\ , & x<0\ ;\\ 0.135335\ , & 0\le x<1\ ,\\ 0.406005\ , & 1\le x<2\ ,\\ 0.676675\ , & 2\le x<3\ ,\\ 0.857122\ , & 3\le x<4\ ,\\ 0.947345\ , & 4\le x<5\ ,\\ 0.983434\ . & 5\le x<6\ .\\ 0.995464\ . & 6\le x<7\ .\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{cases}$$

（注）：一般表示分布函数采用下列形式，

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{K\le x}P(X=K)=\begin{cases}0\ , & x<0\ ,\\ e^{-2}\ , & 0\le x<1\ ,\\ 3e^{-2}\ , & 1\le x<2\ ,\\ 5e^{-2}\ , & 2\le x<3\ ,\\ \frac{19}{3}e^{-2}\ , & 3\le x<4\ .\\ 7e^{-2} & 4\le x<5\end{cases}$$

3. 设随机变量X具有分布律：

X	0	1	2
P	$1/3$	$1/6$	$1/2$

(1) 求X的分布函数 $F(x)$；

(2) 计算 $P(X\le\frac{3}{2})$, $P(1<X\le4)$ 和 $P(1\le X\le4)$

解：(1) X的分布函数：

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{k\le x}P(X=k)=\begin{cases}0; & x<0;\\ \frac{1}{3}; & 0\le x<1;\\ \frac{1}{2}; & 1\le x<2;\\ 1. & 2\le x.\end{cases}$$

(2) $P(X\le\frac{3}{2})=P\{(X=0)\cup(X=1)\}=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

或 $P(X\le\frac{3}{2})=F(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$.

$P(1<X\le4)=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，或 $P(1<X\le4)=F(4)-F(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$P(1\le X\le4)=P((X=1)\cup(X=2))=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

或 $P(1\le X\le4)=P(X\le4)-P(X<1)=P(X\le4)-P(X\le1)+P(X=1)$

$=F(4)-F(1)+(F(1+0)-F(1-0))=1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$.

(注) $F(a+0)=F(a)$. 而 $P(X=a)=F(a+0)-F(a-0)=F(a)-F(a-0)$

4. 设随机变量X的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\le x<0,\\ 0.6, & 0\le x<2,\\ 0.9, & 2\le x<4,\\ 1, & 4\le x,\end{cases}$$

求X的分布律

解：根据 $P\{X=a\}=F(a+0)-F(a-0)=F(a)-F(a-0)$.

有 $P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.2-0=0.2$,

$P(X=0)=F(0)-F(0-0)=0.6-0.2=0.4$,

$P(X=2)=F(2)-F(2-0)=0.9-0.6=0.3$,

$P(X=4)=F(4)-F(4-0)=1-0.9=0.1$.

∴ X的分布律为

X	-1	0	2	4
P_k	0.2	0.4	0.3	0.1

习题 2-5

1. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} Kx^2, & -1<x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1) 求常数 K 的值；(2) 求 X 的分布函数；(3) 用两种方法计算 $P(0<X\le 1)$.

解：(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2} Kx^2dx = K(\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2} = 3K$，$\therefore K=\frac{1}{3}$.

(2) X 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{3}x^2dx, & -1<x<2, \\ 1, & 2\le x, \end{cases} =\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{x^3+1}{9}, & -1<x<2; \\ 1 & 2\le x \end{cases}$$

(3) $P(0<x\le 1)=F(1)-F(0)=\frac{1^3+1}{9}-\frac{0^3+1}{9}=\frac{1}{9}$；

或 $P(0<x\le 1)=\int_0^1 \frac{1}{3}x^2dx=\frac{x^3}{9}\Big|_0^1=\frac{1}{9}$.

2. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x/2, & 0<x\le 1; \\ 1/2, & 1<x\le 2; \\ (3-x)/2, & 2<x<3; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x)$，

(2) 画出密度函数和分布函数的图形.（略）.

解：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \int_0^x \frac{x}{2}dx; & 0<x\le 1; \\ \int_0^1 \frac{x}{2}dx+\int_1^x \frac{1}{2}dx; & 1<x\le 2; \\ \int_0^1 \frac{x}{2}dx+\int_1^2 \frac{1}{2}dx+\int_2^x \frac{3-x}{2}dx; & 2<x<3, \\ 1. & 3\le x; \end{cases} =\begin{cases} 0 & x\le 0; \\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 1; \\ \frac{x-2}{4}; & 1<x\le 2; \\ \frac{6x-x^2-5}{4}; & 2<x<3. \\ 1; & 3\le x. \end{cases}$$

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数为，

$$F(x)=\begin{cases} A; & x<0; \\ Bx^2; & 0\le x<1; \\ Cx-\frac{1}{2}x^2-1; & 1\le x<2; \\ 1, & 2\le x. \end{cases}$$

(1) 求常数 A、B、C，

(2) 求 X 的密度函数 $f(x)$；

(3) 用两种方法计算 $P(X>\frac{1}{2})$.

解：(1) 由连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为连续函数，故有：

$$\begin{aligned} F(0-0)&=F(0+0) \quad \therefore A=B\times 0^2; \\ F(1-0)&=F(1+0) \quad \therefore B=C-\frac{3}{2}; \\ F(2-0)&=F(2+0) \quad \therefore 2C-3=1. \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A=0; \\ B=\frac{1}{2}; \\ C=2. \end{cases}$$

(2)

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0; & x<0; \\ x; & 0\le x<1, \\ 2-x; & 1\le x<2, \\ 0. & 2\le x. \end{cases} =\begin{cases} x; & 0\le x<1; \\ 2-x, & 1\le x<2; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(3) $P(X>\frac{1}{2})=1-F(\frac{1}{2})=1-(\frac{1}{2})^2/2=\frac{7}{8}$

或 $P(X>\frac{1}{2})=\int_{1/2}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1/2}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}(2-x)dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^{1}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{7}{8}$.

4. 设采用某种保鲜技术包装的食品，保鲜时间 X 为一随机变量（以小时计）。具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{20000}{(x+100)^3}; & x>0\\ 0. & x\le 0.\end{cases}$；任取一包食品求：(1) 保鲜 200 小时以上的概率；(2) 保鲜时间在 80 到 120 小时之间的概率。

解：(1) $P(X>200)=\int_{200}^{+\infty}\frac{20000}{(x+100)^3}dx=-\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_{200}^{+\infty}=\frac{10000}{300^2}=\frac{1}{9}$.

(2) $P(80<X<120)=\int_{80}^{120}\frac{10000}{(x+100)^3}dx=-\frac{10000}{(x+100)^2}\Big|_{80}^{120}=0.1020$.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x; & 0<x<1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $(X\le\frac{1}{2})$ 出现的次数，求 Y 的分布律。

解：设 $X_i=\begin{cases}1. & \text{第 } i \text{ 次观察事件 } (X\le\frac{1}{2}) \text{ 出现；}\\ 0. & \text{第 } i \text{ 次观察事件 } (X\le\frac{1}{2}) \text{ 未出现.}\end{cases}$ $i=1.2.3.$ 且相互独立。

$P(X_i=1)=P(X\le\frac{1}{2})=p=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}$. 则 $Y=\sum_{i=1}^{3}X_i\sim B(3,\frac{1}{4})$.

即 $P(Y=K)=C_3^K(\frac{1}{4})^K(\frac{3}{4})^{3-K}$，$K=0.1.2.3.$

6. 设某河流每年的最高洪水位 (m) 具有概率密度：$f(x)=\begin{cases}2/x^3, & x\ge 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 今要修建能防御百年一遇洪水（即遇到的概率不超过 0.01）的河堤。问河堤至少要修多少高？

解：设河堤至少要修到百年一遇时的洪水位 a (m) 高。

又设 X="每年的最高洪水位 (m)"。$X\sim f(x)=\begin{cases}2/x^3, & x\ge 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

则 $P(X\ge a)=0.01$.

由 $P(X\ge a)=\int_a^{+\infty}\frac{2}{x^3}dx=-\frac{1}{x^2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{1}{a^2}$，得 $\frac{1}{a^2}=0.01$

$\therefore a=10$ (m).

习题 2－6

1. 设随机变量 $X \sim U(2,5)$．现对 X 进行 3 次独立观测．求至少有两次观测值大于3的概率．

解：设 $X_i = \begin{cases} 1; & 第i次观测X值大于3; \\ 0. & 第i次观测X值未大于3. \end{cases}$ $i=1,2,3$．相互独立．

$\because X \sim U(2,5)$．$\therefore f_X(x) = \begin{cases} 1/3; & 2<x<5; \\ 0. & 其他. \end{cases}$

$P(X_i=1) = P(X>3) = \int_3^{+\infty} f_X(x)dx = \int_3^5 1/3\,dx = \frac{1}{3}x\Big|_3^5 = \frac{2}{3}$，$i=1,2,3$.

又设 Y ＝"对 X 的 3 次观测中，观测值大于 3 的次数"

则 $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i \sim B(3, \frac{2}{3})$，即 $P(Y=K) = C_3^K (\frac{2}{3})^K (\frac{1}{3})^{3-K}$，$K=0,1,2,3$.

$\therefore P(至少有两次观测值大于3) = P(Y \geq 2) = P(Y=2)+P(Y=3)$

$= C_3^2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3}) + C_3^3 (\frac{2}{3})^3 = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27} = 0.7407$.

2. 设随机变量 $K \sim U(0,5)$．求方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率．

解：方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的充要条件是它的判别式 $\Delta \geq 0$.

由 $\Delta = (4K)^2 - 4\cdot 4\cdot (K+2) \geq 0$，即 $K^2-K-2 \geq 0$ 得 $(K\geq 2)\cup(K\leq -1)$

$\therefore P(方程有实根) = P\{(K\geq 2)\cup(K\leq -1)\} = P(K\geq 2) + P(K\leq -1) = P(K\geq 2)$

$= \int_2^{+\infty} f(x)dx$．而 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0<x<5; \\ 0. & 其他. \end{cases}$

$\therefore P(方程有实根) = \int_2^5 \frac{1}{5}dx = (\frac{x}{5})\Big|_2^5 = \frac{3}{5} = 0.6$.

3. 设某书店收银台顾客排队等待服务的时间 X（以分计）服从指数分布．密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0; \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$ 分别利用 X 的密度函数和分布函数计算 $P(X>10)$.

解：X 服从参数为 $\lambda = \frac{1}{5}$ 的指数分布，分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{5}}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$

$\therefore P(X>10) = 1-F(10) = 1-(1-e^{-\frac{10}{5}}) = e^{-2}$;

或 $P(X>10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = (-e^{-\frac{x}{5}})\Big|_{10}^{+\infty} = e^{-\frac{10}{5}} = e^{-2}$.

4. 设随机变量 X 的密度函数为

$f(x) = \begin{cases} Ke^{-3(x-1)}, & x>1; \\ 0. & x\leq 1. \end{cases}$ (1) 确定常数 K；(2) 计算 $P(1.5\leq X\leq 2)$.

解：(1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} Ke^{-3(x-1)}dx = \frac{1}{3}K(-e^{-3(x-1)})\Big|_1^{+\infty} = \frac{K}{3}$.

$\therefore K=3$．$\therefore f(x) = \begin{cases} 3e^{-3(x-1)}, & x>1, \\ \ldots \end{cases}$

(2) X的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3(x-1)}, & x>1;\\ 0. & x\le 1.\end{cases}$

$\therefore P(1.5\le X\le 2)=F(2)-F(1.5)=(1-e^{-3})-(1-e^{-1.5})=e^{-1.5}-e^{-3}.$

或 $P(1.5\le X\le 2)=\int_{1.5}^{2}3e^{-3(x-1)}dx=(-e^{-3(x-1)})\Big|_{1.5}^{2}=e^{-1.5}-e^{-3}.$

5. 设某种仪器装了3只独立工作的同型号元件，其寿命X(小时)服从密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}; & x>0;\\ 0. & x\le 0.\end{cases}$ 的指数分布。求仪器在最初200小时内至少有1只元件出故障的概率。

解：设 $X_i=\begin{cases}1; & \text{第}i\text{只元件寿命不到200小时，}\\ 0. & \text{第}i\text{只元件寿命不少于200小时.}\end{cases}$ $i=1.2.3.$ 相互独立.

$P(X_i=1)=P(X<200)=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=(-e^{-\frac{x}{600}})\Big|_0^{200}=1-e^{-\frac{1}{3}}.$

又 Y="仪器的3只元件中，寿命不到200小时的只数".

$\therefore Y=\sum_{i=1}^{3}X_i\sim B(3,\ 1-e^{-\frac{1}{3}})$; $P(Y=k)=C_3^k(1-e^{-\frac{1}{3}})^k(e^{-\frac{1}{3}})^{3-k}.\ k=0,\cdots 3.$

P(仪器在最初200小时内至少有1只元件出故障)

$=P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(e^{-\frac{1}{3}})^3=1-e^{-1}.$

习题 2-7

1. 设 $X \sim N(0,1)$. 求 (1) $P(0.02 < X < 2.33)$; (2) $P(-1.85 < X < 0.04)$.

解: (1) $P(0.02 < X < 2.33) = \Phi(2.33) - \Phi(0.02) = 0.9901 - 0.5080 = 0.4821$.

(2) $P(-1.85 < X < 0.04) = \Phi(0.04) - \Phi(-1.85) = \Phi(0.04) - (1 - \Phi(1.85))$
$= \Phi(0.04) + \Phi(1.85) - 1 = 0.5160 + 0.9678 - 1 = 0.4798$.

2. 设 $X \sim N(10, 3^2)$. (1) 求 $P(7 < X < 16)$; (2) 求常数 α, 使 $P(X < \alpha) = 0.9$; (3) 求常数 α, 使 $P(|X - \alpha| > \alpha) = 0.01$.

解: (1) $P(7 < X < 16) = \Phi(\frac{16-10}{3}) - \Phi(\frac{7-10}{3}) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1))$
$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.8185$.

(2) $P(X < \alpha) = \Phi(\frac{\alpha - 10}{3}) = 0.9$, $\therefore \frac{\alpha - 10}{3} = 1.285$, $\therefore \alpha = 13.855$.

(3) $P(|X - \alpha| > \alpha) = P[(X - \alpha > \alpha) \cup (X - \alpha < -\alpha)] = P[(X > 2\alpha) \cup (X < 0)]$
$= P(X > 2\alpha) + P(X < 0) = 1 - \Phi(\frac{2\alpha - 10}{3}) + \Phi(-\frac{10}{3})$
$= 1 - \Phi(\frac{2\alpha - 10}{3}) + 1 - \Phi(\frac{10}{3}) = 1 - \Phi(\frac{2\alpha - 10}{3}) + 0.0004$ $\therefore \Phi(\frac{2\alpha - 10}{3}) = 0.9906$

$\therefore \frac{2\alpha - 10}{3} = 2.34$ $\therefore \alpha = 8.51$ (注: $\Phi(\frac{10}{3}) = \Phi(3.33) = 0.9996$)

3. 某机器生产的螺栓长度(cm)服从参数 $\mu = 10.05$, $\sigma = 0.06$ 的正态分布. 规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品. 求该机器生产的螺栓的合格率.

解: $P(10.05 - 0.12 < X < 10.05 + 0.12) = P(9.93 < X < 10.17) = \Phi(\frac{10.17 - 10.05}{0.06})$
$- \Phi(\frac{9.93 - 10.05}{0.06}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$.

4. 设一台软饮料包装机所装每罐饮料净含量 X 为一随机变量, 服从 $\mu = 200$, $\sigma = 15$ (毫升) 的正态分布. 求该包装机生产的饮料中 (1) 净含量超过 224 毫升的比例; (2) 净含量在 191 到 209 毫升之间的概率; (3) 求使 $P\{X \leq \alpha\} \leq 0.25$ 成立的最大数 α.

解: (1) $P(X > 224) = 1 - \Phi(\frac{224 - 200}{15}) = 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$;

(2) $P(191 < X < 209) = \Phi(\frac{209 - 200}{15}) - \Phi(\frac{191 - 200}{15}) = \Phi(0.6) - \Phi(-0.6)$
$= 2\Phi(0.6) - 1 = 2 \times 0.7257 - 1 = 0.4514$.

(3) $P(X \leq \alpha) = \Phi(\frac{\alpha - 200}{15}) = 1 - \Phi(\frac{200 - \alpha}{15}) \leq 0.25$.

$\therefore \Phi(\frac{200 - \alpha}{15}) \geq 0.75$, 当取等号时 α 取最大值.

由 $\frac{200 - \alpha}{15} = 0.675$, $\therefore \alpha = 189.875$

习题 2－8

1. 设离散型随机变量 X 具有分布律

X	-2	-1	0	1	2	3
p_k	$1/16$	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$3/16$	$1/16$

(1) 求 $Y=6-X^2$ 的分布律；(2) 求 $Z=\max(X+2, X^2)$ 的分布律.

解：(1)

$6-X^2$	$6-(-2)^2$	$6-(-1)^2$	$6-0^2$	$6-1^2$	$6-2^2$	$6-3^2$
p_k	$1/16$	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$3/16$	$1/16$

$\Rightarrow$

$6-X^2$	2	5	6	5	2	-3
p_k	$1/16$	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$3/16$	$1/16$

$\Rightarrow$

Y	-3	2	5	6
p_k	$1/16$	$4/16$	$7/16$	$4/16$

(2)

$\max(X+2, X^2)$	$\max((-2)+2, (-2)^2)$	$\max((-1)+2, (-1)^2)$	$\max(0+2, 0^2)$	$\max(1+2, 1^2)$	$\max(2+2, 2^2)$	$\max(3+2, 3^2)$
p_k	$1/16$	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$3/16$	$1/16$

$\Rightarrow$

$\max(X+2, X^2)$	4	1	2	3	4	9
p_k	$1/16$	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$3/16$	$1/16$

$\Rightarrow$

Z	1	2	3	4	9
p_k	$2/16$	$4/16$	$5/16$	$4/16$	$1/16$

2. 袋中有 k 号球 k 个，$k=1,2,\cdots,n$. 随机从中取一个球. 设 X 为所取到的球的号码. 求 $Y=X/(1+X)$ 的分布律.

解：$\because$ 袋中共有球 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个. $\therefore P(X=k)=\dfrac{k}{n(n+1)/2}=\dfrac{2k}{n(n+1)}$, $k=1,2,\cdots,n$

$\therefore$ 当取出的球为 k 号时，$Y=k/(1+k)$，$k=1,2,\cdots,n$.

故 $Y=\dfrac{X}{1+X}$ 的分布律为

$$P\left(Y=\frac{k}{1+k}\right)=P\left(\frac{X}{1+X}=\frac{k}{1+k}\right)=P(X=k)=\frac{2k}{n(n+1)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

3. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$. (1) 求随机变量 $Y=aX+b$ 的密度函数；(2) 求随机变量 $Z=\dfrac{X}{1+X}$ 的密度函数.

解：$X\sim U(0,1)$. $f_X(x)=\begin{cases}1; & 0<x<1;\\ 0; & 其他.\end{cases}$

(1) 当 $a>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\le \frac{1}{a}(y-b)\right)=F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)=f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & b<y<a+b;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)=P\left(X\ge \frac{1}{a}(y-b)\right)=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}\left(1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)\right)=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{a}, & a+b<y<b;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $F_Z(u)=P(Z\le u)=P(\frac{X}{1+X}\le u)=P(X\le\frac{u}{1-u})=F_X(\frac{u}{1-u})$

$$f_Z(u)=\frac{d}{du}F_Z(u)=\frac{d}{du}F_X(\frac{u}{1-u})=f_X(\frac{u}{1-u})\cdot\frac{1}{(1-u)^2}=\begin{cases}\frac{1}{(1-u)^2}, & 0<u<\frac{1}{2};\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 的密度函数．

解：$X\sim f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$．

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le y)=P(X\le\sigma y+\mu)=F_X(\sigma y+\mu)$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}F_X(\sigma y+\mu)=f_X(\sigma y+\mu)\cdot\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{[(\sigma y+\mu)-\mu]^2}{2\sigma^2}}\cdot\sigma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

即 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$．

5. 设随机变量 X 具有密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求随机变量 $Y=|X|$ 的密度函数；(2) 求随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数．

解：(1) 当 $y\le0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=0$，$\therefore f_Y(y)=0$；

当 $y\ge0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=F_X(y)-F_X(-y)$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[F_X(y)-F_X(-y)]=f_X(y)+f_X(-y)$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}(-y)^2, & 0\le y<1;\\ 0. & y\ge1.\end{cases}=\begin{cases}3y^2, & 0\le y<1;\\ 0, & y\ge1.\end{cases}$$

故有 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0\le y<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 当 $u<0$ 时，$F_Z(u)=P(Z\le u)=P(X^2\le u)=0$，$\therefore f_Z(u)=0$；

当 $u\ge0$ 时，$F_Z(u)=P(Z\le u)=P(X^2\le u)=P(-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u})=F_X(\sqrt{u})-F_X(-\sqrt{u})$

$$\therefore f_Z(u)=\frac{d}{du}F_Z(u)=\frac{d}{du}[F_X(\sqrt{u})-F_X(-\sqrt{u})]=f_X(\sqrt{u})\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}+f_X(-\sqrt{u})\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{u}}[\frac{3}{2}(\sqrt{u})^2+\frac{3}{2}(-\sqrt{u})^2], & 0\le u<1\\ 0, & u\ge1\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{u}, & 0\le u<1;\\ 0. & u\ge1.\end{cases}$$

故有 $f_Z(u)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{u}, & 0\le u<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6. 设随机变量 $X\sim U(0,2)$，求随机变量 $Y=2-(X-1)^2$ 的密度函数．

解：$X\sim U(0,2)$，$\therefore f_X(x)=\begin{cases}1/2, & 0<x<2;\\ & \text{其他}\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2-(X-1)^2\leq y)=P((X-1)^2\geq 2-y)$

当 $y\geq 2$ 时，$P((X-1)^2\geq 2-y)=P((X-1)^2\geq 0)=P(\Omega)=1$.

$\therefore f_Y(y)=0$.

当 $y<2$ 时，$F_Y(y)=P((X-1)^2\geq 2-y)=P[((X-1)\geq\sqrt{2-y})\cup((X-1)\leq-\sqrt{2-y})]$

$=P(X-1\geq\sqrt{2-y})+P(X-1\leq-\sqrt{2-y})=P(X\geq 1+\sqrt{2-y})+P(X\leq 1-\sqrt{2-y})$

$=1-F_X(1+\sqrt{2-y})+F_X(1-\sqrt{2-y})$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[1-F_X(1+\sqrt{2-y})+F_X(1-\sqrt{2-y})]$$

$$=-f_X(1+\sqrt{2-y})\frac{d}{dy}(1+\sqrt{2-y})+f_X(1-\sqrt{2-y})\frac{d}{dy}(1-\sqrt{2-y})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2-y}}[f_X(1+\sqrt{2-y})+f_X(1-\sqrt{2-y})]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2-y}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right], & 1<y<2\\ 0, & y\leq 1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2-y}}, & 1<y<2.\\ 0. & y\leq 1.\end{cases}$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2-y}}; & 1<y<2;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

复习题二（三、解答题）

1. 3个不同的球，随机投入编号为1.2.3.4的盒中，X表示有球盒的最小号码，求X的分布律。

解：设有球盒的最小号码为K，此时3个球可投入的盒子有$(4-K)+1$只，但为保证第K号必有球投入，因此3个球不能同时投入K号盒后的$(4-K)$只盒中，所以事件"最小盒号为K"的样本点数为$[(4-K)+1]^3-(4-K)^3$，故

$$P(X=K)=\frac{[(4-K)+1]^3-(4-K)^3}{4^3},\quad K=1,2,3,4.$$

2. 将一颗骰子抛掷两次，以X表示两次中得到的小的点数，求X的分布律。

解：设两次中得到的小的点数为K，此时比K大的点数有$(6-K)$个，第一次出现K点共有$(6-K)+1$个样本点；第二次出现K点，除第一次出现K点情形有$(6-K)$个样本点，所以"两次投掷最小点数为K"的事件共有样本点为$[(6-K)+1]+(6-K)=2(6-K)+1$个，故

$$P(X=K)=\frac{2(6-K)+1}{6^2},\quad K=1,2,3,4,5,6.$$

3. 自动生产线在调整以后出现的废品率为p，生产过程中出现废品时，立即重新进行调整，求两次调整之间生产的合格品数的分布律。

解：设X="两次调整之间生产的合格品数"。注意到调整是在出现废品时立即进行，所以X可能取的值应为$0,1,2,\cdots$，$(X=0)$事件是出现废品立即调整的意思，而不是取值为$1,2,\cdots$。故X的分布律为：

$$P(X=K)=p(1-p)^K,\quad K=0,1,2,\cdots$$

4. 5只电池，其中2只是次品，每次取一只测试，直到找出2只次品或3只正品为止，写出所需测试次数的分布律。

解：设X="直到找出2只次品或3只正品为止的测试次数"。显然X可能取2，3，4。注意最多测试4次，这4次中如果第2只次品在第4次找出或第3只正品在第4次找出时，测试必结束，故X的分布律为

X	2	3	4
P	A_2^2/A_5^2	$(C_2^1A_3^1A_2^2+A_3^3)/A_5^3$	$(C_3^1A_3^2A_2^2+C_3^2A_3^3A_2^1)/A_5^4$

即

X	2	3	4
P	1/10	3/10	6/10

(注) 可具体写出测试的所有可能结果来求：记 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次测试得正品;\\ 0, & 第i次测试得次品;\end{cases}$ $i=1,2,3,4,5$，所有结果为：

(0,0,1,1,1)，(0,1,0,1,1)，(1,0,0,1,1)，(1,1,1,0,0)，(0,1,1,0,1)
(1,0,1,0,1)，(1,1,0,0,1)，(1,1,0,1,0)，(1,0,1,1,0)，(0,1,1,1,0)

共10个，由此易得X的分布律，比用排列组合计算便当。

5. 进行重复独立试验，设每次试验成功的概率为p，失败的概率为$q=1-p$。

$(0<p<1)$，(1) 将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律（此时称 X 服从参数为 p 的几何分布）；(2) 将试验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律（此时称 Y 服从参数为 p 的巴斯卡分布）；(3) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%，以 X 表示他首次投入时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率。

解：(1) 设试验进行到第 K 次才出现一次成功，则前 K-1 次必都是不成功，故

$$P(X=K)=q^{K-1}\cdot p\quad(\text{或 }(1-p)^{K-1}\cdot p),\quad K=1,2,3,\cdots\cdots$$

(2) 设试验进行到第 K 次时出现第 r 次成功，则前 K-1 次试验中应出现 r-1 次成功，故

$$P(Y=K)=C_{K-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{(K-1)-(r-1)}\cdot p=C_{K-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{K-r},\quad K=r,r+1,\cdots$$

(3) X = "直到首次投篮命中时，累计的投篮次数"，服从参数 $p=0.45$ 的几何分布：$P(X=K)=(0.55)^{K-1}\cdot 0.45$，$K=1,2,3,\cdots$

$$\therefore P(X\text{取偶数})=\sum_{K=1}^{\infty}P(X=2K)=\sum_{K=1}^{\infty}(0.55)^{2K-1}\cdot 0.45=0.45\cdot\sum_{K=1}^{\infty}(0.55)^{2K-1}$$

$$=\frac{45}{100}\cdot\frac{\frac{55}{100}}{1-\left(\frac{55}{100}\right)^2}=\frac{11}{31}.\quad(\text{注：利用几何数列求和公式})$$

6*. 试卷中共有 10 道选择题，其中前四题每题 3 分，后六题每题 5 分。每道选择题都有 4 个答案，其中只有一个答案是正确的。如果每题都是随机选一个答案，问至少得 10 分的概率有多大？

解：记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 题答案正确；}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 题答案不正确。}\end{cases}$ 且

X_i	0	1
P	3/4	1/4

$i=1,2,\cdots,10$，相互独立。

设 $X=\text{"前四题中答案正确的题数"}=\sum_{i=1}^{4}X_i\sim B(4,\frac{1}{4})$；

$Y=\text{"后六题中答案正确的题数"}=\sum_{i=5}^{10}X_i\sim B(6,\frac{1}{4})$。

10 个题目总得分不满 10 分的情况为：① 10 题一题都没答正确（得 0 分）；② 仅答对前四题中的一题（得 3 分）；③ 仅答对后六题中的一题（得 5 分）；④ 仅答对前四题中的两题（得 6 分）；⑤ 答对前四题中一题和后六题中一题（得 8 分）；⑥ 答对前四题中的三题（得 9 分）；对应的概率为：

$P(\text{得0分})=P(X=0)P(Y=0)=C_4^0C_6^0(\frac{3}{4})^{10}=0.0563$；

$P(\text{得3分})=P(X=1)P(Y=0)=C_4^1C_6^0(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^9=0.0751$；

$P(\text{得5分})=P(X=0)P(Y=1)=C_4^0C_6^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^9=0.1126$；

$P(\text{得6分})=P(X=2)P(Y=0)=C_4^2C_6^0(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^8=0.0375$；

$P(\text{得8分})=P(X=1)P(Y=1)=C_4^1C_6^1(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^8=0.1502$；

$P(\text{得9分})=P(X=3)P(Y=0)=C_4^3C_6^0(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^7=0.0083$。

$\therefore P(\text{不满10分})=0.44$

$\therefore P(\text{至少10分})=1-P(\text{不满10分})=1-0.44=0.56$

7. 设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经过调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂。现该厂生产了 n 台仪器（$n\geq 2$，生产过程独立），求 (1) 全部能出厂的概率；(2) 至少有 2 件不能出厂的概率。

解：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 台仪器不能出厂；}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 台仪器可以出厂，}\end{cases}$ 且

X_i	0	1
P	0.94	0.06

$i=1,\cdots,n$ 相互独立。

又 $Y=$"n 台仪器中不能出厂的台数"$=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim B(n,0.06)$

(1) $P(\text{全部能出厂})=P(Y=0)=C_n^0(0.06)^0(0.94)^n=(0.94)^n$.

(2) $P(\text{至少有2台不能出厂})=P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$

$=1-C_n^0(0.94)^n-C_n^1\,0.06\cdot(0.94)^{n-1}=1-(0.94)^n-n\cdot 0.06\,(0.94)^{n-1}$.

(注) 可以出厂的产品的概率为 $0.7+0.3\times 0.8=0.94$.

8*. 已知每天到某炼油厂的油船数 $X\sim\pi(2)$，而港口的设备一天只能为三艘油船服务。如果一天中到达的油船数超过三艘，超出的油船必须转向另一港口，求：(1) 这一天中必须有油船转走的概率；(2) 设备增加到多少才能使每天到达港口的油船有 90% 可以得到服务？(3) 每天到达港口的油船最可能有几艘？

解. $X\sim\pi(2)$，$P(X=K)=\frac{2^K}{K!}e^{-2}\left(=\frac{2^K}{K!}\times 0.13534\right)$，$K=0,1,2,\cdots$

(1) $P(\text{一天中必须有油船转走})=P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)$

$-P(X=2)-P(X=3)=1-e^{-2}-2e^{-2}-2e^{-2}-\frac{4}{3}e^{-2}=1-\frac{19}{3}e^{-2}=0.14285$

(2) 设增加到一天能接 K 艘服务，使 $P(X\leq K)\geq 0.9$.

由 $P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=4)=7e^{-2}=0.94738$，故取 $K=4$.

(3) 因 $P(X=1)=P(X=2)=2e^{-2}$，都大于 $P(X=0)=e^{-2}$，$P(X=3)=\frac{4}{3}e^{-2}\cdots$

所以在每天到达港口的油船数中，最可能为一艘或两艘。

9*. 假设某地在任何长为 t（周）的时间内发生地震的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布。(1) 求相邻两周内至少发生 3 次地震的概率；(2) 求在连续 8 周无地震的情形下，在未来 8 周中仍无地震的概率。

解：$N(t)\sim\pi(\lambda t)$，$P\{N(t)=K\}=(\lambda t)^K e^{-\lambda t}/K!$，$K=0,1,2,\cdots$.

(1) $P(N(t)\geq 3)=1-P(N(t)<3)=1-P(N(t)=0)-P(N(t)=1)-P(N(t)=2)$

$=1-[e^{-2\lambda}+2\lambda e^{-2\lambda}+2\lambda^2e^{-2\lambda}]=1-(1+2\lambda+2\lambda^2)e^{-2\lambda}$.

(2) 设 $X=$"连续 8 周的时间内发生地震的次数"；

$Y=$"未来 8 周的时间内发生地震的次数"。

$P(\text{连续8周无地震的情形下，在未来8周中仍无地震})=P(Y=0/X=0)$

$=\frac{P[(X=0)\cap(Y=0)]}{\cdots}=\frac{P(N(16)=0)}{\cdots}=\frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}\cdots$

10.* 设一大型设备在任何长度为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布. (1) 求相继两次故障时间间隔 T 的分布函数；(2) 已知设备已无故障工作了 6 小时，求再无故障工作 6 小时的概率.

解：$N(t) \sim \pi(\lambda t)$. $P(X=k)=(\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$，$k=0,1,2,\cdots$.

(1) 设两次故障之间相隔的时间为 t，则

P(相继两次故障时间间隔 T 不大于 t) $= P(T\le t)$

$= P$(在时间长度为 t 内至少发生一次故障) $= P(N(t)\ge 1)$

即 $P(T\le t)=P(N(t)\ge 1)=1-P(N(t)<1)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$. $(t>0)$

而 $t<0$ 时. $P(T\le t)=P(\phi)=0$.

$\therefore$ T 的分布函数为：$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$ 即参数为 λ 的指数分布.

(2) 设 X = "设备在工作 6 小时内发生的故障数"；

Y = "设备在继续工作 6 小时内发生的故障数".

$$P(Y=0/X=0)=P[(X=0)\cap(Y=0)]/P(X=0)=\frac{P(N(12)=0)}{P(N(6)=0)}=\frac{e^{-12\lambda}}{e^{-6\lambda}}=e^{-6\lambda}.$$

11.* 设某种昆虫产卵数 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $(\lambda>0)$. 每个卵能够孵化成幼虫的概率为 p $(0<p<1)$. 且彼此独立. 求该种昆虫有 r 个后代的概率.

解：$X\sim\pi(\lambda)$. 若该种昆虫产 i 个卵，又设该种昆虫的后代数为 Y，则在产 i 个卵的条件下，孵化出 r 个后代的概率为条件概率：

$$P(Y=r/X=i)=C_i^r p^r(1-p)^{i-r},\quad i=0,1,2,\cdots,\quad r\le i.$$

$$\therefore P(\text{昆虫有 } r \text{ 个后代})=P(Y=r)=\sum_{i=r}^{\infty}P(X=i)P(Y=r/X=i)$$

$$=\sum_{i=r}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot C_i^r p^r(1-p)^{i-r}\ \underset{i=k+r}{\overset{\text{令 } k=i-r}{=\!=\!=}}\ \frac{p^r e^{-\lambda}}{r!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{r+k}}{k!}(1-p)^k$$

$$=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\lambda(1-p)]^k\cdot e^{-\lambda}=\frac{(\lambda p)^r}{r!}\cdot e^{\lambda(1-p)}\cdot e^{-\lambda}$$

$$=\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p},\quad r=0,1,2,\cdots.$$

即 $Y\sim\pi(\lambda p)$.

12. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax+b; & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 又已知：$P(X<\frac{1}{3})=P(X>\frac{1}{3})$. 试求常数 a 和 b.

解：由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(ax+b)dx=\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)\Big|_0^1=\frac{a}{2}+b$；

又 $P(X<\frac{1}{3})=\int_{-\infty}^{1/3}f(x)dx=\int_0^{1/3}(ax+b)dx=\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)\Big|_0^{1/3}=\frac{a}{18}+\frac{b}{3}$；

$P(X>\frac{1}{3})=\int_{1/3}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1/3}^{1}(ax+b)dx=\left(\frac{ax^2}{2}+bx\right)\Big|_{1/3}^{1}=\frac{8a}{18}+\frac{2b}{3}$.

$\therefore$ 有 $\begin{cases}\frac{a}{2}+b=1\\ \frac{a}{18}+\frac{b}{3}=\frac{8a}{18}+\frac{2b}{3}\end{cases}$；即 $\begin{cases}\frac{a}{2}+b=1;\\ \frac{7a}{18}+\frac{b}{3}=0;\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2}=-1.5;\\ b=\frac{7}{4}=1.75\end{cases}$

13. 设数据 X 和 Y 的取值是相互独立的. 它们都服从区间 $[1, 3]$ 上的均匀分布. 设事件 $A = “X < a”$, 事件 $B = “Y > a”$. 如果已知 $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$. 求常数 a.

解. $X \sim U[1, 3]$, $Y \sim U[1, 3]$ 相互独立.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < x < 3; \\ 0, & 其他, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < y < 3; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$P(A) = P\{X < a\} = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_1^a \frac{1}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\right)\Big|_1^a = \frac{a-1}{2};$$

$$P(B) = P\{Y > a\} = \int_a^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_a^3 \frac{1}{2}\,dx = \left(\frac{y}{2}\right)\Big|_a^3 = \frac{3-a}{2};$$

由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} - \frac{a-1}{2} \cdot \frac{3-a}{2} = \frac{a^2 - 4a + 7}{4}$.

$\therefore \frac{a^2 - 4a + 7}{4} = \frac{7}{9}$, 即 $9a^2 - 36a + 35 = 0$. 亦即 $(3a-5)(3a-7) = 0$

$\therefore a = \frac{5}{3}$ 或 $a = \frac{7}{3}$.

14. 设 $X \sim U(a, b)$, $0 < a < b$, 已知 $P(X > 4) = \frac{1}{2}$, $P(3 < X < 4) = \frac{1}{4}$.
(1) 求 X 的密度函数 $f(x)$; (2) 计算 $P(0 < X < 3)$.

解: $X \sim U(a, b)$. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

(1) $P(X > 4) = \int_4^{+\infty} f(x)\,dx = \int_4^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left(\frac{x}{b-a}\right)\Big|_4^b = \frac{b-4}{b-a}$;

$P(3 < X < 4) = \int_3^4 \frac{1}{b-a}\,dx = \left(\frac{x}{b-a}\right)\Big|_3^4 = \frac{1}{b-a}$;

$\therefore \begin{cases} \frac{b-4}{b-a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b-a} = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a + b = 8; \\ a - b = -4. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a = 2, \\ b = 6. \end{cases}$ $\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}; & 2 < x < 6 \\ 0. & 其他. \end{cases}$

(2) $P(0 < X < 3) = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4}\Big|_2^3 = \frac{1}{4}$.

15. 设随机变量 $X \sim N(18, 2.5^2)$, 求: (1) $P(17 < X < 21)$; (2) 求常数 K, 使 $P(X < K) = 0.2236$; (3) 求最大的 k 使 $P(X > K) \geqslant 0.1814$.

解: (1) $P(17 < X < 21) = \Phi\left(\frac{21-18}{2.5}\right) - \Phi\left(\frac{17-18}{2.5}\right) = \Phi(1.2) - \Phi(-0.4)$

$= \Phi(1.2) - (1 - \Phi(0.4)) = \Phi(1.2) + \Phi(0.4) - 1 = 0.8849 + 0.6554 - 1$

$= 0.5403$,

(2) $P(X < K) = \Phi\left(\frac{K-18}{2.5}\right) = 0.2236$, $\therefore \Phi\left(\frac{18-K}{2.5}\right) = 0.7764$.

$\therefore \frac{18-K}{2.5} = 0.76$, $\therefore K = 16.1$.

(3) $P(X > K) = 1 - P(X < K) = 1 - \Phi\left(\frac{K-18}{2.5}\right) \geqslant 0.1814$.

$\therefore \Phi\left(\frac{K-18}{2.5}\right) \leqslant 0.8186$, $\therefore \frac{K-18}{2.5} \leqslant 0.91$. $\therefore K \leqslant 20.275$

则最大的 $K = 20.275$

16. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$1/6$	$1/3$	$1/2$

，随机变量 $Y \sim U(0, X)$.

(1) 求 $P(Y \leqslant 0.5)$；(2) 计算 $P(X=1 / Y \leqslant 0.5)$.

解.(1) 设 X 取值为 K.（K=1.2.3），在此条件下.（$Y \leqslant 0.5$）的概率为：

$$P(Y \leqslant 0.5 / X=K) = \int_0^{0.5} \frac{1}{K} dy = \left(\frac{y}{K}\right)\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{2K}, \quad K=1,2,3.$$

$$\therefore P(Y \leqslant 0.5) = \sum_{K=1}^{3} P(X=K) P(Y \leqslant 0.5 / X=K) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

(2) $P(X=1 / Y \leqslant 0.5) = P[(X=1) \cap (Y \leqslant 0.5)] / P(Y \leqslant 0.5)$

$$= P(X=1) P(Y \leqslant 0.5 / X=1) / P(Y \leqslant 0.5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

17. 设某种电子管寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(160, \sigma^2)$. 若要求 $P(120 \leqslant X \leqslant 200) \geqslant 0.80$. 问允许 σ 最大为多少？

解：$P(120 \leqslant X \leqslant 200) = \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right)$

$$= 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geqslant 0.80. \quad \therefore \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geqslant 0.90.$$

则 $\frac{40}{\sigma} \geqslant 1.285$， $\therefore \sigma \leqslant 31.13$. 最大的 $\sigma = 31.13$.

18. 设某人造卫星偏离预定轨道的距离 $X \sim N(0, 4^2)$（单位：m），观测者把偏离值超过 10 m 时．称作"失败"．(1) 求 5 次独立观测中至少有 2 次"失败"的概率；(2) 已知 5 次独立观测中有一次"失败"．求 5 次观测中至少有 2 次"失败"的概率．

解．$P(\text{"失败"}) = P(|X| > 10) = P[(X > 10) \cup (X < -10)] = P(X>10) + P(X<-10)$

$$= 1 - P(X<10) + P(X<-10) = 1 - \Phi\left(\frac{10}{4}\right) + \Phi\left(\frac{-10}{4}\right) = 2(1 - \Phi(2.5))$$

$$= 2(1 - 0.9938) = 0.0124.$$

记 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次"失败"}; \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次未"失败"}. \end{cases}$ $P(X_i = 1) = P(|X| > 10) = 0.0124$. $i = 1, 2, \cdots, 5$.

又 Y = "5 次独立观测中"失败"的次数" $= \sum_{i=1}^{5} X_i \sim B(5, 0.0124)$.

(1) $P(Y \geqslant 2) = 1 - P(Y<2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$$= 1 - C_5^0 (0.9876)^5 - C_5^1 (0.0124)(0.9876)^4 = 0.0015.$$

(2) $P(Y \geqslant 2 / Y \geqslant 1) = P[(Y \geqslant 1) \cap (Y \geqslant 2)] / P(Y \geqslant 1) = \frac{P(Y \geqslant 2)}{P(Y \geqslant 1)}$.

$\because P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - C_5^0 (0.9875)^5 = 0.06048$

$\therefore P(Y \geqslant 2 / Y \geqslant 1) = 0.0015 / 0.06048 = 0.0248.$

19. 设成年男子身高 $X \sim N(170, 36)$．(1) 问应如何选择公共汽车门的高度 h，才能使男乘客与车门碰头的机会小于 0.01？(2) 若车门高 182 cm，求 100 个男子中与车门碰头的人数不多于 2 个的概率．

解．(1) P(男乘客与车门碰头) = $P(X \geqslant h) = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) < 0.01$

$\because \Phi(\frac{h-170}{6}) > 0.99$ ， $\therefore \frac{h-170}{6} > 2.325$ ， $\therefore h > 183.95$.

(2) $P(X \geq 182) = 1 - \Phi(\frac{182-170}{6}) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{人与车门碰头;} \\ 0, & \text{第}i\text{人不与车门碰头.} \end{cases}$ $P(X_i=1) = P(X \geq 182) = 0.0228$

$i = 1, 2, \cdots, 100$ ，相互独立.

又 $Y =$ "100个男子中与车门碰头的人数" $= \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, 0.0228)$.

$\therefore P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = C_{100}^{0}(0.9772)^{100} + C_{100}^{1} 0.0228 (0.9772)^{99}$
$+ C_{100}^{2}(0.0228)^2 \cdot (0.9772)^{98} = 0.09962 + 0.23243 + 0.26844 \doteq 0.6$.

(注) 可采用泊松分布 $\pi(np)$ 近似 $B(n, p)$. (当 $n \geq 20$, $p \leq 0.05$ 时).

则 $P(Y \leq 2) = e^{-2.28} + 2.28 e^{-2.28} + \frac{(2.28)^2}{2!} e^{-2.28}$
$= 0.10228 + 0.23321 + 0.26586 \doteq 0.6$

20. 在电源电压不超过200V，200V～240V和超过240V三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为0.1，0.001和0.2. 假设电源电压X服从正态分布 $N(220, 25^2)$. 试求：(1) 该电子元件损坏的概率；(2) 该电子元件损坏时，电源电压在200V～240V之间的概率.

解：$P(X \leq 200) = \Phi(\frac{200-220}{25}) = \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$.

$P(200 < X < 240) = \Phi(\frac{240-220}{25}) - \Phi(\frac{200-220}{25}) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8)$
$= 2\Phi(0.8) - 1 = 2 \times 0.7881 - 1 = 0.5762$,

$P(X \geq 240) = 1 - \Phi(\frac{240-220}{25}) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$.

(1) 由题意，设 A = "电子元件损坏"，则

$P(A/_{X \leq 200}) = 0.1$; $P(A/_{200<X<240}) = 0.001$; $P(A/_{X \geq 240}) = 0.2$.

所以 $P(A) = P(X \leq 200) \cdot P(A/_{X \leq 200}) + P(200 < X < 240) \cdot P(A/_{200<X<240})$
$+ P(X \geq 240) \cdot P(A/_{X \geq 240}) = 0.1 \times 0.2119 + 0.001 \times 0.5762$
$+ 0.2 \times 0.2119 = 0.0641$.

(2) $P(200 < X < 240 / A) = \frac{1}{P(A)} \cdot P[(200 < X < 240) \cap A]$
$= \frac{1}{P(A)} \cdot P(200 < X < 240) \cdot P(A/_{200<X<240}) = \frac{0.001 \times 0.5762}{0.0641}$
$= 0.009$.

21. 某学校计划招生800人，按考试成绩从高分到低分依次录取，设参加考试的3000人的考试成绩服从正态分布，且600分以上的有200人，500分以下的有2075人，求录取分数线应为多少？

$\because P(X>600)=1-\Phi(\frac{600-\mu}{\sigma})=\frac{200}{3000}=0.0667$;

$\therefore \Phi(\frac{600-\mu}{\sigma})=0.9333$, $\therefore \frac{600-\mu}{\sigma}=1.505$; 即 $600-\mu=1.505\sigma$;

又 $P(X<500)=\Phi(\frac{500-\mu}{\sigma})=\frac{2075}{3000}=0.6917$;

$\therefore \Phi(\frac{500-\mu}{\sigma})=0.6917$. $\therefore \frac{500-\mu}{\sigma}=0.505$. 即 $500-\mu=0.505\sigma$.

由 $\begin{cases}600-\mu=1.505\sigma; \\ 500-\mu=0.505\sigma.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}\mu=449.5; \\ \sigma=100.\end{cases}$ 则 $X\sim N(449.5, 100^2)$.

设分数线为 x 分. $P(X>x)=\frac{800}{3000}=0.2667$

即 $P(X\le x)=\Phi(\frac{x-449.5}{100})=1-P(X>x)=1-0.2667=0.7333$.

$\therefore \frac{x-449.5}{100}=0.625$. $\therefore x=512$ (分).

22. 设随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<\infty$.

求 (1) $Y=\arctan X$ 的密度函数; (2) $Z=1-\sqrt[3]{X}$ 的密度函数.

解: (1) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\arctan X\le y)=P(X\le\tan y)=F_X(\tan y)$

$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}F_X(\tan y)=f_X(\tan y)\cdot\sec^2 y$.

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi(1+\tan^2 y)}\cdot\sec^2 y; & -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, \\ 0. & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\pi}; & -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}; \\ 0. & 其他.\end{cases}$$

(2) $F_Z(u)=P(Z\le u)=P(1-\sqrt[3]{X}\le u)=P(X>(1-u)^3)=1-F_X((1-u)^3)$

$\therefore f_Z(u)=\frac{d}{du}F_Z(u)=\frac{d}{du}(1-F_X((1-u)^3))=-f_X((1-u)^3)\cdot(-3(1-u)^2)$

$$=\frac{1}{\pi[1-(1-u)^3]}\cdot 3(1-u)^2=\frac{3(1-u)^2}{\pi[1-(1-u)^6]}, \quad -\infty<u<+\infty.$$

23. 设 $X\sim U(-\frac{\theta}{2},\theta)$, 其中 $\theta>0$ 为常数, 求随机变量 $Y=|X|$ 的密度函数.

解: $X\sim U(-\frac{\theta}{2},\theta)$. $\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3\theta}; & -\frac{\theta}{2}<x<\theta; \\ 0. & 其他.\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$.

当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=P(\phi)=0$. $\therefore f_Y(y)=0$;

当 $y>0$ 时. $F_Y(y)=P(|X|\le y)=P(-y<X<y)=F_X(y)-F_X(-y)$.

$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[F_X(y)-F_X(-y)]=f_X(y)+f_X(-y)$

$$=\begin{cases}4/3\theta, & 0<y<\theta/2; \\ 2/3\theta, & \theta/2\le y<\theta. \\ 0 & y\ge\theta.\end{cases} \quad \therefore f_Y(y)=\begin{cases}4/3\theta, & 0<y<\theta/2; \\ 2/3\theta, & \theta/2\le y<\theta;\end{cases}$$

24.* 设随机变量X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

解：在 $0<y<1$ 时.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)=P[(X\le \arcsin y)\cup(\pi-X\le \arcsin y)]$$
$$=P(X\le \arcsin y)+P(X\ge \pi-\arcsin y)=F_X(\arcsin y)+1-F_X(\pi-\arcsin y)$$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}[F_X(\arcsin y)+1-F_X(\pi-\arcsin y)]$$
$$=f_X(\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-f_X(\pi-\arcsin y)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}[f_X(\arcsin y)+f_X(\pi-\arcsin y)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{2}{\pi^2}\arcsin y+\frac{2}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)\right]=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}; & 0<y<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$$

25. 设随机变量X的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. $-\infty<x<+\infty$.

(1) 求X的分布函数；(2) 设 $Y=\begin{cases}1, & X>0;\\ -1. & X\le 0.\end{cases}$ 求Y的分布函数.

解：(1) $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$.

当 $x\le 0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx=\left(\frac{1}{2}e^{x}\right)\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{x}$；

当 $x>0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{e^x}{2}\Big|_{-\infty}^{0}+\left(\frac{-e^{-x}}{2}\right)\Big|_{0}^{x}$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)=1-\frac{e^{-x}}{2}.$$

$$\therefore F_X(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{2}, & x\le 0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

(2) $P(Y=1)=P(X>0)=1-F_X(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

$P(Y=-1)=P(X\le 0)=F_X(0)=\frac{1}{2}$.

即

Y	-1	1
P	1/2	1/2

$$\therefore F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1;\\ \frac{1}{2}, & -1\le y<1\end{cases}$$

习题 3－1

1. 盒中有 4 个红球 1 个白球，从盒中任取两次，每次取一球，令

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到红球;}\\ 0, & \text{第一次取到白球.}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到红球;}\\ 0, & \text{第二次取到白球.}\end{cases}$$

求：(1) 在有放回抽样情形下，(X,Y) 的联合分布律；
(2) 在不放回抽样情形下，(X,Y) 的联合分布律.

解：(1) 有放回的情形：

$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{5^2}$，$P(X=0,Y=1)=\frac{1\cdot 4}{5^2}=\frac{4}{5^2}$，

$P(X=1,Y=0)=\frac{4}{5^2}$，$P(X=1,Y=1)=\frac{4^2}{5^2}$.

故

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$
1	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$

(2) 不放回情形：

$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{5}\cdot\frac{0}{4}=0$；$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{5}$，

$P(X=1,Y=0)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$；$P(X=1,Y=1)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$.

故

X \ Y	0	1
0	0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

2. 盒中有 4 个红球，1 个白球，3 个黑球，从盒中不放回的任取 4 球，试求取得红球数与白球数的联合分布.

解：设：X = "4 球中的红球数"；Y = "4 球中的白球数".

$P(X=0,Y=0)=0$；$P(X=0,Y=1)=\frac{C_4^0C_1^1C_3^3}{C_8^4}$；

$P(X=1,Y=0)=\frac{C_4^1C_1^0C_3^3}{C_8^4}$；$P(X=1,Y=1)=\frac{C_4^1C_1^1C_3^2}{C_8^4}$；

$P(X=2,Y=0)=\frac{C_4^2C_1^0C_3^2}{C_8^4}$；$P(X=2,Y=1)=\frac{C_4^2C_1^1C_3^1}{C_8^4}$；

$P(X=3,Y=0)=\frac{C_4^3C_1^0C_3^1}{C_8^4}$；$P(X=3,Y=1)=\frac{C_4^3C_1^1C_3^0}{C_8^4}$；

$P(X=4,Y=0)=\frac{C_4^4C_1^0C_3^0}{C_8^4}$；$P(X=4,Y=1)=0$.

∴

X \ Y	0	1
0	0	$\frac{1}{70}$
1	$\frac{4}{70}$	$\frac{12}{70}$
2	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$
3	$\frac{12}{70}$	$\frac{4}{70}$
4	$\frac{1}{70}$	0

3. 设 (X,Y) 的联合分布律.

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	a	0.20

求：(1) a；
(2) $P(X\le 0, Y\le 0)$；
(3) $P(X\le 0, Y<0)$.

解：(1) $1=\sum_i\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)=0.07+0.18+0.15+0.08+a+0.20$

$=0.68+a$，　∴ $a=0.32$.

(2) $P(X\le 0,Y\le 0)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)=0.07+0.18$

$=0.25$.

(3) $P(X\le 0, Y<0)=P(X=0, Y=-1)=0.07$

4. 甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为0.2，乙的命中率为0.5，以X和Y分别表示甲和乙的命中次数，试求X和Y的联合分布律.

解：设 X="甲两次射击命中数"，Y="乙两次射击命中数"

$\therefore X\sim B(2,0.2)$，$P(X=k)=C_2^k(0.2)^k(0.8)^{2-k}$，$k=0,1,2$.

$Y\sim B(2,0.5)$，$P(Y=k)=C_2^k(0.5)^k(0.5)^{2-k}$，$k=0,1,2$.

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)=C_2^i(0.2)^i(0.8)^{2-i}\cdot C_2^j(0.5)^j(0.5)^{2-j}$$

$$=C_2^iC_2^j(0.2)^i(0.5)^2(0.8)^{2-i}\qquad i,j=0,1,2.$$

$P(X=0,Y=0)=C_2^0C_2^0(0.2)^0(0.5)^2(0.8)^2=0.16$;

$P(X=0,Y=1)=C_2^0C_2^1(0.2)^0(0.5)^2(0.8)^2=0.32$;

$P(X=0,Y=2)=C_2^0C_2^2(0.2)^0(0.5)^2(0.8)^2=0.16$;

$P(X=1,Y=0)=C_2^1C_2^0(0.2)(0.5)^2(0.8)=0.08$;

$P(X=1,Y=1)=C_2^1C_2^1(0.2)(0.5)^2(0.8)=0.16$;

$P(X=1,Y=2)=C_2^1C_2^2(0.2)(0.5)^2(0.8)=0.08$;

$P(X=2,Y=0)=C_2^2C_2^0(0.2)^2(0.5)^2(0.8)^0=0.01$;

$P(X=2,Y=1)=C_2^2C_2^1(0.2)^2(0.5)^2(0.8)^0=0.02$;

$P(X=2,Y=2)=C_2^2C_2^2(0.2)^2(0.5)^2(0.8)^0=0.01$.

$\therefore$

X \ Y	0	1	2
0	0.16	0.32	0.16
1	0.08	0.16	0.08
2	0.01	0.02	0.01

$\overset{*}{1}$. 设 (X.Y) 的联合分布函数

$$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y),\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

(1) 求常数 A, B, C 的值；(2) 求 (X,Y) 的联合分布密度函数.

解：(1) 由 $F(x,-\infty)=A(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0$； ①

$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0$； ②

$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$. ③

由①得 $C=\frac{\pi}{2}$；由②得 $B=\frac{\pi}{2}$. 代入③得 $A=\frac{1}{\pi^2}$.

$\therefore F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$, $-\infty<x,y<+\infty$.

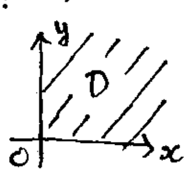
(2) $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, $-\infty<x,y<+\infty$.

2. 设 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}Ke^{-(3x+2y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：(1) 常数 K；(2) (X,Y) 的联合分布函数；(3) $P(X\leq Y)$.

解：(1)



由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=\iint_D Ke^{-(3x+2y)}dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}Ke^{-(3x+2y)}dxdy=\int_0^{+\infty}Ke^{-3x}(\frac{-e^{-2y}}{2})\Big|_0^{+\infty}dx$

$=\int_0^{+\infty}\frac{K}{2}e^{-3x}dx=\frac{K}{6}(-e^{-3x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{K}{6}$, $\therefore K=6$.

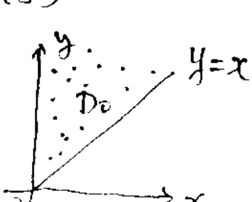
(2) 当 $x>0,y>0$ 时，

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dxdy=\int_0^x\int_0^y 6e^{-(3x+2y)}dxdy=\int_0^x 3e^{-3x}dx\cdot\int_0^y 2e^{-2y}dy$

$=(-e^{-3x})\Big|_0^x\cdot(-e^{-2y})\Big|_0^y=(1-e^{-3x})(1-e^{-2y})$

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-2y}), & x>0,y>0.\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

(3)



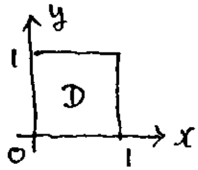
$P(X\leq Y)=\iint_{x\leq y}f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_0}6e^{-(3x+2y)}dxdy$

$=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}6e^{-3x}e^{-2y}dy=\int_0^{+\infty}3e^{-3x}(-e^{-2y})\Big|_x^{+\infty}dy$

3. 设 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x)=\begin{cases} Kxy, & 0\le x,\ y<1. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求常数 K 及下列随机事件的概率：(1) $P(X\le\frac{1}{2},\ Y\le\frac{1}{2})$，
(2) $P(X+Y>\frac{1}{2})$；(3) $P(X>\frac{1}{2})$；(4) $P(X=\frac{1}{2})$；(5) $P(X=Y)$.

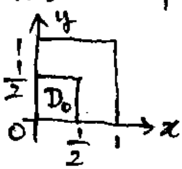
解：



由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D Kxy\,dx\,dy=\int_0^1 Kx\,dx\int_0^1 y\,dy$

$=K\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{K}{4}$，$\therefore K=4$.

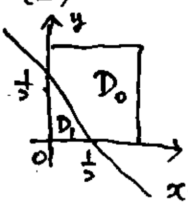
(1)



$P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=\iint\limits_{\substack{x\le\frac{1}{2}\\ y\le\frac{1}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_0} 4xy\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} 2y\,dy$

$=(x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}}(y^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

(2)

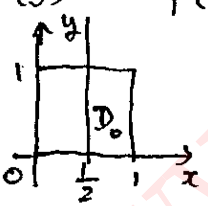


$P(X+Y>\frac{1}{2})=\iint\limits_{x+y>\frac{1}{2}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_0} 4xy\,dx\,dy=1-\iint_{D_1} 4xy\,dx\,dy$

$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{2}-x}4xy\,dy=1-\int_0^{\frac{1}{2}}2x(y^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}-x}dx=1-\int_0^{\frac{1}{2}}2x(\frac{1}{2}-x)^2dx$

$=1-\int_0^{1/2}(\frac{x}{2}-2x^2+2x^3)\,dx=1-(\frac{x^2}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^4}{4})\Big|_0^{1/2}=1-\frac{1}{96}=\frac{95}{96}$.

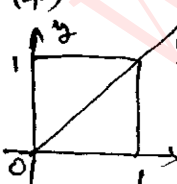
(3)



$P(X>\frac{1}{2})=\iint\limits_{x>\frac{1}{2}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D_0}4xy\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_0^1 4xy\,dy$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 2x\,dx\cdot\int_0^1 2y\,dy=(x^2)\Big|_{\frac{1}{2}}^1(y^2)\Big|_0^1=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

(4)



$P(X=Y)=\iint\limits_{x=y} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\substack{x=y\\0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} 4xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^x 4xy\,dy$

$=0$

习题 3－3

1*. 设 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right),\quad -\infty<x,y<+\infty$$

求关于 X, Y 的边缘分布函数.

解：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$

$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{y\to+\infty}\arctan\frac{y}{3}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right),\ -\infty<x<+\infty$;

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$

$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right);\ -\infty<y<+\infty.$

2. 设 (X, Y) 的可能取值为 (0,0), (−1,1), $(-1,\frac{1}{3})$, (2,0), $(2,\frac{1}{3})$. 相应的概率为 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$. (1) 列表表示其联合分布律；(2) 求关于 X, Y 的边缘分布律.

解：(1)

X \ Y	0	$\frac{1}{3}$	1
−1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0

(2)

X	−1	0	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$

;

Y	0	$\frac{1}{3}$	1
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$

;

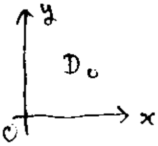
3. 设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，分别求关于 X, Y 的边缘密度函数.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0,y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$　(2) $f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y), & 0<x,y<1,\\ 0. & 其他.\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x); & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x;\\ 0 & 其他.\end{cases}$

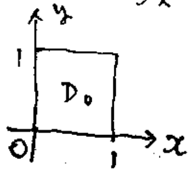
(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},\quad -\infty<x,y<+\infty.$

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}4xye^{-(x^2+y^2)}dy=2xe^{-x^2}\int_0^{+\infty}2ye^{-y^2}dy$

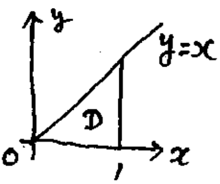


$=2xe^{-x^2}\cdot\left(-e^{-y^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=2xe^{-x^2},\quad (x>0).$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0;\\ 0. & 其他.\end{cases}$

(2) 

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 6xy(2-x-y)dy=\int_0^1(12xy-6x^2y-6xy^2)dy$$
$$=6x(2-x)\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1-2x(y^3)\Big|_0^1=3x(2-x)-2x=4x-3x^2,\ 0<x<1$$
$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}4x-3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 6xy(2-x-y)dx=\int_0^1(12xy-6x^2y-6xy^2)dx$$
$$=6y(x^2)\Big|_0^1-2y(x^3)\Big|_0^1-3y^2(x^2)\Big|_0^1=6y-2y-3y^2=4y-3y^2,\ 0<y<1$$
$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}4y-3y^2, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=4.8(2-x)\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x$$
$$=2.4x(2-x),\qquad 0<x<1.$$
$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}2.4x(2-x), & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=9.6y(x)\Big|_y^1-4.8y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^1$$
$$=9.6y(1-y)-2.4y(1-y^2)=2.4y(3-4y+y^2),\quad 0<y<1.$$
$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)}(\arctan y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty;$$
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\pi^2(1+y^2)}(\arctan x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{\pi(1+y^2)},\quad -\infty<y<+\infty.$$

4.* 设 (X,Y) 服从二维正态分布. (1) 当参数 $\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1^2=25,\sigma_2^2=9,\rho=\frac{3}{5}$ 时, 写出 (X,Y) 的联合密度函数和边缘密度函数; (2) 若 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\exp\{-\frac{1}{6}[4(x-4)^2-6(x-4)(y+1)+9(y+1)^2]\}$, $-\infty<x,y<+\infty$. 求参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 和 ρ, 并写出 X,Y 的边缘密度函数.

解: $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的联合密度函数

$f(x,y)=\frac{1}{\ \ }\exp\{-\frac{1}{\ }[\frac{(x-\mu_1)^2}{\ }-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\ }+\frac{(y-\mu_2)^2}{\ }]\}$ ...

(1) 显然 $(X,Y)\sim N(1,-1;25,9;\frac{3}{5})$，联合密度函数：

$$f(x,y)=\frac{1}{24\pi}\exp\left\{\frac{-1}{288}\left[9(x-1)^2-18(x-1)(y+1)+25(y+1)^2\right]\right\}\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{24\pi}\exp\left\{\frac{-1}{288}\left[9(x-1)^2-18(x-1)(y+1)+25(y+1)^2\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{24\pi}\exp\left\{-\frac{25}{32}\left[\left(\frac{x-1}{5}\right)^2-\frac{6}{5}\left(\frac{x-1}{5}\right)\left(\frac{y+1}{3}\right)+\left(\frac{y+1}{3}\right)^2\right]\right\}dy$$

$$\underline{\underline{令 u=\frac{x-1}{5},\ v=\frac{y+1}{3}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8\pi}\exp\left\{-\frac{25}{32}\left[u^2-\frac{6}{5}u\cdot v+v^2\right]\right\}dv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8\pi}\exp\left\{-\frac{25}{32}\left[\frac{16}{25}u^2+\left(\frac{9}{25}u^2-\frac{6}{5}u\cdot v+v^2\right)\right]\right\}dv$$

$$=\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{25}{32}\left(v-\frac{3}{5}u\right)^2}dv.\quad 令\ t=\frac{5\left(v-\frac{3}{5}u\right)}{4}，则$$

$$f_X(x)=\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{4}{5}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}e^{-\frac{u^2}{2}}\ \underline{\underline{\frac{x-1}{5}=u}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 5}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 5^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

即 $X\sim N(1,5^2)$

同理可得：$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3}e^{-\frac{(y+1)^2}{2\cdot 3^2}}$，$-\infty<y<+\infty$.

即 $Y\sim N(-1,3)$.

(注)：一般当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 时，

则可得 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，反之不一定。

(2) $$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{6}\left[4(x-4)^2-6(x-4)(y+1)+9(y+1)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{4}{6}\left[\left(\frac{x-4}{1}\right)^2-\left(\frac{x-4}{1}\right)\left(\frac{y+1}{2/3}\right)+\left(\frac{y+1}{2/3}\right)^2\right]\right\}$$

$\therefore\ \mu_1=4,\ \mu_2=-1;\ \sigma_1^2=1,\ \sigma_2^2=\frac{4}{9},\ \rho=\frac{1}{2}$.

则 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1}e^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 1^2}}$，$-\infty<x<+\infty$. 即 $X\sim N(4,1)$

$f_Y(y)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{(y+1)^2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}}$，$-\infty<y<+\infty$. 即 $Y\sim N(-1,\frac{4}{9})$

习题 3－4 *

1. 盒子中有6个球，分别标有号码 1，1，2，2，2，3．不放回地随机取2个球，用X和Y分别表示取得的第一个球与第二个球的号码．(1) 求 (X,Y) 的联合分布律．(2) 求关于X,Y的边缘分布律，(3) 分别求X在 Y=1，Y=2 和 Y=3 下的条件分布律．

解．记 X＝"第一个球的号码"；Y＝"第二个球的号码"

(1) 注意取球有序．故用乘法公式 $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y/X=x)$．

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}$
2	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{0}{5}$

$\Longrightarrow$

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$
2	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{3}{30}$
3	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	0

(2)

X	1	2	3
P	2/6	3/6	1/6

，

Y	1	2	3
P	2/6	3/6	1/6

．

(3)* $P(X=1/Y=1)=P(X=1,Y=1)/P(Y=1)=\frac{2}{30}/\frac{2}{6}=\frac{1}{5}$；

$P(X=2/Y=1)=P(X=2,Y=1)/P(Y=1)=\frac{6}{30}/\frac{2}{6}=\frac{3}{5}$；

$P(X=3/Y=1)=P(X=3,Y=1)/P(Y=1)=\frac{2}{30}/\frac{2}{6}=\frac{1}{5}$．

∴

X	1	2	3
$P(X=x/Y=1)$	1/5	3/5	1/5

．

$P(X=1/Y=2)=P(X=1,Y=2)/P(Y=2)=\frac{6}{30}/\frac{3}{6}=\frac{2}{5}$；

$P(X=2/Y=2)=P(X=2,Y=2)/P(Y=2)=\frac{6}{30}/\frac{3}{6}=\frac{2}{5}$．

$P(X=3/Y=2)=P(X=3,Y=2)/P(Y=2)=\frac{3}{30}/\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$．

∴

X	1	2	3
$P(X=x/Y=2)$	2/5	2/5	1/5

；

$P(X=1/Y=3)=P(X=1,Y=3)/P(Y=3)=\frac{2}{30}/\frac{1}{6}=\frac{2}{5}$，

$P(X=2/Y=3)=P(X=2,Y=3)/P(Y=3)=\frac{3}{30}/\frac{1}{6}=\frac{3}{5}$．

$P(X=3/Y=3)=P(X=3,Y=3)/P(Y=3)=0/\frac{1}{6}=0$．

∴

X	1	2	3
$P(X=x/Y=3)$	2/5	3/5	0

．

2. 令X表示某一医院一天新生婴儿的个数，Y表示其中男孩的个数．设 (X,Y) 的联合分布律：

$$P(X=i,Y=j)=\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-14}\qquad i=0,1,2,3,\cdots \quad j=0,1,2,\cdots,i.$$

(1) 求关于X,Y的边缘分布律；(2) 求条件分布律 $P(X=i/Y=j)$ 和 $P(Y=j/X=i)$

解：$P(X=i)=\sum_{j=0}^{i}\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}e^{-14}=\frac{e^{-14}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}(7.14)^j(6.86)^{i-j}$

$=\frac{e^{-14}}{i!}(7.14+6.86)^i=\frac{14^i}{i!}e^{-14}\quad i=0,1,2,\cdots$

$$P(Y=j)=\sum_{i=j}^{\infty}\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!\,(i-j)!}e^{-14}=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-14}\cdot\sum_{i=j}^{\infty}\frac{(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}$$

$$\underline{\underline{令K=i-j}}\ \frac{(7.14)^j}{j!}e^{-14}\cdot\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(6.86)^K}{K!}=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-14}e^{6.86}=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14}.\quad j=0,1,2,\cdots$$

$\therefore\ X\sim\pi(14),\ Y\sim\pi(7.14).$

(2)* $$P(X=i/Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}=\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}e^{-14}}{j!(i-j)!}\Big/\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14}$$

$$=\frac{(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}e^{-6.86}.\quad i=j,j+1,j+2,\cdots$$

$$P(Y=j/X=i)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}=\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}e^{-14}}{j!(i-j)!}\Big/\frac{(14)^i}{i!}e^{-14}$$

$$=\frac{i!}{j!(i-j)!}(7.14)^j(6.86)^{i-j}=C_i^j(7.14)^j(6.86)^{i-j}.\quad j=0,1,2,\cdots,i$$

3*. (X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$, 分别求条件密度函数 $f_{X|Y}(x/y)$ 和 $f_{Y|X}(y/x)$

(1) $f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}; & x>0,y>0.\\ 0. & 其他.\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y); & 0<x,y<1,\\ 0. & 其他.\end{cases}$

解: (1) 由习题3-3第3题(1)得

$$f_X(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0;\\ 0. & 其他.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}2ye^{-y^2}. & y>0;\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2ye^{-y^2}}, & x>0.\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{4xye^{-(x^2+y^2)}}{2xe^{-x^2}}; & y>0.\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}2ye^{-y^2}, & y>0;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

(2) 由习题3-3第3题(2)得:

$$f_X(x)=\begin{cases}4x-3x^2; & 0<x<1;\\ 0. & 其他.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4y-3y^2; & 0<y<1.\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时.

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{6xy(2-x-y)}{4y-3y^2}. & 0<x<1;\\ 0 & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{6x(2-x-y)}{4-3y}; & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{6xy(2-x-y)}{4x-3x^2}; & 0<y<1;\\ 0 & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{6y(2-x-y)}{4-3x}; & 0<y<1;\\ \ldots\end{cases}$$

习题 3－5

1. 判别习题3－4第1题中的X与Y是否独立？说明理由.

解. (X,Y)的联合分布律与边缘分布律为:

X\Y	1	2	3	X
1	2/30	6/30	2/30	10/30
2	6/30	6/30	3/30	15/30
3	2/30	3/30	0	5/30
Y	10/30	15/30	5/30	

$\because P(X=1,Y=1)=2/30=\frac{1}{15}$.

而 $P(X=1)P(Y=1)=\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{30}=\frac{1}{9}$.

$\therefore P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)$

$\therefore$ X, Y 不独立.

2. 判别习题3－3第3题中的X与Y是否独立？说明理由.

解: (1) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}, & x>0,\ y>0;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$ $Y\sim f_X(y)=\begin{cases}2ye^{-y^2}, & y>0;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

显然有 $f(x,y)=\begin{cases}4xye^{-(x^2+y^2)}: & x>0,y>0\\ 0. & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2xe^{-x^2}\cdot 2ye^{-y^2}; & x>0,y>0\\ 0; & \text{其他}\end{cases}=f_X(x)f_Y(y)$

$\therefore$ X, Y 相互独立.

(2) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y). & 0<x,y<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}4x-3x^2, & 0<x<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$ $Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}4y-3y^2, & 0<y<1;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$

$\because$ 在 $0<x,y<1$ 时. 有

$f(x,y)=6xy(2-x-y)\neq(4x-3x^2)(4y-3y^2)=f_X(x)f_Y(y)$.

$\therefore$ X, Y 不相互独立.

(3) $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x); & 0\le x\le 1.\ 0\le y\le x;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$X\sim f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$ $Y\sim f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\le y\le\\ 0. & \text{其他}\end{cases}$

$\because$ 在 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$ 时. 有

$f(x,y)=4.8y(2-x)\neq 2.4x^2(2-x)\cdot 2.4y(3-4y+y^2)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

$\therefore$ X, Y 不相互独立.

(4) $(X,Y)\sim f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$, $-\infty<x,y<+\infty$.

$X\sim f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<+\infty$; $Y\sim f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ $-\infty<y<+\infty$.

显然有 $f(x,y)=f\cdots$

3.* 设(X,Y)的联合分布律如下表所示，问表中 x，y 取何值时，X与Y相互独立？

解：

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	x	y

则关于 X，Y 的边缘分布律为：

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+x+y$

和

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+x$	$\frac{1}{18}+y$

当 X，Y 相互独立时，满足：

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$，则 $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}(\frac{1}{9}+x)$ $\therefore x=\frac{2}{9}$；

$P(X=1,Y=3)=P(X=1)P(Y=3)$，则 $\frac{1}{18}=\frac{1}{3}(\frac{1}{18}+y)$，$\therefore y=\frac{1}{9}$.

而当 $x=\frac{2}{9}$，$y=\frac{1}{9}$ 时，可以验证得其余各关系也成立，即

$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=P(X=1)P(Y=1)$；

$P(X=2,Y=1)=\frac{1}{3}=(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=P(X=2)P(Y=1)$.

$P(X=2,Y=2)=\frac{2}{9}=(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9})(\frac{1}{9}+\frac{2}{9})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=P(X=2)P(Y=2)$

$P(X=2,Y=3)=\frac{1}{9}=(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9})\cdot(\frac{1}{18}+\frac{1}{9})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=P(X=2)P(Y=3)$.

故 $x=\frac{2}{9}$，$y=\frac{1}{9}$ 时，X，Y 相互独立.

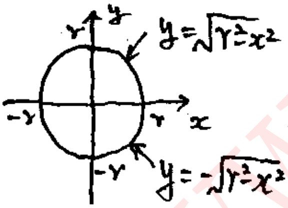
4. 设(X,Y)服从区域D上均匀分布：

(1) 若 D：$x^2+y^2\le r^2$，问 X与Y是否独立？

(2) 若 D：$a<x<b$，$c<y<d$，问X与Y是否相互独立？

解 (1) (X,Y)服从区域 D：$x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布，$S_D=\pi r^2$.

$\therefore (X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2.\\ 0, & 其他.\end{cases}$



$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{(y)}{\pi r^2}\Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}$

$=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}$ $(-r\le x\le r)$.

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}; & -r\le x\le r;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

同理可得 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}, & -r\le y\le r;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$\because$ 在 $x^2+y^2\le r^2$ 时，有

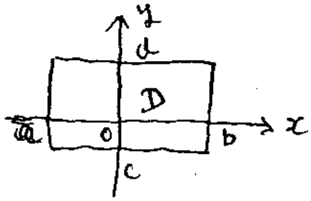
$f(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\ne\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

$\therefore$ X，Y 不独立.

(2) (X,Y)服从区域 D：$a\le x\le b$，$c\le y\le d$ 上的均匀分布.

$S_D=(b-a)(d-c)$，故

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\quad}{(b-a)(d-c)}; & a\le x\le b,\ c\le y\le d, \\ 0 & 其他.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_c^d\frac{dy}{(b-a)(d-c)}=\frac{1}{b-a},\quad a<x<b.$$

$$\therefore\ f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b; \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^b\frac{dx}{(b-a)(d-c)}=\frac{1}{d-c},\quad c<y<d.$$

$$\therefore\ f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c<y<d; \\ 0. & 其他.\end{cases}$$

由 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a<x<b,\ c<y<d \\ 0. & 其他\end{cases}=f_X(x)\cdot f_Y(y).$

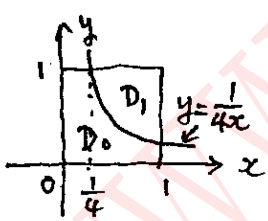
$\therefore$ X, Y 相互独立.

5. 设 $X\sim U(0,1)$, $Y\sim U(0,1)$, 且 X 与 Y 相互独立, 求关于 Z 的二次方程 $XZ^2+Z+Y=0$ 有实根的概率.

解: 二次方程 $XZ^2+Z+Y=0$ 有实根的充分必要条件为它的判别式 $\Delta=1-4XY\geqslant 0$. 故

$$P(二次方程\ XZ^2+Z+Y=0\ 有实根)=P(\Delta=1-4XY\geqslant 0)$$

$$=P\left(XY\leqslant\frac{1}{4}\right)=1-P\left(XY>\frac{1}{4}\right)=1-\iint\limits_{xy>\frac14}f(x,y)\,dxdy$$



$$=1-\iint\limits_{D_1}f_X(x)f_Y(y)\,dxdy.$$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1; \\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1; \\ 0. & 其他.\end{cases}$$

$$\therefore\ P\left(XY\le\frac14\right)=1-\iint\limits_{D_1}dxdy=1-\int_{\frac14}^1dx\int_{\frac{1}{4x}}^1dy=1-\int_{\frac14}^1\left(1-\frac{1}{4x}\right)dx$$

$$=1-\left(x-\frac{\ln x}{4}\right)\Bigg|_{1/4}^1=1-\left[\left(1-\frac{\ln 1}{4}\right)-\left(\frac14-\frac{\ln\frac14}{4}\right)\right]$$

$$=1-\left(\frac34-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac14+\frac12\ln 2.$$

习题3-6

1. 设(X,Y)的联合分布律表为

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
-1	4/20	3/20	2/20	6/20
1	2/20	0	2/20	1/20

求：(1) $Z_1=X+Y$；
(2) $Z_2=XY$；
(3) $Z_3=\max(X,Y)$；
(4) $Z_4=\min(X,Y)$ 的分布律.

解：(1)

$X+Y$	$(-1)+(-1)$	$(-1)+0$	$(-1)+1$	$(-1)+2$	$(1)+(-1)$	$(1)+0$	$(1)+(1)$	$(1)+(2)$
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

$X+Y$	-2	-1	0	1	0	1	2	3
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

Z_1	-2	-1	0	1	2	3
P	4/20	3/20	4/20	6/20	2/20	1/20

；

(2)

XY	$(-1)(-1)$	$(-1)(0)$	$(-1)(1)$	$(-1)(2)$	$(1)\cdot(-1)$	$(1)\cdot(0)$	$(1)\cdot(1)$	$(1)\cdot(2)$
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

XY	1	0	-1	-2	-1	0	1	2
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

Z_2	-2	-1	0	1	2
P	6/20	4/20	3/20	6/20	1/20

；

(3)

$\max(X,Y)$	$\max(-1,-1)$	$\max(-1,0)$	$\max(-1,1)$	$\max(-1,2)$
P	4/20	3/20	2/20	6/20

$\max(1,-1)$	$\max(1,0)$	$\max(1,1)$	$\max(1,2)$
2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

$\max(X,Y)$	-1	0	1	2	1	1	1	2
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

Z_3	-1	0	1	2
P	4/20	3/20	6/20	7/20

(4)

$\min(X,Y)$	$\min(-1,-1)$	$\min(-1,0)$	$\min(-1,1)$	$\min(-1,2)$
P	4/20	3/20	2/20	6/20

$\min(1,-1)$	$\min(1,0)$	$\min(1,1)$	$\min(1,2)$
2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

$\min(X,Y)$	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1
P	4/20	3/20	2/20	6/20	2/20	0	2/20	1/20

$\Rightarrow$

Z_4	-1	0	1

即

Z_4	-1	1

2.* 设 $X\sim B(n_1,p)$，$Y\sim B(n_2,p)$ 且 X 与 Y 相互独立，证明：$Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$

证：方法一：$\because P(X=i)=C_{n_1}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1-i}$，$i=0,1,2,\cdots,n_1$；

$P(Y=j)=C_{n_2}^{j}p^{j}(1-p)^{n_2-j}$，$j=0,1,2,\cdots,n_2$.

$\therefore P(X+Y=k)=\sum\limits_{i+j=k}P(X=i,Y=j)=\sum\limits_{i+j=k}P(X=i)P(Y=j)$

$=\sum\limits_{i+j=k}C_{n_1}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1-i}\cdot C_{n_2}^{j}p^{j}(1-p)^{n_2-j}=\sum\limits_{i+j=k}C_{n_1}^{i}C_{n_2}^{j}p^{k}(1-p)^{n_1+n_2-k}$

$=C_{n_1+n_2}^{k}p^{k}(1-p)^{n_1+n_2-k}$. 其中 $C_{n_1+n_2}^{k}=\sum\limits_{i=0}^{k}C_{n_1}^{i}C_{n_2}^{k-i}=\sum\limits_{i+j=k}C_{n_1}^{i}C_{n_2}^{j}$

$\therefore X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$.

方法二：用构造法. 设 $\begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$，$i=1,2,\cdots,n_1,n_1+1,\cdots,n_1+n_2$，

且相互独立. 记 $X=\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i$，$Y=\sum\limits_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j$，则 $X\sim B(n_1,p)$，$Y\sim B(n_2,p)$ 相互独立，

则 $X+Y=\sum\limits_{i=1}^{n_1}X_i+\sum\limits_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}X_j=\sum\limits_{k=1}^{n_1+n_2}X_k\sim B(n_1+n_2,p)$.

3. 设 $X\sim\pi(\lambda_1)$，$Y\sim\pi(\lambda_2)$，且 X 与 Y 相互独立，证明：$Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$

证：$P(X=i)=\dfrac{\lambda_1^{i}}{i!}e^{-\lambda_1}$；$P(Y=j)=\dfrac{\lambda_2^{j}}{j!}e^{-\lambda_2}$，$i,j=0,1,2,\cdots$

$\because P(X+Y=k)=\sum\limits_{i+j=k}P(X=i,Y=j)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$

$=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{\lambda_1^{i}}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}$

$=\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\lambda_1^{i}\lambda_2^{k-i}\cdot\dfrac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\dfrac{1}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^{i}\lambda_1^{i}\lambda_2^{k-i}$

$=\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^{k}}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$，$k=0,1,2,\cdots$.

$\therefore X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

4. 设 X,Y 的密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0；\\ 0, & 其他.\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0；\\ 0, & 其他.\end{cases}$

且 X,Y 相互独立. 求 $Z=X+Y$ 的分布.

解：$f_{X+Y}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(u-x)dx$，$-\infty<u<+\infty$

由 $\begin{cases}x>0\\ u-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ u>x\end{cases}$ 即 $u>x>0$ 时 $f_X(x)f_Y(u-x)\neq0$

$\therefore$ 在 $u>0$ 时，

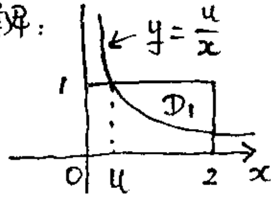
$f_{X+Y}(u)=\int_0^{u}3e^{-3x}\cdot2e^{-2(u-x)}dx=\int_0^{u}6e^{-2u}\cdot e^{-x}dx=6e^{-2u}(-e^{-x})\Big|_0^{u}$

$=6e^{-2u}(1-e^{-u})$.

故 $Z=X+Y$ 的分布为密度函数 $f(u)=\begin{cases}6e^{-2u}(1-e^{-u}), & u>0；\end{cases}$

5*. 设 (X,Y) 服从矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布. 求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的分布.

解:



$$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 $S=XY$, 其分布函数为 $F_S(u)$;

当 $u\le 0$ 时, $F_S(u)=P\{S\le u\}=P(\varnothing)=0$;

当 $0<u<2$ 时, $F_S(u)=P\{S\le u\}=P(XY\le u)= \quad -P(XY>u)$

$$=1-\iint\limits_{xy>u} f(x,y)\,dxdy=1-\iint\limits_{D_1}\frac{1}{2}\,dxdy=1-\int_u^2 dx\int_{u/x}^1\frac{1}{2}\,dy=1-\int_u^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{x}\right)dx$$

$$=\quad \frac{1}{2}(x-u\ln x)\Big|_u^2=1-\frac{1}{2}\left[(2-u\ln 2)-(u-u\ln u)\right]$$

$$=\frac{u}{2}(1+\ln 2-\ln u).$$

当 $u\ge 2$ 时, $F_S(u)=P(XY\le u)=\iint\limits_{D}\frac{1}{2}\,dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{1}{2}\,dy=1$.

$$\therefore F_S(u)=\begin{cases}0; & u\le 0;\\ \frac{u}{2}(1+\ln 2-\ln u), & 0<u<2;\\ 1. & u\ge 2.\end{cases}$$

$$\therefore f_S(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln u); & 0<u<2;\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$$

6. 已知 $X\sim N(-3,1)$, $Y\sim N(2,1)$, 且 X 与 Y 相互独立. 求 $Z=X-2Y$ 的分布.

解: 由定理 3.3 知: 相互独立的正态变量的线性组合服从正态分布.

即 $X_K\sim N(\mu_K,\sigma_K^2)$, $K=1,\cdots,n$ 相互独立. 则对不全为零的常数 a_K, $K=1,\cdots,n$ 有 $\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\sim N\left(\sum\limits_{K=1}^n a_K\mu_K,\ \sum\limits_{K=1}^n a_K^2\sigma_K^2\right)$.

故 $Z=X-2Y\sim N[(-3)-2\times 2,\ 1+4\times 1]$ 即 $Z\sim N(-7,5)$.

(注) 根据第四章数字特征知: $X_K\sim N(\mu_K,\sigma_K^2)$, $K=1,\cdots,n$ 相互独立. 则对不全为零的常数 a_K, $K=1,2,\cdots,n$. 有 $\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\sim N(\mu,\sigma^2)$.

其中 $\mu=E\left(\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\right)$. $\sigma^2=D\left(\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\right)$.

利用数学期望与方差的运算性质: 由 $a_K X_K$, $K=1,\cdots,n$ 相互独立.

则 $\mu=E\left(\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\right)=\sum\limits_{K=1}^n a_K E(X_K)=\sum\limits_{K=1}^n a_K\mu_K$;

$\sigma^2=D\left(\sum\limits_{K=1}^n a_K X_K\right)=\sum\limits_{K=1}^n a_K^2 D(X_K)=\sum\limits_{K=1}^n a_K^2\cdot\sigma_K^2$.

复习题 3

1. 设A, B是两个随机事件, 且 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(AB)=\frac{1}{12}$, 令

$X=\begin{cases}1; & A发生;\\ 0, & A不发生.\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1; & B发生;\\ 0, & B不发生.\end{cases}$ 求: 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律.

解: $P(X=1)=P(A)=\frac{1}{4}$, $P(X=0)=P(\bar{A})=\frac{3}{4}$;

$P(Y=1)=P(B)=\frac{1}{6}$, $P(Y=0)=P(\bar{B})=\frac{5}{6}$;

$P(X=0,Y=0)=P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$

$=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12})=\frac{2}{3}$;

$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}\cdot B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$;

$P(X=1,Y=0)=P(A\cdot\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$;

$P(X=1,Y=1)=P(A\cdot B)=\frac{1}{12}$.

$\therefore$

X \ Y	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

2. 设随机变量Y服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布, 随机变量 $X_K=\begin{cases}0, & Y\le K;\\ 1, & Y>K.\end{cases}$ $(K=1,2)$. 求 X_1, X_2 的联合分布律.

解: Y的分布函数 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y>0;\\ 0. & y\le 0.\end{cases}$

$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1, Y\le 2)=P(Y\le 1)=F_Y(1)=1-e^{-1}$;

$P(X_1=0,X_2=1)=P(Y\le 1, Y>2)=P(\phi)=0$;

$P(X_1=1,X_2=0)=P(Y>1, Y\le 2)=P(1<Y\le 2)=F_Y(2)-F_Y(1)$

$=(1-e^{-2})-(1-e^{-1})=e^{-1}-e^{-2}$;

$P(X_1=1,X_2=1)=P(Y>1, Y>2)=P(Y>2)=1-F_Y(2)=1-(1-e^{-2})=e^{-2}$.

$\therefore$

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

3. 设 (X,Y) 的联合分布律

X \ Y	0	1
0	1/25	4/25
1	4/25	16/25

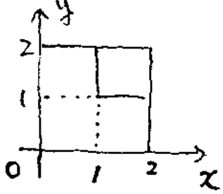
, 求 $F(2,\frac{1}{2})$.

解: $F(2,\frac{1}{2})=P(X\le 2, Y\le\frac{1}{2})=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)$

$=\frac{1}{25}+\frac{4}{25}=\frac{1}{5}$.

4. 设 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\mid 0<x,y<2\}$ 上的均匀分布, 求X, Y至少有一个小于1的概率.

解: $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<2, 0<y<2,\end{cases}$



$P[(X<1)\cup(Y<1)]=P(X<1)+P(Y<1)-P(X<1,Y<1)$.

由 $P(X<1)=\iint\limits_{x<1}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^2\frac{1}{4}dy=\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$;

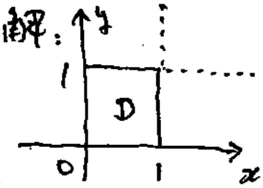
$P(Y<1)=\iint\limits_{y<1}f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^1\frac{1}{4}dy=\int_0^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$;

$P(X<1,Y<1)=\iint\limits_{\substack{x<1\\y<1}}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{4}dy=\int_0^1\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$.

$\therefore P[(X<1)\cup(Y<1)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

5*. 设(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x,y\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$ 求(X,Y)的联合分布函数.

解:



在 $x<0,y<0$ 时. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}0\,dxdy=0$.

在 $0\le x,y\le 1$ 时. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$

$=\int_0^x\int_0^y 4xy\,dxdy=\int_0^x 2x\,dx\cdot\int_0^y 2y\,dy=(x^2)\Big|_0^x(y^2)\Big|_0^y=x^2y^2$;

在 $0\le x\le 1,\ y>1$ 时, $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^x 4xy\,dx$

$=\int_0^1 2y(x^2)\Big|_0^x dy=x^2\int_0^1 2y\,dy=x^2(y^2)\Big|_0^1=x^2$;

在 $x>1,\ 0\le y\le 1$ 时. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^y 4xy\,dy$

$=\int_0^1 2x(y^2)\Big|_0^y dx=y^2\cdot\int_0^1 2x\,dx=y^2(x^2)\Big|_0^1=y^2$;

在 $x>1,\ y>1$ 时. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 4xy\,dy=$

$=\int_0^1 2x\,dx\cdot\int_0^1 2y\,dy=(x^2)\Big|_0^1(y^2)\Big|_0^1=1$.

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases}0; & x<0,y<0;\\ x^2y^2; & 0\le x,y\le 1;\\ x^2; & 0\le x\le 1,\ y>1;\\ y^2; & x>1,\ 0\le y\le 1;\\ 1. & x>1,\ y>1.\end{cases}$$

6*. 设二维随机变量(X,Y)在区域D: $0<x<1$, $|y|<x$ 内服从均匀分布. 求(1)关于X, Y的边缘密度函数; (2)条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$; (3) $P\{-1<X<\frac{3}{4}/Y=\frac{1}{2}\}$, $P\{-1<Y<\frac{1}{2}/X=\frac{1}{2}\}$

解. $S_D=\iint\limits_D dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x}dy=\int_0^1 2x\,dx=(x^2)\Big|_0^1=1$.

$\because (X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} 1; & 0<x<1,\ |y|<x; \\ 0. & \text{其他}. \end{cases}$

(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1\,dy, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases} = \begin{cases} 2x; & 0<x<1; \\ 0. & \text{其他}. \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} 1\,dx; & -1<y\le 0; \\ \int_{y}^{1} 1\,dx; & 0<y<1 \\ 0. & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1+y; & -1<y\le 0; \\ 1-y; & 0<y<1; \\ 0. & \text{其他}. \end{cases}$$

(注：$\because |y|<x$. $\therefore$ 当 $-x<y$，即 $x>-y$ 时，由 $0<x<1$，故有 $-y<x<1$，而 $-1<y\le 0$；当 $y<x$ 时，有 $y<x<1$ 而 $0<y<1$).

(2) 当 $|y|<1$ 时.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1+y}; & 0<x<1,\ -x<y\le 0; \\ \frac{1}{1-y}; & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0. & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}; & |y|<x<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时：

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y|<x; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 注意到条件密度函数是在某条件下的随机变量的密度函数，故有公式：

$$P(a<X\le b / Y=c) = \int_a^b f_{X|Y}(x|c)\,dx.$$

$$P(c<Y\le d / X=e) = \int_c^d f_{Y|X}(y|e)\,dy$$

则 $P(-1<X<\frac{3}{4} / Y=\frac{1}{2}) = \int_{-1}^{3/4} f_{X|Y}(x/\tfrac{1}{2})\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{3/4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,dx = \int_{1/2}^{3/4} 2\,dx = \frac{1}{2}$

$P(-1<Y<\frac{1}{2} / X=\frac{1}{2}) = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y/\tfrac{1}{2})\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy = 1.$

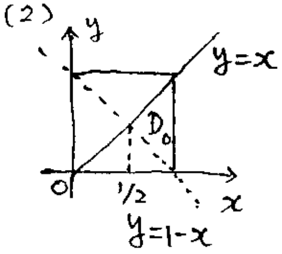
其中 $f_{X|Y}(x/\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 2. & \frac{1}{2}<x<1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$ $\quad f_{Y|X}(y/\tfrac{1}{2}) = \begin{cases} 1. & |y|<\frac{1}{2}; \\ 0. & \text{其他}. \end{cases}$

*7. 设随机变量 X 服从区间 (0,1) 上的均匀分布，在 X = x (0<x<1) 的条件下，随机变量 Y 服从区间 (0, x) 上的均匀分布. 求 (1) (X, Y) 的联合密度函数；(2) P(X+Y>1).

解：$f_X(x) = \begin{cases} 1; & 0<x<1; \end{cases}$ $\quad f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x; \end{cases}$

(1) $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)



$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_0}\frac{1}{x}\,dx\,dy=\int_{1/2}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy$

$=\int_{1/2}^{1}\left(\frac{y}{x}\right)\Big|_{1-x}^{x}dx=\int_{1/2}^{1}\frac{2x-1}{x}dx=\int_{1/2}^{1}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx$

$=(2x-\ln x)\Big|_{1/2}^{1}=(2-\ln 1)-\left(2\times\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}\right)=1+\ln\frac{1}{2}$

$=1-\ln 2$.

8. 设X与Y相互独立，有相同的分布律

X	-1	1
P	1/2	1/2

，则下列正确的是( ).

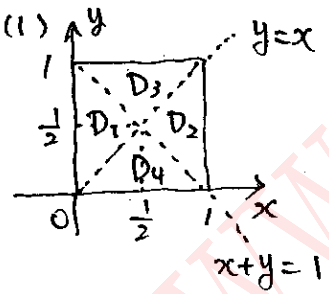
(A) $X=Y$, (B) $P(X=Y)=1$, (C) $P(X=Y)=\frac{1}{2}$, (D) $P(X=Y)=\frac{1}{4}$.

解：$P(X=Y)=P[(X=-1,Y=-1)\cup(X=1,Y=1)]=P(X=-1,Y=-1)$
$+P(X=1,Y=1)=P(X=-1)P(Y=-1)+P(X=1)P(Y=1)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 故选(C).

9*. 设二维随机变量(X,Y)在区域D：$0<x<1$, $0<y<1$上服从均匀分布，令
$U=\begin{cases}1, & X>Y;\\ 0, & X\le Y.\end{cases}$ $V=\begin{cases}1; & X+Y>1;\\ 0; & X+Y\le 1.\end{cases}$ 求(1) (U,V)的联合分布律；
(2) 关于U和V的边缘分布律；(3)问U、V是否相互独立，为什么？

解：$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1; & 0<x<1,\ 0<y<1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

(1)



$P(U=0,V=0)=P[(X\le Y)\cap(X+Y\le 1)]$
$=\iint\limits_{D_1}1\,dx\,dy=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}dy=\int_0^{1/2}(1-2x)dx=\frac{1}{4}$;

$P(U=0,V=1)=P[(X\le Y)\cap(X+Y>1)]$
$=\iint\limits_{D_2}1\,dx\,dy=\int_{1/2}^{1}dx\int_{1-x}^{x}dy=\int_{1/2}^{1}(2x-1)dx=\frac{1}{4}$;

$P(U=1,V=0)=P[(X>Y)\cap(X+Y\le 1)]=\iint\limits_{D_3}1\cdot dx\,dy=\int_0^{1/2}dy\int_y^{1-y}dx$
$=\int_0^{1/2}(1-2y)dy=\frac{1}{4}$;

$P(U=1,V=1)=P[(X>Y)\cap(X+Y>1)]=\iint\limits_{D_4}1\,dx\,dy=\int_{1/2}^{1}dy\int_{1-y}^{y}dx$
$=\int_{1/2}^{1}(2y-1)dy=\frac{1}{4}$.

故(U,V)的联合分布律为

U \ V	0	1
0	1/4	1/4

(2) 关于U和V的边缘分布律依次为：

U	0	1
P	1/2	1/2

和

V	0	1
P	1/2	1/2

.

(3) ∵ $P(U=0,V=0)=P(U=0)P(V=0)=\frac{1}{4}$；

$P(U=0,V=1)=P(U=0)P(V=1)=\frac{1}{4}$；

$P(U=1,V=0)=P(U=1)P(V=0)=\frac{1}{4}$.　　∴ U和V相互

$P(U=1,V=0)=P(U=1)P(V=0)=\frac{1}{4}$　　独立.

10. 设 ξ,η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 ξ 的分布律为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$，又设 $X=\max(\xi,\eta)$. 求X的分布.

解：$P(\xi=i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$；$P(\eta=j)=\frac{1}{3}$，$j=1,2,3$ 相互独立.

$P(X=1)=P(\max(\xi,\eta)=1)=P(\xi=1,\eta=1)=P(\xi=1)P(\eta=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$；

$P(X=2)=P(\max(\xi,\eta)=2)=P[(\xi=1,\eta=2)\cup(\xi=2,\eta=1)\cup(\xi=2,\eta=2)]$

$=P(\xi=1,\eta=2)+P(\xi=2,\eta=1)+P(\xi=2,\eta=2)$

$=P(\xi=1)P(\eta=2)+P(\xi=2)P(\eta=1)+P(\xi=2)P(\eta=2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$；

$P(X=3)=P(\max(\xi,\eta)=3)=P[(\xi=1,\eta=3)\cup(\xi=2,\eta=3)\cup(\xi=3,\eta=3)$

$\cup(\xi=3,\eta=1)\cup(\xi=3,\eta=2)]=P(\xi=1,\eta=3)+P(\xi=2,\eta=3)$

$+P(\xi=3,\eta=3)+P(\xi=3,\eta=1)+P(\xi=3,\eta=2)$

$=P(\xi=1)P(\eta=3)+P(\xi=2)P(\eta=3)+P(\xi=3)P(\eta=3)+P(\xi=3)P(\eta=1)$

$+P(\xi=3)P(\eta=2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$.

∴ X的分布律为

X	1	2	3
P	1/9	1/3	5/9

.

11. 设 X，Y 的密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1; & 0\le x\le 1,\\ 0. & 其他.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}; & y>0;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

且X,Y相互独立.

求 $Z=2X+Y$ 的分布.

解：$f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(u-2x)\,dx$，　$-\infty<u<+\infty$.（见注）

由 $\begin{cases}0\le x\le 1,\\ u-2x>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}u>x\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<\frac{u}{2}\\ 0<u\le 2\end{cases}$ 及 $\begin{cases}0<x<1\\ u>2\end{cases}$.

故当 $u\le 0$ 时，$f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(u-2x)\,dx=0$.

当 $0<u\le 2$ 时，$f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(u-2x)\,dx=\int_0^{u/2}1\cdot e^{-(u-2x)}\,dx$

$=\left(\frac{1}{2}e^{2x-u}\right)\Big|_{0}^{u/2}=\frac{1}{2}(1-e^{-u})$.

当 $u>2$ 时，$f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(u-2x)\,dx=\int_0^1 1\cdot e^{-(u-2x)}\,dx$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x-u}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^{2-u}-e^{-u})=\frac{1}{2}e^{-u}(e^2-1).$$

$$\therefore\ f_Z(u)=\begin{cases}0; & u\le 0;\\ \frac{1}{2}(1-e^{-u}); & 0<u\le 2;\\ \frac{1}{2}e^{-u}(e^2-1). & u>2.\end{cases}$$

(注) ① $F_Z(u)=P\{2X+Y\le u\}=\iint\limits_{2x+y\le u}f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{2x+y\le u}f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dx\,dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{u-2x}f_X(x)f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot F_Y(u-2x)\,dx.\ \left(其中\int_{-\infty}^{u-2x}f_Y(y)\,dy=F_Y(u-2x)\right)$$

$$\therefore\ f_Z(u)=\frac{dF_Z(u)}{du}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(u-2x)\,dx.\ (-\infty<u<+\infty).$$

② 更一般情形：$Z=aX+bY$ 的分布函数与密度函数（X,Y 相互独立）

为 $F_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)F_Y\left(\frac{1}{b}(u-ax)\right)dx$，$f_Z(u)=\frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y\left(\frac{1}{b}(u-ax)\right)dx$.

③ 亦可以先求出 $W=2X$ 的密度函数 $f_W(w)=\begin{cases}1/2, & 0\le w\le 2\\ 0. & 其余.\end{cases}$

显然 W 与 Y 相互独立．由 $Z=W+Y$，故有

$f_Z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_W(w)f_Y(u-w)\,dw$，由 $\begin{cases}0\le w\le 2\\ u-w>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0<w<u\\ 0<u<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<w<2\\ u\ge 2\end{cases}$.

可作出 $f_Z(u)$，结果相同．

12．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其中 X 的分布律 $\begin{array}{c|cc}X & 1 & 2\\ \hline P & 0.3 & 0.7\end{array}$，$Y$ 的密度函数为 $f_Y(y)$．求随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数 $g(z)$．

解：$F_Z(u)=P(Z\le u)=P(X+Y\le u)=P[(X=1,Y\le u-1)\cup(X=2,Y\le u-2)]$

$$=P(X=1,Y\le u-1)+P(X=2,Y\le u-2)$$
$$=P(X=1)\cdot P(Y\le u-1)+P(X=2)P(Y\le u-2)$$
$$=0.3F_Y(u-1)+0.7F_Y(u-2)$$

$$\therefore\ f_Z(u)=\frac{dF_Z(u)}{du}=\frac{d}{du}[0.3F_Y(u-1)+0.7F_Y(u-2)]=0.3f_Y(u-1)+0.7f_Y(u-2)$$

即 $g(z)=f_Z(z)=0.3f_Y(z-1)+0.7f_Y(z-2)$.

1. 略.

2. 某批产品共24件,其中有次品4件,其余均为合格品,求从这批产品中任意取出的5件里所含次品件数的数学期望.

解,设 X = "从24件中任取5件里所含次品数".

则 $P\{X=K\} = \dfrac{C_4^K C_{20}^{5-K}}{C_{24}^5}$, $K = 0,1,2,3,4$.

$\therefore E(X) = \sum\limits_{K=0}^{4} K \cdot P(X=K) = \sum\limits_{K=0}^{4} K \cdot \dfrac{C_4^K C_{20}^{5-K}}{C_{24}^5} = 0.8334$

注:①

X	0	1	2	3	4
P	0.36477	0.45596	0.16093	0.01788	0.00047

② 本题的分布为超几何分布:在N件产品中有次品m件,从中任取n件,则n件中所含次品数X的分布律为:$P(X=K) = C_m^K C_{N-m}^{n-K} / C_N^n$, $K = 0,1,2,\cdots,\min(n,m)$

由组合数 $C_N^n = \sum\limits_{K=0}^{n} C_m^K C_{N-m}^{n-K}$. 因此 (设 $n \le m$)

$$E(X) = \sum_{K=0}^{n} K\, C_m^K C_{N-m}^{n-K} / C_N^n = \sum_{K=0}^{n} K \cdot \frac{\frac{m}{K} \cdot C_{m-1}^{K-1} C_{(N-1)-(m-1)}^{(n-1)-(K-1)}}{\frac{N}{n} \cdot C_{N-1}^{n-1}} = \frac{nm}{N} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{m-1}^{i} C_{N-m}^{(n-1)-i}}{C_{N-1}^{n-1}}$$

$$= \frac{nm}{N}. \quad \text{其中} \sum_{i=1}^{n-1} C_{m-1}^{i} C_{N-m}^{n-1-i} / C_{N-1}^{n-1} = 1 .$$

所以,本题的确切值 $E(X) = \dfrac{5\times4}{24} = \dfrac{5}{6} = 0.8333$. 解中的0.8334实际上由①的计算值计算所得,有一定的计算误差.

3. 设随机变量X取非负整数n的概率为 $P(X=n) = \dfrac{ab^n}{n!}$, 已知 $E(X) = \lambda$. 试确定a, b之值.

解: $\because \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$, $\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{ab^n}{n!} = a \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b^n}{n!} = a e^b = 1$

又 $\because \sum\limits_{n=0}^{\infty} n P(X=n) = E(X) = \lambda$, $\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \dfrac{ab^n}{n!} = ab \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b^{n-1}}{(n-1)!} = ab e^b = \lambda$

$\therefore$ $b = \lambda$, $a = e^{-\lambda}$. 有 $P(X=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, 即 $X \sim \pi(\lambda)$.

4. 设随机变量X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5} x(x+1), & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$ 求 $E(X)$.

解: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{6}{5} x(x+1)\, dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^3 + x^2)\, dx$

$= \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{10}$.

习题 4-2

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1
P	0.1	0.4	0.3	0.2

求 $E(X)$, $E(X^2)$, $E(X-1)^2$

解：$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP(X=x_k)=(-2)\times0.1+(-1)\times0.4+0\times0.3+1\times0.2=-0.4$；

$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2P(X=x_k)=(-2)^2\times0.1+(-1)^2\times0.4+0^2\times0.3+1^2\times0.2=1$；

$E(X-1)^2=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-1)^2P(X=x_k)=[(-2)-1]^2\times0.1+[(-1)-1]^2\times0.4+[0-1]^2\times0.3+[1-1]^2\times0.2$

$=9\times0.1+4\times0.4+1\times0.3+0\times0.2=2.8$.

(注) $E(X-1)^2=E(X^2-2X+1)=E(X^2)-2E(X)+1=1-2\times(-0.4)+1=2.8$.

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 求 $E(3X)$, $E(e^{-3X})$.

解：$E(3X)=\int_{-\infty}^{+\infty}3xf(x)dx=\int_0^{+\infty}3xe^{-x}dx=3x(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+3\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=3(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=3$

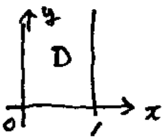
$E(e^{-3X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-4x}dx=\frac{1}{4}(-e^{-4x})\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{4}$.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$ 求 $E(X+Y)$.

解：X, Y 相互独立，故 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leq x\leq1,\ y\geq0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\cdot f(x,y)dxdy=\iint_D(x+y)e^{-y}dxdy=\int_0^1dx\int_0^{+\infty}(x+y)e^{-y}dy$



$=\int_0^1\Big[(x+y)(-e^{-y})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-y}dy\Big]dx=\int_0^1(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

(注). $X\sim U(0,1)$, 有 $E(X)=\frac{1}{2}$, $Y\sim$ 参数为 1 的指数分布，有 $E(Y)=1$

$\therefore E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$. 由此可见，$X$, Y 是否相互独立，在利用期望性质时可以不管，但用定义计算时要涉及 $f(x,y)$ 的计算，故需要.

4. 设 (X,Y) 的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.2	a
1	0.1	b	0.2

已知 $E(X^2+Y^2)=2.4$, 求 a, b 之值.

解：由 $1=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=0.1+0.2+a+0.1+b+0.2=a+b+0.6$

$E(X^2+Y^2)=(0^2+0^2)\times0.1+(0^2+1^2)\times0.2+(0^2+2^2)\times a+(1^2+0^2)\times0.1+(1^2+1^2)\times b$

$+(1^2+2^2)\times0.2=4a+2b+1.3=2.4$.

$\therefore\begin{cases}a+b=0.4;\\ 4a+2b=1.1.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=1.5;\\ b=2.5.\end{cases}$

(注)：也可利用关于 X, Y 的边缘分布分别计算 $E(X^2)$ 和 $E(Y^2)$ 再获得 $E(X^2+Y^2)$.

习题 4-3

1. 设随机变量 X 的数学期望与方差均存在且 $D(X)>0$，称 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为 X 的标准化的随机变量，证明：$E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$.

证：$E(X^*)=E\left(\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}E(X-E(X))=\dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}(E(X)-E(X))=0$；

$D(X^*)=D\left(\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=\dfrac{1}{D(X)}D(X-E(X))=\dfrac{1}{D(X)}(D(X)-0)=1$.

2. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x^2}, & -1\le x\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

求：(1) 常数 A；(2) $E(X)$；(3) $D(X)$.

解：(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{A}{1+x^2}dx=A(\arctan x)\Big|_{-1}^{1}=A\left(\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{\pi A}{2}$

$\therefore A=\dfrac{2}{\pi}$.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{\frac{2}{\pi}x}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=\dfrac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{1}=0$.

(3) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2}{\pi(1+x^2)}dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\dfrac{4}{\pi}\int_{0}^{1}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\dfrac{4}{\pi}(x-\arctan x)\Big|_{0}^{1}=\dfrac{4}{\pi}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4}{\pi}-1$.

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\left(\dfrac{4}{\pi}-1\right)-0^2=\dfrac{4}{\pi}-1$.

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0;\\ 1-x, & 0\le x<1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$$

求：(1) $E(X)$，(2) $D(X)$；(3) $P(|X-E(X)|\le 2D(X))$.

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}$

$+\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1}=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)=0$.

(2) $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-0^2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$

$=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(3) $P(|X-E(X)|\le 2D(X))=P\left(|X|\le\dfrac{1}{3}\right)=P\left(-\dfrac{1}{3}\le X\le\dfrac{1}{3}\right)=\int_{-1/3}^{1/3}f(x)dx$

$=\int_{-1/3}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1/3}(1-x)dx=\left(x+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1/3}^{0}+\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1/3}=\dfrac{5}{18}+\dfrac{5}{18}=\dfrac{5}{9}$.

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim U[0,2]$. 求：

(1) $E(X-2Y)$；(2) $D(X-2Y)$；(3) $E[(X+Y)^2]$.

解：$X\sim N(0,1)$. $\therefore E(X)=0$，$D(X)=1$，$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=1$；

$Y\sim U[0,2]$，$\therefore E(Y)=1$. $D(Y)=\dfrac{2^2}{12}=\dfrac{1}{3}$. $E(Y^2)=D(X)+(E(X))^2=\dfrac{4}{3}$.

(1) $E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=0-2\times1=-2$

(2) $D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)=1+4\times\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$; ($X$, Y 相互独立的)

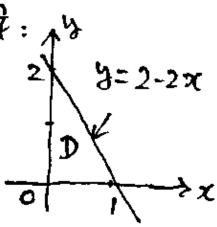
(3) $E[(X+Y)^2]=E(X^2+Y^2+2XY)=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)$, ($X$, Y 独立)

$=E(X^2)+E(Y^2)+2E(X)E(Y)$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$ 及 $E(XY)$.

解:



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D x\cdot 6xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}6x^2y\,dy$$

$$=\int_0^1\left[3x^2(y^2)\Big|_0^{2(1-x)}\right]dx=\int_0^1 12x^2(1-x)^2dx=\int_0^1 12(x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$=\left(4x^3-6x^4+\frac{12}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{5}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D y\cdot 6xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}6xy^2dy$$

$$=\int_0^1\left[2x(y^3)\Big|_0^{2(1-x)}\right]dx=\int_0^1 16x(1-x)^3dx=\int_0^1 16(x-3x^2+3x^3-x^4)dx$$

$$=\left(8x^2-16x^3+12x^4-\frac{16}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{4}{5};$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D y^2\cdot 6xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}6xy^3dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{3}{2}x(y^4)\Big|_0^{2(1-x)}\right]dx=\int_0^1 24x(1-x)^4dx=\int_0^1 24(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5)dx$$

$$=\left(12x^2-32x^3+36x^4-\frac{96}{5}x^5+4x^6\right)\Big|_0^1=\frac{4}{5}.$$

$$\therefore D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{4}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D xy\cdot 6xy\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}6x^2y^2dy$$

$$=\int_0^1\left[2x^2(y^3)\Big|_0^{2(1-x)}\right]dx=\int_0^1 16x^2(1-x)^3dx=\int_0^1 16(x^2-3x^3+3x^4-x^5)dx$$

$$=\left(\frac{16}{3}x^3-12x^4+\frac{48}{5}x^5-\frac{8}{3}x^6\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}.$$

(注): $E(Y)=\iint_D 6xy^2\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{1}{2}y}6xy^2dx=\int_0^2\left[3y^2(x^2)\Big|_0^{1-\frac{1}{2}y}\right]dy$

$$=\int_0^2 3y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)^2dy=\int_0^2 3\left(y^2-y^3+\frac{y^4}{4}\right)dy=\left(y^3-\frac{3}{4}y^4+\frac{3}{20}y^5\right)\Big|_0^2=\frac{4}{5};$$

$$E(Y^2)=\iint_D 6xy^3\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{1}{2}y}6xy^3dx=\int_0^2\left[3y^3(x^2)\Big|_0^{1-\frac{1}{2}y}\right]dy$$

$$=\int_0^2 3y^3\left(1-\frac{y}{2}\right)^2dy=\int_0^2 3\left(y^3-y^4+\frac{y^5}{4}\right)dy=\left(\frac{3}{4}y^4-\frac{3}{5}y^5+\frac{1}{8}y^6\right)\Big|_0^2$$

$$P\{Y_K=1\}=P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>3\}=0.0017.$$
$$P\{Y_K=0\}=P\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leq 3\}=0.9983.$$

$\sum_{K=1}^{10000}Y_K=$"10000箱中不能通过验收的箱数"近似服从 $E(\sum_{K=1}^{1000}Y_K)=10000\times 0.0017=17$；$D(\sum_{K=1}^{10000}X_i)=10000\times 0.0017\times 0.9983=16.9983$ 的正态分布 $N(17, 16.9983)$.

$$\therefore P\{\sum_{K=1}^{10000}Y_K>25\}\doteq 1-\Phi\left(\frac{25-17}{\sqrt{16.9983}}\right)=1-\Phi(1.94)$$
$$=1-0.9738=0.0262.$$

7.* 用棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理证明伯努利大数定理.

解：伯努利大数定理的条件与棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理的条件一致，即 $X_i\ (i=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $p\ (0<p<1)$ 的 0－1 分布，且相互独立. 则 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$. 由中心极限定理得 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布 $N(np, np(1-p))$. 即

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}\doteq\Phi(x).$$

由 $P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p|<\varepsilon\}=P\{-\varepsilon<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p<\varepsilon\}$

$$=P\left\{-\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}<\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right\}\doteq\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$
$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1.$$

$$\therefore P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-P|<\varepsilon\}\doteq 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1.$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p|<\varepsilon\}=2\lim_{n\to+\infty}\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right)-1$$
$$=2\Phi(+\infty)-1=1.$$

即为伯努利大数定理的结论成立。

$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0.8$; $D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{0.16}{n}$

(1) 根据切比雪夫不等式，$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)|<\varepsilon)>1-\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\varepsilon^2}$

即 $P\{0.8-\varepsilon<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.8+\varepsilon\}>1-\frac{0.16}{\varepsilon^2\cdot n}$

现求 $P\{0.76<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.84\}>0.9$ 中的 n. 对照上式

得 $\varepsilon=0.04$. 设 $1-\frac{0.16}{(0.04)^2\cdot n}=0.9$.

得 $n=0.16/(0.1\times 0.0016)=1000$.

(2) 根据中心极限定理，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N(0.8,\frac{0.16}{n})$.

$\therefore P\{0.76<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.84\}=\Phi(\frac{0.84-0.8}{\sqrt{0.16/n}})-\Phi(\frac{0.76-0.8}{\sqrt{0.16/n}})$

$=\Phi(0.1\sqrt{n})-\Phi(-0.1\sqrt{n})=2\Phi(0.1\sqrt{n})-1>0.9$

$\therefore \Phi(0.1\sqrt{n})>0.95$，$\therefore 0.1\sqrt{n}=1.645$，$\therefore n=270.6\approx 271$.

由结果可见(2)的结果比(1)更接近于实际.

6*. 某工厂生产的一种产品其次品率为0.005，每只产品是否为次品相互独立. 产品按每100只包装成为一箱，一箱中若次品数超过3只就不能通过验收，各箱是否能通过验收相互独立. 今有10000箱产品，求多于25箱不能通过验收的概率.

解：$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个产品为次品;}\\ 0, & \text{第}i\text{个产品为正品.}\end{cases}$ $i=1,\cdots,100$ 相互独立.

$P\{X_i=1\}=0.005$，$P\{X_i=0\}=0.995$.

$\sum_{i=1}^{100}X_i$ = "一箱100只产品中的次品数" $\sim B(100, 100\times 0.005)$

$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>3\}=1-[P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\}+P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\}+P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=2\}$

$+P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=3\}]=1-[C_{100}^{0}(0.005)^0(0.995)^{100}+C_{100}^{1}0.005\cdot(0.995)^{99}$

$+C_{100}^{2}(0.005)^2(0.995)^{98}+C_{100}^{3}(0.005)^3(0.995)^{97}]$

$=1-0.9983=0.0017$.（亦可用泊松分布作近似计算）

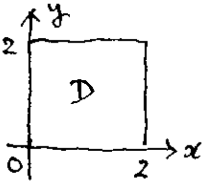
又设 $Y_K=\begin{cases}1, & \text{第}K\text{箱不通过验收;}\\ 0, & \text{第}K\text{箱通过验收.}\end{cases}$ $K=1,\cdots,10000$，相互独立.

习题 4-4

1. 设二维随机变量 (X,Y) 分别具有下列密度函数，求 $Cov(X,Y)$，ρ_{XY}.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2;\\ 0 & 其他;\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}2; & x>0,\ y>0,\ x+y<1;\\ 0 & 其他.\end{cases}$

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint_D x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}(x^2+xy)dy$



$=\int_0^2[\frac{1}{8}x^2(y)\Big|_0^2+\frac{1}{16}x(y^2)\Big|_0^2]dx=\int_0^2\frac{1}{4}(x^2+x)dx=(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8})\Big|_0^2=\frac{7}{6}.$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint_D y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy$

$=\int_0^2 dy\int_0^2\frac{1}{8}(xy+y^2)dx=\int_0^2[\frac{y}{16}(x^2)\Big|_0^2+\frac{y^2}{8}(x)\Big|_0^2]dy=\int_0^2(\frac{y}{4}+\frac{y^2}{4})dy=(\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{12})\Big|_0^2=\frac{7}{6}.$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint_{D_2}xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}(x^2y+xy^2)dy$

$=\int_0^2[\frac{x^2}{16}(y^2)\Big|_0^2+\frac{x}{24}(y^3)\Big|_0^2]dx=\int_0^2(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3})dx=(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{6})\Big|_0^2=\frac{4}{3};$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}=-\frac{1}{36};$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\iint_D x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{1}{8}(x^3+x^2y)dy$

$=\int_0^2[\frac{x^3}{8}(y)\Big|_0^2+\frac{x^2}{16}(y^2)\Big|_0^2]dx=\int_0^2\frac{1}{4}(x^3+x^2)dx=(\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{12})\Big|_0^2=\frac{5}{3};$

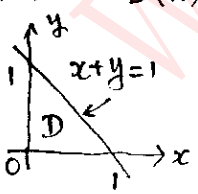
$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\iint_D y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^2\frac{1}{8}(y^2x+y^3)dx$

$=\int_0^2[\frac{y^2}{16}(x^2)\Big|_0^2+\frac{y^3}{8}(x)\Big|_0^2]dy=\int_0^2\frac{1}{4}(y^2+y^3)dy=(\frac{y^3}{12}+\frac{y^4}{16})\Big|_0^2=\frac{5}{3};$

$\therefore D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36};\ D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36};$

$\therefore \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{11/36}\cdot\sqrt{11/36}}=-\frac{1}{11}.$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\iint_D x\cdot 2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2xdy$



$=\int_0^1 2x(1-x)dx=(x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3};$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint_D y\cdot 2dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}2ydx$

$=\int_0^1 2y(1-y)dy=(y^2-\frac{2}{3}y^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint xy\cdot 2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}2xydy$

$$=\int_0^1 x(1-x)^2dx=\int_0^1(x^2-2x^2+x^3)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{36};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\iint_D x^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1dx\int_0^{1-x}2x^2dy=\int_0^1 2x^2(1-x)dx$$
$$=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6};$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=\iint_D y^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^{1-y}2y^2dx=\int_0^1 2y^2(1-y)dy$$
$$=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6};$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{54};\ D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{54};$$

$$\therefore \rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{3/54}\sqrt{3/54}}=-\frac{1}{2}.$$

（注）在计算两重积分时，可视被积函数情况选择逐次积分的先后顺序来减少计算量.

2. 设 X 与 Y 为随机变量，$D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$. 求 $D(X+Y)$，$D(X-Y)$.

解：由 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}=0.4\cdot\sqrt{25\times 36}=0.4\times 30=12$.

$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=25+36+2\times 12=85$;

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=25+36-2\times 12=37$.

3. 设 X 与 Y 为随机变量，若 $X_1=aX+b$，$Y_1=cY+d$，其中 a,b,c,d 均为常数，且 $ac>0$. 试证：$\rho_{X_1Y_1}=\rho_{XY}$.

证：$E(X_1)=E(aX+b)=aE(X)+b$；$D(X_1)=D(aX+b)=a^2D(X)$；

$E(Y_1)=E(cY+d)=cE(Y)+d$；$D(Y_1)=D(cY+d)=c^2D(Y)$.

$$E(X_1Y_1)=E[(aX+b)(cY+d)]=E(acXY+adX+bcY+bd)$$
$$=acE(XY)+adE(X)+bcE(Y)+bd.$$

$$\therefore Cov(X_1,Y_1)=E(X_1Y_1)-E(X_1)E(Y_1)=a^2D(X)+c^2D(Y)$$
$$=acE(XY)+adE(X)+bcE(Y)+bd-(aE(X)+b)(cE(Y)+d)$$
$$=ac[E(XY)-E(X)E(Y)]=ac\,Cov(X,Y).$$

$$\therefore \rho_{X_1Y_1}=\frac{Cov(X_1,Y_1)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(Y_1)}}=\frac{ac\,Cov(X,Y)}{\sqrt{a^2D(X)}\sqrt{c^2D(Y)}}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}.$$

习题 4-5

1. 设二维随机变量 (X,Y) 分别具有下列联合密度函数，问 X 与 Y 是否相互独立，X 与 Y 是否相关？为什么？

(1) $f(x,y)=\begin{cases}4xy; & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 4xy\,dy=2x(y^2)\Big|_0^1=2x;\quad 0\le x\le 1;$

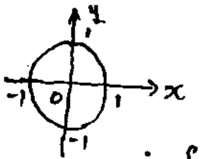
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1 4xy\,dx=2y(x^2)\Big|_0^1=2y;\quad 0\le y\le 1;$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}2x; & 0\le x\le 1;\\ 0 & 其他.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y; & 0\le y\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}$

$\because f(x,y)=\begin{cases}4xy; & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}=f_X(x)f_Y(y)$，$\therefore X,Y$ 相互独立.

则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$. $\therefore Cov(X,Y)=0$. $\therefore \rho_{XY}=0$. $\therefore X,Y$ 不相关.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2};\quad -1\le x\le 1;$



$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2};\quad -1\le y\le 1.$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}; & -1\le x\le 1;\\ 0. & 其他.\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}; & -1\le y\le 1;\\ 0; & 其他.\end{cases}$

因在 $x^2+y^2\le 1$ 的区域内

$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\ne\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, $\therefore X,Y$ 不相互独立；

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint_D\frac{x}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\pi}dy=\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{(*)}{=}0;$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint_D\frac{y}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{y}{\pi}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2y}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,dy\overset{(*)}{=}0.$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint_D\frac{xy}{\pi}dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{xy}{\pi}dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{y}{2\pi}(x^2)\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\right]dx=0;$

$\therefore E(XY)=E(X)E(Y)$, $\therefore Cov(X,Y)=0$，$\therefore \rho_{XY}=0$. $\therefore X,Y$ 不相关.

(注) $*$ 处用奇函数在对称区间上的定积分为 0 的性质.

联系 (1)(2) 的结论可见：X,Y 相互独立仅仅是 X,Y 不相关的充分条件；反之，X,Y 不相关仅仅是 X,Y 相互独立的必要条件.

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且具有相同的分布，数学期望为 0，方差为 σ^2. 令 $X=X_1+X_2+X_3$，$Y=X_2+X_3+X_4$. 求 ρ_{XY}.

解：$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=0;$

$E(Y)=E(X_2+X_3+X_4)=E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)=0;$

$E(XY)=E[(X_1+X_2+X_3)(X_2+X_3+X_4)]=E[X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+2X_2X_3+X_2X_4$

$+X_3X_4+X_2^2+X_3^2]=E(X_1X_2)+E(\ldots$

$+E(X_3X_4)+E(X_2^2)+E(X_3^2)=E(X_1)E(X_2)+E(X_1)(X_3)+E(X_1)E(X_4)+2E(X_2)E(X_3)$
$+E(X_2)E(X_4)+E(X_3)E(X_4)+D(X_2)+D(X_3)=2\sigma^2$;

$E(X^2)=E[(X_1+X_2+X_3)^2]=E(X_1^2+X_2^2+X_3^2+2X_1X_2+2X_1X_3+2X_2X_3)=E(X_1^2)+E(X_2^2)+E(X_3^2)$
$+2E(X_1)E(X_2)+2E(X_1)E(X_3)+2E(X_2)E(X_3)=3\sigma^2$;

$E(Y^2)=E[(X_2+X_3+X_4)^2]=E(X_2^2+X_3^2+X_4^2+2X_2X_3+2X_2X_4+2X_3X_4)=E(X_2^2)+E(X_3^2)+E(X_4^2)$
$+2E(X_2)E(X_3)+2E(X_2)E(X_4)+2E(X_3)E(X_4)=3\sigma^2$.

$\therefore \operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2\sigma^2$; $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3\sigma^2$; $D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=3\sigma^2$.

$\therefore \rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{2\sigma^2}{\sqrt{3\sigma^2\cdot 3\sigma^2}}=\dfrac{2}{3}$.

3. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	0.1	0.3
1	0.2	0.4

求(X,Y)的协方差矩阵.

解：关于X、Y的边缘分布律为

X	0	1
P	0.3	0.7

，

Y	0	1
P	0.4	0.6

$E(X)=0\times0.3+1\times0.7=0.7$； $E(Y)=0\times0.4+1\times0.6=0.6$；

$E(X^2)=0^2\times0.3+1^2\times0.7=0.7$； $E(Y^2)=0^2\times0.4+1^2\times0.6=0.6$；

$E(XY)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.2+1\times0\times0.3+1\times1\times0.4=0.4$.

$\therefore \operatorname{Cov}(X,X)=D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=0.7-(0.7)^2=0.21$；

$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.4-0.7\times0.6=0.02$；

$\operatorname{Cov}(Y,X)=E(XY)=E(X)E(Y)=0.4-0.7\times0.6=0.02$；

$\operatorname{Cov}(Y,Y)=D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=0.6-(0.6)^2=0.24$.

$\therefore$ (X,Y)的协方差阵为 $\begin{pmatrix}\operatorname{Cov}(X,X), & \operatorname{Cov}(X,Y)\\ \operatorname{Cov}(Y,X), & \operatorname{Cov}(Y,Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.21 & 0.02\\ 0.02 & 0.24\end{pmatrix}$.

复习题 4（仅对三.计算题作解答）

1. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2; \\ bx+c, & 2\le x\le 4; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知 $E(X)=2$，$P(1<X<3)=\frac{3}{4}$。求：(1) a,b,c 之值；(2) $E(e^{-X})$。

解：(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 ax\,dx+\int_2^4(bx+c)dx=2a+6b+2c$；

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 x\cdot ax\,dx+\int_2^4 x(bx+c)dx=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}b+6c=2$；

$P(1<X<3)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 ax\,dx+\int_2^3(bx+c)dx=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}b+c=\frac{3}{4}$.

得方程组 $\begin{cases} a+3b+c=\frac{1}{2}; \\ 4a+28b+9c=3; \\ 3a+5b+2c=\frac{3}{2}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{4}; \\ b=-\frac{1}{4}; \\ c=1. \end{cases}$

(2) $E(e^{-X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x}f(x)dx=\int_0^2 e^{-x}\cdot\frac{x}{4}dx+\int_2^4 e^{-x}(1-\frac{x}{4})dx$

$=\left[\frac{x}{4}(-e^{-x})\Big|_0^2+\frac{1}{4}\int_0^2 e^{-x}dx\right]+\left[(1-\frac{x}{4})(-e^{-x})\Big|_2^4-\frac{1}{4}\int_2^4 e^{-x}dx\right]$

$=-\frac{1}{4}e^{-x}\Big|_0^2+\frac{1}{4}e^{-x}\Big|_2^4=1-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{4}e^{-4}=\frac{1}{4}(2-e^{-2})^2$.

2. 设 X 与 Y 是随机变量，为使 $E\{[Y-(aX+bY)]^2\}$ 达到最小值，求常数 a,b 之值。

解：记 $g(a,b)=E\{[Y-(aX+bY)]^2\}=(1-b)^2E(Y^2)+a^2E(X^2)-2a(1-b)E(XY)$

利用二元函数求极值的方法：

令 $\begin{cases} \frac{\partial g(a,b)}{\partial a}=2aE(X^2)-2(1-b)E(XY)=0 \\ \frac{\partial g(a,b)}{\partial b}=-2(1-b)E(Y^2)+2aE(XY)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=0; \\ b=1. \end{cases}$

（注）本题书上答案错的，且当 $a=0$，$b=1$ 时，该期望值为 0，此结果用直接观察即可获得，故本题作者可能出得不妥，但解题方法可借鉴。

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知 $E(X)=\frac{1}{2}$，$D(X)=\frac{3}{20}$。

求 a,b,c 之值。

解：由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax^2+bx+c)dx = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = 1$；

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(ax^2+bx+c)dx = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2} = \frac{1}{2};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)dx = \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3};$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}.$$

得 $\begin{cases} 2a+3b+6c=6; \\ 3a+4b+6c=6; \\ 12a+15b+20c=24. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=12; \\ b=-12; \\ c=3. \end{cases}$

4*. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且具有有限的方差，试证明：

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

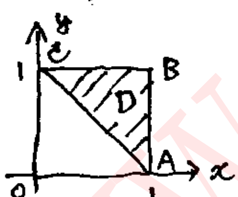
并由此说明 $D(XY)\geqslant D(X)D(Y)$

解：
$$\begin{aligned} D(XY) &= E[(XY)^2]-[E(XY)]^2 = E(X^2Y^2)-[E(X)E(Y)]^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= [(E(X^2)-(E(X))^2)+(E(X))^2][(E(Y^2)-(E(Y))^2)+(E(Y))^2]-[E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= [D(X)+(E(X))^2][D(Y)+(E(Y))^2]-[E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X) \end{aligned}$$

$\because$ $[E(X)]^2D(Y)\geqslant 0$，$[E(Y)]^2D(X)\geqslant 0$，$\therefore$ $D(XY)\geqslant D(X)D(Y)$.

5 设随机变量 X 与 Y 的联合分布在以 (0,1)，(1,0)，(1,1) 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 U=X+Y 的方差。

解



$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & 0\leq 1-x<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2})$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\iint_D x\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2x\,dy=\frac{2}{3};$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\iint_D y\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2y\,dy=\frac{2}{3};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x,y)dxdy=\iint_D x^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2x^2dy=\frac{1}{2};$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2f(x,y)dxdy=\iint_D y^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2y^2dy=\frac{1}{2};$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\iint_D xy\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2xy\,dy=\frac{5}{12}.$$

$\therefore D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$;

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$;

$\therefore D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+2[\frac{5}{12}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}]=\frac{2}{18}-\frac{1}{18}=\frac{1}{18}$.

6. 设X、Y为随机变量，$E(X)=1$，$D(X)=1$；$E(Y)=2$，$D(Y)=4$；$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.
记$Z=\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}$，求$E(Z)$，$D(Z)$，$Cov(X,Z)$.

解：$E(Z)=E(\frac{X}{2}+\frac{Y}{3})=\frac{1}{2}E(X)+\frac{1}{3}E(Y)=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{3}\times2=\frac{7}{6}$；

$D(Z)=D(\frac{X}{2}+\frac{Y}{3})=\frac{1}{4}D(X)+\frac{1}{9}D(Y)+2[\frac{1}{6}E(XY)-\frac{1}{6}E(X)E(Y)]$

$=\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{9}\times4+2\times\frac{1}{6}(E(XY)-E(X)E(Y))=\frac{37}{36}$

其中$E(XY)-E(X)E(Y)=Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

$Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)E(Z)=E(X(\frac{X}{2}+\frac{Y}{3}))-E(X)E(Z)$

$=\frac{1}{2}E(X^2)+\frac{1}{3}E(XY)-E(X)E(Z)=\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{3}\times3-1\times\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$；

其中$E(X,Y)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=1+1\times2=3$.

7. 设随机变量X与Y相互独立，$D(X)=4D(Y)$，$U=2X+3Y$，$V=2X-3Y$
求ρ_{UV}.

解：$E(U)=E(2X+3Y)=2E(X)+3E(Y)$；

$E(V)=E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)$；

$E(U^2)=E((2X+3Y)^2)=E(4X^2+9Y^2+12XY)=4E(X^2)+9E(Y^2)+12E(XY)$，

$E(V^2)=E((2X-3Y)^2)=E(4X^2+9Y^2-12XY)=4E(X^2)+9E(Y^2)-12E(XY)$，

$E(UV)=E[(2X+3Y)(2X-3Y)]=E(4X^2-9Y^2)=4E(X^2)-9E(Y^2)$；

$\therefore Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=(4E(X^2)-9E(Y^2))-(4(E(X))^2-9(E(Y))^2)$

$=4(E(X^2)-(E(X))^2)-9(E(Y^2)-(E(Y))^2)=4D(X)-9D(Y)$，

$D(U)=E(U^2)-(E(U))^2=(4E(X^2)+9E(Y^2)+12E(XY))-(2E(X)+3E(Y))^2$

$=4(E(X^2)-(E(X))^2)+9(E(Y^2)-(E(Y))^2)=4D(X)+9D(Y)$；

$D(V)=E(V^2)-(E(V))^2=(4E(X^2)+9E(Y^2)-12E(XY))-(2E(X)-3E(Y))^2$

$=4(E(X^2)-(E(X))^2)+9(E(Y^2)-(E(Y))^2)=4D(X)+9D(Y)$；

$\therefore \rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)\cdot D(V)}}=\frac{4D(X)-9D(Y)}{\sqrt{(4D(X)+9D(Y))^2}}=\frac{4D(X)-9D(Y)}{4D(X)+9D(Y)}=\frac{16D(Y)-9D(Y)}{16D(Y)+9D(Y)}$

$=\frac{7}{25}$.

8*. 设A, B为两个随机事件. 随机变量

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生;\\ -1, & 若A不发生.\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & 若B发生;\\ -1, & 若B不发生.\end{cases}$$

试证明随机变量X和Y不相关的充分必要条件是随机事件A和B相互独立.

证: $P(X=1)=P(A)$; $P(X=-1)=1-P(A)$;

$P(Y=1)=P(B)$; $P(Y=-1)=1-P(B)$.

$E(X)=1\cdot P(X=1)+(-1)\cdot P(X=-1)=P(A)-(1-P(A))=2P(A)-1$;

$E(Y)=1\cdot P(Y=1)+(-1)\cdot P(Y=-1)=P(B)-(1-P(B))=2P(B)-1$.

$$\begin{aligned}E(XY)&=(-1)(-1)P(X=-1,Y=-1)+(-1)(1)P(X=-1,Y=1)\\&\quad+(1)(-1)P(X=1,Y=-1)+(1)(1)P(X=1,Y=1)\\&=P(X=-1,Y=-1)-P(X=-1,Y=1)-P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)\\&=P(\bar{A}\cdot\bar{B})-P(\bar{A}\cdot B)-P(A\cdot\bar{B})+P(A\cdot B)\\&=P(\overline{A\cup B})-(P(B)-P(AB))-(P(A)-P(AB))+P(AB)\\&=1-(P(A)+P(B)-P(AB))-(P(B)-P(AB))-(P(A)-P(AB))+P(AB)\\&=1-2P(A)-2P(B)+4P(AB)\end{aligned}$$

则 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=(1-2P(A)-2P(B)+4P(AB))$

$-(2P(A)-1)(2P(B)-1)=4(P(AB)-P(A)P(B))$.

故当A, B相互独立时, 有 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则 $Cov(X,Y)=0$ $\therefore \rho_{XY}=0$

即X, Y不相关;

而当X, Y不相关时, 有 $\rho_{XY}=0$, $\therefore Cov(X,Y)=0$

即有 $P(AB)-P(A)P(B)=0$, 亦即 $P(AB)=P(A)P(B)$.

$\therefore$ A, B相互独立.

习题5－1

1. 设随机变量X的数学期望为E(X)，已知方差 $D(X)=0.009$，若用切比雪夫不等式可估出 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 0.9$，试问ε的最小值是多少？

解：切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ 取等号时为最小.

则由 $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0.9$，即 $\varepsilon^2=\frac{D(X)}{0.1}=\frac{9}{100}=0.09$

$\therefore \varepsilon=0.3$.

2. 设随机变量X和Y的数学期望分别为−2和2，方差分别为1和4，相关系数为−0.5. 试根据切比雪夫不等式求 $P(|X+Y|\geq 6)$ 的近似值.

解：切比雪夫不等式 $P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X+Y)}{\varepsilon^2}$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=(-2)+2=0$.

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}$

$=1+4+2(-\frac{1}{2})\sqrt{1\times 4}=3$.

$\therefore P\{|X+Y|\geq\varepsilon\}\leq\frac{3}{\varepsilon^2}$，故 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$.

3. 设随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$

(1) 求 $P(|X-E(X)|\geq\frac{3}{2})$；

(2) 利用切比雪夫不等式求 $P(|X-E(X)|\geq\frac{3}{2})$ 的上界；

(3) 试比较(1)、(2)的结果.

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=x(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$

$=(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1$.

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=x^2(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$

$=2$.

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2-1=1$.

$\therefore P(|X-E(X)|\geq\frac{3}{2})=P(|X-1|\geq\frac{3}{2})=P((X\geq\frac{5}{2})\cup(X\leq-\frac{1}{2}))$

$=P(X\geq\frac{5}{2})+P(X\leq-\frac{1}{2})=\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}e^{-x}dx+\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}0\,dx=\int_{5/2}^{+\infty}e^{-x}dx$

$=(-e^{-x})\Big|_{\frac{5}{2}}^{+\infty}=e^{-\frac{5}{2}}=0.0821$

(2) $P\{|X-E(X)|\geq\frac{3}{2}\}\leq\frac{D(X)}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{1}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{4}{9}=0.44$.

(3). 0.082是$P(|X-E(X)|\geq\frac{3}{2})$的精确值，而0.44为$P(|X-E(X)|\geq\frac{3}{2})$的估计值，且为最大估计值。

4. 若随机变量X服从$[-1,b]$上的均匀分布，且由切比雪夫不等式得$P\{|X-1|<\varepsilon\}\geq\frac{2}{3}$，求数b和ε.

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+b}, & -1\leq x\leq b\\ 0, & 其他\end{cases}$；$\because P(|X-1|<\varepsilon)\geq\frac{2}{3}$，$\therefore E(X)=1$

由 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{b}\frac{x}{1+b}dx=\frac{\frac{(x^2)}{2}\Big|_{-1}^{b}}{1+b}=\frac{b^2-1}{2(1+b)}=\frac{b-1}{2}=1$

得 $b=3$.

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{3}\frac{x^2}{4}dx=\frac{(x^3)}{12}\Big|_{-1}^{3}=\frac{7}{3}$；

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$.

由 $\frac{2}{3}=1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$，$\varepsilon^2=3D(X)$，$\therefore\varepsilon^2=4$，$\varepsilon=2$.

5. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$相互独立，且有分布律

X_n	$-na$	0	na
p	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}P(|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon)=0$.

解：$E(X_n)=(-na)\frac{1}{2n^2}+0\cdot(1-\frac{1}{n^2})+(na)\cdot\frac{1}{2n^2}=0$；　$n=1,2,3\cdots$

$E(X_n^2)=(-na)^2\cdot\frac{1}{2n^2}+0^2(1-\frac{1}{n^2})+(na)^2\cdot\frac{1}{2n^2}=a^2$，　$n=1,2,3\cdots$

$D(X_n)=E(X_n^2)-(E(X_n))^2=a^2$.　$n=1,2,3\cdots$

$E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=0$；$D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{a^2}{n}$

由切比雪夫不等式：

$P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon\}=P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)|>\varepsilon\}<\frac{1}{\varepsilon^2}D(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)$

即 $P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{a^2}{n}$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon\}\leq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{a^2}{n}=0$.

由 $P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon\}\geq0$.

$\therefore\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|>\varepsilon\}=0$.

习题 5-2

1. 设 X_i $(i=1,2,\cdots,50)$ 是相互独立的随机变量，且它们都服从参数为 $\lambda=0.03$ 的泊松分布，记 $Z=X_1+X_2+\cdots+X_{50}$．试利用中心极限定理求 $P(Z\geq 3)$ 的近似值．

解：$P\{X_i=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$；即 $P\{X_i=k\}=\dfrac{0.03^k}{k!}e^{-0.03}$，$k=0,1,2,\cdots$ $i=1,2,\cdots,50$．

有 $E(X_i)=\lambda$，$D(X_i)=\lambda$．即 $E(X_i)=0.03$；$D(X_i)=0.03$．

$\therefore E(Z)=E(\sum\limits_{i=1}^{50}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{50}E(X_i)=50\times 0.03=1.5$；

$D(Z)=D(\sum\limits_{i=1}^{50}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{50}D(X_i)=50\times 0.03=1.5$．

由 X_i $(i=1,2,\cdots,50)$ 相互独立服从同一分布，且 $E(X_i)=0.03$，$D(X_i)=0.03$ 满足中心极限定理．故知 Z 近似服从 $N(1.5,1.5)$ 分布．

$\therefore P(Z\geq 3)=1-F_Z(3)\doteq 1-\Phi(\frac{3-1.5}{\sqrt{1.5}})=1-\Phi(1.2247)$

$=1-0.8888=0.1112$．

2. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立，且都服从相同的指数分布，概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0;\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$ 试求概率 $P(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i<240)$ 的近似值．

解：$X_1,\cdots,X_{100}$ 满足中心极限定理条件，由 $E(X_i)=2$，$D(X_i)=4$．

$\therefore E(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i)=100\times 2=200$；$D(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i)=100\times 4=400$．

由中心极限定理知：$\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从 $N(200,400)$ 分布．

$\therefore P(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i<240)=F(240)\doteq\Phi(\frac{240-200}{\sqrt{400}})=\Phi(2)=0.9772$．

3. 设从发芽率为 0.95 的一批种子里随机取出 400 粒．试求其不发芽的种子不多于 25 粒的概率．

解：设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{粒种子不发芽};\\ 0, & \text{第}i\text{粒种子发芽};\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,400$．相互独立．

$P\{X_i=1\}=1-0.95=0.05$；$P(X_i=0)=0.95$；

$\therefore E(X_i)=1\times 0.05+0\times 0.95=0.05$；

$E(X_i^2)=1^2\times 0.05+0^2\times 0.95=0.05$；

$\therefore D(X_i)=E(X_i^2)-(E(X_i))^2=0.05-(0.05)^2=0.0475$．

$E(\sum_{i=1}^{400}X_i)=400\times0.05=20$; $D(\sum_{i=1}^{400}X_i)=400\times0.0475=19$

由 $X_1,\cdots,X_{400}$ 服从中心极限定理，所以 $\sum_{i=1}^{400}X_i$ 近似服从正态分布 $N(20,19)$ 则 $\sum_{i=1}^{400}X_i$ = "400粒中不发芽的种子粒数"，

$$P(\sum_{i=1}^{n}X_i\leq 25)=F(25)\doteq\Phi(\frac{25-20}{\sqrt{19}})=\Phi(1.15)=0.8749.$$

4. 某学校有20000名住校生，每人以80%的概率去本校某食堂就餐，每个学生去就餐相互独立，问食堂应至少设多少个座位，才能以99%的概率保证去就餐的同学都有座位？

解：$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{名学生去就餐;}\\ 0, & \text{第}i\text{名学生没有去就餐.}\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,20000$，相互独立；

$P(X_i=1)=0.8$；$P(X_i=0)=0.2$. $i=1,\cdots,20000$ $E(X_i)=0.8$ $D(X_i)=0.8\times0.2$

$X_1,X_2,\cdots,X_{20000}$ 服从中心极限定理：$\sum_{i=1}^{20000}X_i$ = "就餐学生人数"

$\sum_{i=1}^{20000}X_i$ 近似服从 $N(E(\sum_{i=1}^{2000}X_i),D(\sum_{i=1}^{20000}X_i))$ 分布，

$$E(\sum_{i=1}^{20000}X_i)=\sum_{i=1}^{20000}E(X_i)=20000\times E(X_i)=20000\times0.8=16000,$$

$$D(\sum_{i=1}^{20000}X_i)=\sum_{i=1}^{20000}D(X_i)=20000\times D(X_i)=20000\times0.8\times0.2=3200.$$

即 $\sum_{i=1}^{20000}X_i\overset{\text{近似}}{\sim}N(16000,3200)$. 设至少设 x 个座位.

则 $P\{\sum_{i=1}^{20000}X_i\leq x\}=F(x)=\Phi(\frac{x-16000}{\sqrt{3200}})=0.99.$

$\therefore \dfrac{x-16000}{\sqrt{3200}}=2.325.$ $x=16000+2.325\sqrt{3200}=16131.5$

即至少设16132个座位.

5. 设一条自动生产线的产品合格率是0.8，要使一批产品的合格率在76%与84%之间的概率不小于90%，试用

(1) 切比雪夫不等式；(2) 中心极限定理两种方法求这批产品至少要生产多少件？试比较两种方法.

解：$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个产品合格;}\\ 0, & \text{第}i\text{个产品不合格;}\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$ 相互独立.

$P(X_i=1)=0.8$，$P(X_i=0)=0.2$.

$E(X_i)=0.8$，$D(X_i)=0.8\times0.2=0.16$.

$\sum_{i=1}^{n}X_i$ = "n个产品中的合格品数"，则合格率为 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0.8;\quad D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{0.16}{n}$$

(1) 根据切比雪夫不等式，$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2}$

即 $P\left\{0.8-\varepsilon<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.8+\varepsilon\right\}>1-\frac{0.16}{\varepsilon^2 n}$

现求 $P\left\{0.76<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.84\right\}>0.9$ 中的 n，对照上式

得 $\varepsilon=0.04$。设 $1-\frac{0.16}{(0.04)^2\cdot n}=0.9$。

得 $n=0.16/(0.1\times0.0016)=1000$。

(2) 根据中心极限定理：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(0.8,\frac{0.16}{n}\right)$。

$\therefore P\left\{0.76<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i<0.84\right\}=\Phi\left(\frac{0.84-0.8}{\sqrt{0.16/n}}\right)-\Phi\left(\frac{0.76-0.8}{\sqrt{0.16/n}}\right)$

$=\Phi(0.1\sqrt{n})-\Phi(-0.1\sqrt{n})=2\Phi(0.1\sqrt{n})-1>0.9$

$\therefore \Phi(0.1\sqrt{n})>0.95$，$\therefore 0.1\sqrt{n}=1.645$，$\therefore n=270.6\approx271$。

由结果可见(2)的结果比(1)更接近于实际。

6*. 某工厂生产的一种产品其次品率为0.005，每只产品是否为次品相互独立。产品按每100只包装成为一箱，一箱中若次品数超过3只就不能通过验收。各箱是否能通过验收相互独立。今有10000箱产品，求多于25箱不能通过验收的概率。

解：$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个产品为次品};\\ 0, & \text{第}i\text{个产品为正品}.\end{cases}$ $i=1,\cdots,100$ 相互独立

$P\{X_i=1\}=0.005$，$P\{X_i=0\}=0.995$。

$\sum_{i=1}^{100}X_i=$"一箱100只产品中的次品数"$\sim B(100,100\times0.005)$

$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i>3\right\}=1-\left[P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\right\}+P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\right\}+P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=2\right\}\right.$

$\left.+P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i=3\right\}\right]=1-\left[C_{100}^{0}(0.005)^0(0.995)^{100}+C_{100}^{1}0.005\cdot(0.995)^{99}\right.$

$\left.+C_{100}^{2}(0.005)^2(0.995)^{98}+C_{100}^{3}(0.005)^3(0.995)^{97}\right]$

$=1-0.9983=0.0017$.（亦可用泊松分布作近似计算）

又设 $Y_K=\begin{cases}1, & \text{第}K\text{箱不通过验收};\\ 0, & \text{第}K\text{箱通过验收}.\end{cases}$ $K=1,\cdots,10000$，相互独立