高等数学(下)习题解答

胡世凯

四川大学数学学院

2007/6/6

大学数学(I)微积分---2

复习提要

1．二次曲面和方程

2．多元函数的定义，连续，可微，偏导存在，偏导连续之间的关系

3．隐函数的偏导数（一阶及二阶）

4．方向导数、梯度和散度的定义及计算公式

5．多元微分学的几何应用

6．多元函数的极值（包括条件极值）

7．函数的奇偶性，积分区域对称性与二重积分计算的关系，二重积分的几何意义，三重积分（利用柱面坐标和球面坐标）的计算

8．两类曲线积分计算、格林公式、曲线积分与路径无关的条件,利用高斯公式计算曲面积分

9．正项级数、交错级数的敛散性、绝对收敛、条件收敛

10．函数展开成幂级数（间接法），傅立叶级数的收敛定理

11．一阶微分方程计算、二阶常系数线性方程的解与特征方程的关系

向量及其运算

一、　　填空题：

1．设 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$, $\boldsymbol{b}=\{2,\frac{4}{3},k\}$.若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 k=_$-\frac{26}{3}$_；若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 k=__$\frac{3}{2}$__.

2.　已知三点坐标 $A(3,1,2)$, $B(1,-1,1)$,$C(2,0,k)$.若 A,B,C 共线，则 k=_$\frac{3}{2}$_.

3．已知$|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$,夹角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$=____ $\sqrt{13}$ ______.

4. $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$=_ $\sqrt{83}$ _,$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$=_$-\frac{4}{\sqrt{11}}$_,$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$=_$-\frac{4}{\sqrt{154}}$_.

5.　设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$=___4____.

6.　平行于矢量 $\boldsymbol{a}=\{6,-7,6\}$的单位矢量 $\boldsymbol{b}$=__$(\frac{6}{11},-\frac{7}{11},\frac{6}{11})$___.

7.　设 $\boldsymbol{a}=\{2,1,2\}$, $\boldsymbol{b}=\{4,-1,10\}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则$\lambda$=__3____.

二、计算题：

1．已知单位向量 $\boldsymbol{P}_0$ 与 x 轴、y 轴的交角为$\frac{\pi}{3}$，与 z 轴的夹角为钝角，又 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,试计算：① $\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{a}$　；　② $\boldsymbol{P}_0\times\boldsymbol{a}$　；　③ $(\boldsymbol{P}_0\times\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{P}_0-3\boldsymbol{a})$.

解：单位向量 $\boldsymbol{P}_0=(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3},-\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),\vec{a}=(0,2,-1)$,

所以 ① $P_0\cdot\vec{a}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(0,2,-1)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$；

② $P_0\times\vec{a}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})\times(0,2,-1)=(\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{vmatrix})=(-\frac{1}{2}+\sqrt{2},\frac{1}{2},1)$；

③ $(P_0\times\vec{a})\cdot(2P_0-3\vec{a})=2(P_0\times\vec{a})\cdot P_0-3(P_0\times\vec{a})\cdot\vec{a}=0$.

2.　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，求$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

解：根据已知条件，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两相互垂直,且长度都为 1，所以$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3$.

3.　若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$ ，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，试证：$A$，$B$，$D$ 三点在同一直线上.

证明：只需证向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 为共线.通过计算有

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+10\vec{b}=2(\vec{a}+5\vec{b})$$

4.　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，$|\boldsymbol{b}|=2$, $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$.

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})}-\sqrt{\vec{a}^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\vec{a}^2+x^2\vec{b}^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}}-\sqrt{\vec{a}^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2+x^2\vec{b}^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}}+\sqrt{\vec{a}^2}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

5. 已知设$|\vec{m}|=5, |\vec{n}|=3, \vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$, 设$\overrightarrow{AB}=\vec{m}+2\vec{n}, \overrightarrow{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$.
求以$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$为边的平行四边形的面积.

解： 求以$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$为边的平行四边形的面积可以看成计算$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$的模.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(\vec{m}+2\vec{n})\times(\vec{m}-3\vec{n})=-3\vec{m}\times\vec{n}+2\vec{n}\times\vec{m}=-5\vec{m}\times\vec{n}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=5\times|\vec{m}\times\vec{n}|=5\cdot|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{2}=\frac{75}{2}$$

6. 若矢量$\vec{a}+3\vec{b}$垂直于$7\vec{a}-5\vec{b}$, 且矢量$\vec{a}-4\vec{b}$垂直于$7\vec{a}-2\vec{b}$, 求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

解：

根据已知, $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0, (\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$, 即有

$$\begin{cases}7\vec{a}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^2=0\\7\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7\cdot k^2+16\cdot k\cos\theta-15=0\\7\cdot k^2-30k\cos\theta+8=0\end{cases}(k=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|})$$

二者相减可得$46\cdot k\cos\theta-23=0\Rightarrow k=\frac{1}{2\cos\theta}$, 所以

$$7\cdot(\frac{1}{2\cos\theta})^2+16\cdot\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\cos\theta-15=0\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}\text{或}\theta=\frac{2\pi}{3}(\text{舍去})$$

7. 已知三矢量$\vec{a}=(2,3,-1), \vec{b}=(1,-2,3), \vec{c}=(1,-2,-7)$, 若矢量$\vec{d}$分别与$\vec{a},\vec{b}$垂直,
且$\vec{d}\cdot\vec{c}=10$, 求矢量$\vec{d}$.

解：

设$\vec{d}=(x,y,z)$, 根据条件有

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{d}=0\\\vec{b}\cdot\vec{d}=0\\\vec{d}\cdot\vec{c}=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y-z=0\\x-2y+3z=0\\x-2y-7z=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y-z=0\\x-2y+3z=0\\x-2y-7z=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=-1\end{cases}$$

所以矢量$\vec{d}$=(1,−1,−1).

8. 设向量$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}=(8,9,-12)$同向, 且点$A(2,-1,7)$, $|\overrightarrow{AB}|=34$, 求点B的坐标.

设点B的坐标(x, y, z), $\overrightarrow{AB}=(x-2,y+1,z-7)$, 根据条件

解法一：

$$\begin{cases}\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{9}=\frac{z-7}{-12}(=t)\\(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=34^2\end{cases}$$

$$(2+8t-2)^2+(-1+9t+1)^2+(7-12t-7)^2=34^2\Rightarrow t=2$$

所以点B的坐标为(18,17,−17).

解法二： 根据条件$|\overrightarrow{AB}|=t|\vec{a}|\Rightarrow t=2, \overrightarrow{AB}=t\vec{a}$......

9. 已知矢量$\vec{a},\vec{b}$的模$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, 夹角$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$, 求以矢量$\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$和$\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}$为边的平行四边形对角线的长.

解：

求以矢量$\vec{c}$和$\vec{d}$为边的平行四边形对角线的矢量$\vec{r}_1=\vec{c}+\vec{d}=6\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{r}_2=\vec{c}-\vec{d}=4\vec{a}+5\vec{b}$.

$$|\vec{r}_1|=|6\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(6\vec{a}-\vec{b})\cdot(6\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{36\vec{a}^2+\vec{b}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{36\cdot 8+9-12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=15$$

$$|\vec{r}_2|=|4\vec{a}+5\vec{b}|=\sqrt{(4\vec{a}+5\vec{b})\cdot(4\vec{a}+5\vec{b})}=\sqrt{16\cdot 8+25\cdot 9+40\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{128+465}=\sqrt{593}$$

10. 设矢量$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}, \vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, (1) 求向量$\vec{a}$的方向余弦; (2) 求向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影; (3) 若$|\vec{c}|=3$, 求向量$\vec{c}$, 使得三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$所构成的平行六面体的体积最大.

解：

(1) 向量$\vec{a}$的方向余弦$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}})$;

(2) 向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{1}{\sqrt{11}}$;

(3) 设向量$\vec{c}=(x,y,z)$, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$所构成的平行六面体的体积为

$$V=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=x+14y-11z, x^2+y^2+z^2=9, \text{即要求计算}$$

$V=x+14y-11z$在$x^2+y^2+z^2=9$条件下的条件极值.

令$F=x+14y-11z+\lambda(x^2+y^2+z^2-9)$, 对各自变量求导并令为0,

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ 14+2\lambda y=0 \\ -11+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2\lambda} \\ y=-\frac{7}{\lambda} \\ z=\frac{11}{2\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{49}{\lambda^2}+\frac{121}{4\lambda^2}-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{53}} \\ y=\mp 7\sqrt{\frac{6}{53}} \\ z=\pm\frac{11}{2}\sqrt{\frac{6}{53}} \\ \frac{1}{\lambda}=\pm\sqrt{\frac{6}{53}} \end{cases}$$

$$\text{向量}\vec{c}=(\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{53}},\mp 7\sqrt{\frac{6}{53}},\pm\frac{11}{2}\sqrt{\frac{6}{53}})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{53}}(\mp 1,\mp 14,\pm 11)$$

曲面和空间曲线

一、下列方程表示什么曲面：

1．$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$＿＿椭球面＿＿＿；2．$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z=0$＿＿椭圆抛物面＿＿＿；

3．$16x^2+4y^2-z^2=64$＿单叶双曲面＿；4．$x^2-y-z^2=0$＿＿＿双曲抛物面＿＿＿＿；

二、求过两曲面$x^2+y^2+4z^2=1$与$x^2-y^2-z^2=0$的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程.

解：母线平行于 z 轴的柱面方程中没有字母 z，只需由原两曲面消去 z 即可．所以所求柱面方程为$5x^2-3y^2=1$(双曲柱面).

三、求曲线$\begin{cases} y^2=6-z \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所得的旋转面 S 的方程，并求出 S 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线 xOy 面上的投影.

解：曲线绕 z 轴旋转所得的旋转面 S 方程为$x^2+y^2=6-z$；它和锥面的交线 xOy 面上的投影为二者连立消去 z，即$\begin{cases} x^2+y^2=6-\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

四、求以原点为顶点且经过三坐标轴的正圆锥面方程.

解法一：该正圆锥面方程可以看成是顶点在 O(0,0,0),准线为空间圆$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$形成的锥面。设 L 上任一点 M1(x1,y1,z1)，过 O 与 M1 的直线方程为$\dfrac{x}{x_1}=\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{z}{z_1}$(即锥面上动点 M(x,y,z)满足的方程)，设$x_1=tx, y_1=ty, z_1=tz$，代入准线方程得到

$$\begin{cases} t^2(x^2+y^2+z^2)=1 \\ t(x+y+z)=1 \end{cases}$$

消去 t 得到正圆锥面方程：$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

解法二：该正圆锥面方程可以看成由一组空间圆$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=t^2 \\ x+y+z=t \end{cases}$形成的旋转面。消去 t 得到正圆锥面方程：$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

解法三：解：（这里仅求Ⅰ、Ⅶ卦限内的圆锥面，其余类推）

$\because$ 圆锥的轴l与$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$等角，故l的方向数为$1:1:1$

$\therefore$ 与l垂直的平面之一令为$x+y+z=1$

平面$x+y+z=1$在所求的锥面的交线为一圆，该圆上已知三点$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，该圆的圆心为$(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$，故该圆的方程为：

$$\begin{cases} (x-\dfrac{1}{3})^2+(y-\dfrac{1}{3})^2+(z-\dfrac{1}{3})^2=(\dfrac{2}{3})^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

它即为要求圆锥面的准线。

对锥面上任一点$M(x,y,z)$，过M与顶点O的母线为：

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$$

令它与准线的交点为(X_0, Y_0, Z_0)，即存在t，使$X_0=xt, Y_0=yt, Z_0=zt$，将它们代入准线方程，并消去t得：

$$xy+yz+zx=0$$

此即为要求的圆锥面的方程。

解法四：$\because$ 圆锥的轴l与$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$等角，故l的方向$\vec{l}=(1,1,1)$，正圆锥上的任意点 M(x,y,z)与顶点 O 形成的向量$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$与$l$的方向$\vec{l}=(1,1,1)$夹角相等，所以

$$\cos(\overrightarrow{OM},\vec{l})=\cos(\vec{i},\vec{l})$$

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\Rightarrow xy+yz+zx=0$$

此即为要求的圆锥面的方程。

五、求过两曲面$x^2+y^2+4z^2=1$ 和$x^2=y^2+z^2$的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程.

解：与二题重复

六、求下列各平面曲线的旋转曲面方程：

1. $\begin{cases}x^2+4y^2=1\\ z=0\end{cases}$分别绕 x 轴，y 轴旋转；2. $\begin{cases}z=\sqrt{y}\\ x=0\end{cases}$分别绕 y 轴，z 轴旋转.

解：1. 绕 x 轴旋转：$x^2+4y^2+4z^2=1$；绕 y 轴旋转：$x^2+4y^2+z^2=1$；

2. 绕 y 轴旋转：$x^2+z^2=y$；绕 z 轴旋转：$z^2=\sqrt{x^2+y^2}$.

七、求螺旋线$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=b\theta\end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解：在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=a\sin\theta\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$；

在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程：$\begin{cases}x=0\\ y=a\sin\theta\\ z=b\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=a\sin\dfrac{z}{b}\\ x=0\end{cases}$；

在 zOx 面上的投影曲线的直角坐标方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=0\\ z=b\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b}\\ y=0\end{cases}$.

平面和空间直线

一、求过点 $P(1,-5,1)$和 Q(3,2,–l)且平行于 y 轴的平面方程.

解：设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，根据条件：

$$\begin{cases} A-5B+C+D=0 \\ 3A+2B-C+D=0 \\ (A,B,C)\cdot(0,1,0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+C+D=0 \\ 3A-C+D=0 \\ B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-D/2 \\ A=-D/2 \\ B=0 \end{cases}$$

所以平面方程为 $x+z=2$.

二、求过点(1,0,1)，平面 $x+y-5z-1=0$ 与 $2x+3y-z+2=0$ 的交线的平面方程.

解一：过直线的平面方程为：$x+y-5z-1+k(2x+3y-z+2)=0$，由点(1,0,1)可得 $k=5/3$，从而平面方程：$13x+18y-20z+7=0$.

解二：过两平面的法向量的叉积向量为：$(1,1,-5)\times(2,3,-1)$，再由点(1,0,1)可得.

三、求过点 $P(-3,5,9)$与 $L_1:\begin{cases} y=3x+5 \\ z=2x-3 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$ 都相交的直线方程.

解法一：设所求直线方程为 L：$\dfrac{x+3}{m}=\dfrac{y-5}{n}=\dfrac{z-9}{p}$ 它分别与两已知直线共面。根据

$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=5+3t \\ z=-3+2t \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} x=t \\ y=-7+4t \\ z=10+5t \end{cases}$ 可得：$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -12 \end{vmatrix}=0$；$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & -12 & 1 \end{vmatrix}=0$，即

$$\begin{cases} 4m-2n+p=0 \\ 32m+7n-12p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m-2n=-p \\ 32m+7n=12p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=\dfrac{20}{23}p \\ m=\dfrac{17}{92}p \end{cases}$$

直线方程 L 的方向为：$(80,17,92)$，直线方程：$\dfrac{x+3}{80}=\dfrac{y-5}{17}=\dfrac{z-9}{92}$

解法二：根据 $L_1:\begin{cases} x=t \\ y=5+3t \\ z=-3+2t \end{cases}$，$L_2:\begin{cases} x=t \\ y=-7+4t \\ z=10+5t \end{cases}$ 可得

过点 $P(-3,5,9)$和 L1 的平面方程：$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z-9 \\ 0+3 & 5-5 & -3-9 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4x-2y+z+13=0$

过点 $P(-3,5,9)$和 L2 的平面方程：$\begin{vmatrix} x+3 & y-5 & z-9 \\ 0+3 & -7-5 & 10-9 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 32x+7y-12z+169=0$

直线方程：$\begin{cases} 4x-2y+z+13=0 \\ 32x+7y-12z+169=0 \end{cases}$

四、求过点 M(3,–2,1)且与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ 垂直相交的直线方程.

解：设所求直线方程为 L：$\dfrac{x-3}{m}=\dfrac{y+2}{n}=\dfrac{z-1}{p}$。根据条件

$4m-n+3p=0$，$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 4m-2n-6p=0$，从而 $n=-9p; m=-3p$；

所求直线方程为 L：$\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+2}{-9}=\dfrac{z-1}{1}$

五、已知直线$\dfrac{x-a}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{a}$在平面$3x+4y-az=3a-1$上，求 a.

解：根据直线上点$(a,0,1)$满足平面方程或直线方向$(3,-2,a)$与平面法向垂直，可得$a=1$

六、求点 M(–1,2,0)在平面$x+2y-z+1=0$上的投影点的坐标.

解：过点 M(–1,2,0)与平面$x+2y-z+1=0$垂直的直线为：$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t \\ z=-t \end{cases}$，代入平面方程得到$t=-2/3$，

所以所求点$(-5/3,2/3,2/3)$.

七、求直线$L:\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线方程.

解：首先直线与平面的交点为：$\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z=9 \\ 4x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(\dfrac{12}{13},-\dfrac{11}{39},\dfrac{116}{39})$；

直线上另取一点，如. 过点 M(0,–1,–4)与平面$4x-y+z=1$垂直的直线为：$\begin{cases} x=4t \\ y=-1-t \\ z=-4+t \end{cases}$，代入平面方程得

到$t=2/9$，所以所求点$(8/9,-11/9,-34/9)$.根据两点式方程有

$$\frac{x-\frac{12}{13}}{\frac{8}{9}-\frac{12}{13}}=\frac{y+\frac{11}{39}}{-\frac{11}{9}+\frac{11}{39}}=\frac{z-\frac{116}{39}}{-\frac{34}{9}-\frac{116}{39}} \Rightarrow \frac{x-\frac{12}{13}}{-12}=\frac{y+\frac{11}{39}}{-330}=\frac{z-\frac{116}{39}}{-2370}$$

八、若直线过点 M(–1,0,4)平行于平面$3x-4y+z-10=0$且与直线 L：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交，求此直线方程.

解：设所求直线方程为 L：$\dfrac{x+1}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-4}{p}$。根据条件$3m-4n+p=0$；

$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2m-12n+9p=0$，从而$m=6p/11, n=29p/44$，直线方程为 L：$\dfrac{x+1}{24}=\dfrac{y}{29}=\dfrac{z-4}{44}$

九、求点 P(3,–1,2)到直线$L:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.

解：直线化为参数方程 $L:\begin{cases}x=1\\ y=-2+t\\ z=t\end{cases}$，求点 P(3,–1,2)到直线的距离为：

$$d=\frac{|(0,1,1)\times(2,1,2)|}{|(0,1,1)|}=\frac{|(1,2,-2)|}{|(0,1,1)|}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

十、设有两直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{m}=\dfrac{z-3}{2}$，$L_2:\begin{cases}x=1-t\\ y=-1+2t\\ z=-1-3t\end{cases}$.

1．试问 m 为何值时，直线 L_1 和 L_2 相交；
2．当 L_1 和 L_2 相交时，求过 L_1 和 L_2 的平面方程.

解：1．直线 L_1 和 L_2 相交：$\begin{vmatrix}1 & m & 2\\ -1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & -4\end{vmatrix}=0\Rightarrow m=7$；

2．当 L_1 和 L_2 相交时，过 L_1 和 L_2 的平面方程的法方向为. $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 7 & 2\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-25,1,9)$，所求方程为：

$-25(x-2)+(y+2)+9(z-3)=0\Rightarrow -25x+y+9z+25=0$.

十一、已知直线 $L_1:x=t+1,y=2t-1,z=t$ 与 $L_2:x=t+2,y=2t-1,z=t+1$,求直线 L_1 与 L_2 之间的距离.

解：两直线相互平行，所以可计算点(2,–1,1)到 L1 的距离即可：

$$d=\frac{|(1,2,1)\times(1,0,1)|}{|(1,2,1)|}=\frac{|(2,0,-2)|}{|(1,2,1)|}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

十二、设一平面垂直于平面 $z=0$，并通(1,–1,1)到直线 $L:\begin{cases}y-z+1=0\\ x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

解：设平面方程为 $A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0$．由它与平面 $z=0$ 垂直，可得 $C=0$，方程为：

$A(x-1)+B(y+1)=0$；过(1,–1,1)与直线 $L:\begin{cases}x=0\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}$ 垂直的平面方程为：

$y+z+2=0$，直线 L 与它的交点为：$(0,-3/2,-1/2)$,代入方程 $A(x-1)+B(y+1)=0$ 得到 $B=-2A$，所求平面的方程为：$x-2y-3=0$.

十三、直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

解：$L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=t\end{cases}$，绕 z 轴旋转的旋转曲面方程：

$$\begin{cases}x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta\\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta\Rightarrow x^2+y^2-z^2=1\\ z=t\end{cases}$$

十四、证明：平面 $6x+3y-2z+12=0$ 通过直线 $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{3}$

证明：直线上找两点满足平面方程即可。

十五、求异面直线 $L_1:\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 与 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{0}$ 之间的距离.

解：与直线方向都垂直的方向为：$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,2,-2)$ 过 L1 且与 L2 平行的平面方程为：

$x+2y-2z-1=0$。所求距离为点(0,0,−2)到平面的距离，即：$d=\frac{|0+0+4-1=0|}{|(1,2,-2)|}=1$。

多元函数的基本概念

一、单项选择题：

1．已知 $f(\frac{1}{y},\frac{1}{x})=\frac{xy-x^2}{x-2y}$，则了 $f(x,y)=($　D　).

A. $\frac{x-y}{xy-2x^2}$　　B. $\frac{x-y}{xy-2y^2}$　　C. $\frac{y-x}{xy-2x^2}$　　D. $\frac{y-x}{xy-2y^2}$

2．$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -\frac{1}{2}}}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}=($　C　).

A. e^2　　B. $e^{-\frac{1}{2}}$　　C. e^{-2}　　D. $e^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -\frac{1}{2}}}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -\frac{1}{2}}}[1+(1+xy)]^{\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{y}}=e^{-2}$$

3．$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)\sin(\frac{3}{x^2+y^2})=($　B　)

A. 0　　B. 3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. ∞

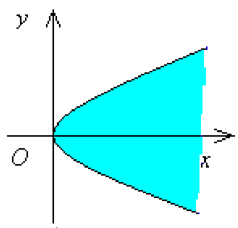
4．如果定义 $f(0,0)=($　B　)，则函数 $f(x,y)=\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ 在(0,0)处连续.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. 4　D. -4

二、写出下列函数的定义域，并绘出定义域的图形：

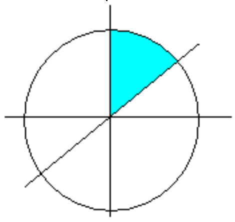
1．$z=\ln(y^2-2x+1)$；

解：$y^2-2x+1>0\Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$



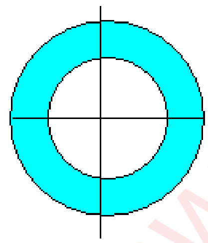
2．$z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}(a>0,b>0)$；　解：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

3．$z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　解：$\begin{cases}y>x\\ x\ge 0\\ x^2+y^2<1\end{cases}$



4．$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$.

解：$r\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le R$



三、求下列极限：

1．$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+1)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$;

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1-\cos\rho^2}{\rho^2}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{4}\rho^4\sin^2 2\theta}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1-\cos\rho^2}{\rho^2}=0$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$;

误解：$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=\lim\limits_{\rho\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\rho|\cos\theta|}}{3\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta}=\lim\limits_{\rho\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\rho}}\dfrac{\sqrt{|\cos\theta|}}{3\cos\theta+2\sin\theta}=0$

正确解法：极限不存在。

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y=x}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y=x}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{5x}=0$；

令$y=\dfrac{1}{2}(-3x+\sqrt{x})$，当$x\to+\infty, y\to-\infty$，这时 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y=x-\sqrt{x}}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}[x\times\dfrac{\sin(xy)}{xy}]=2\times 1=2$.

四、求下列函数的间断点：

1. $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;

解：间断点满足$y^2=2x$，即此抛物线上的所有点都是间断点.

2. $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

解：间断点满足$1-x^2-y^2=0\Rightarrow x^2+y^2=1$，即单位圆上的所有点都是间断点.

五、证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在$(0,0)$点不连续.

证明：因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\dfrac{x^2\cdot x}{x^3+x^3}=\dfrac{1}{2}\neq 0$，所以函数在$(0,0)$点不连续.

偏导数

一、单项选择题：

1. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点两个偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 存在的(D).

A．必要条件　B．充分条件　C．充要条件　D．既非充分也非必要条件

2．函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点连续的充分必要条件是(A　)

A. $f(x,y)=f(0,0)+\alpha,\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0$　　B. $f(x,y)$ 关于 x 连续，且关于 y 连续

C. $\lim\limits_{x\to0}[\lim\limits_{y\to0}f(x,y)]=f(0,0)$　　D. $\lim\limits_{y\to0}[\lim\limits_{x\to0}f(x,y)]=f(0,0)$

3．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0) 处 (　C　)

A．连续，偏导数存在　　B．连续，偏导数不存在

C．不连续，偏导数存在　　D．不连续，偏导数不存在

二、填空题：

1. 设 $z=x^{\ln y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __ $\dfrac{x^{\ln y}\ln x}{y}$ ______.

2. 若 $u=\sqrt{\sin^2x+\sin^2y+\sin^2z}$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(0,0,\frac{\pi}{4})}=$ __ $\dfrac{\sqrt2}{2}$ ______.

3. 若 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为__ $-\dfrac{\pi^2}{e^2}$ ______.

三、求下列函数的偏导数：

1．$z=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

解：$z=\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2}$

2. $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)-2y\cos(xy)\sin(xy)=y[\cos(xy)-\sin(2xy)];$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)-2x\cos(xy)\sin(xy)=x[\cos(xy)-\sin(2xy)].$$

3. $u=\arctan(x-y)^z$；

解：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot z(x-y)^{z-1}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot z(x-y)^{z-1}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}};$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+(x-y)^{2z}}\cdot(x-y)^z\ln(x-y)=\frac{(x-y)^{z-1}\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

4. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{x^2+y^2};\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$

四、解答题：

1. $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$，求 $f_x(1,e),\ f_y(1,e);$

解：$f_x(x,y)=\frac{1}{x+\ln y},\Rightarrow f_x(1,e)=\frac{1}{2};\quad f_y(x,y)=\frac{1}{x+\ln y}\cdot\frac{1}{y}\Rightarrow f_y(1,e)=\frac{1}{2e}.$

2. $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1);$

解：$f_x(x,y)=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-x/y}}\frac{1}{y};\ f_x(x,1)=1.$

3. $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1),\ f_{xz}(1,0,2),\ f_{yz}(0,-1,0),\ f_{zzx}(2,0,1);$

解：$f_{xx}(x,y,z)=2z\Rightarrow f_{xx}(0,0,1)=2;\quad f_{xz}(x,y,z)=2x\Rightarrow f_{xz}(1,0,2)=2;$

$f_{yz}(x,y,z)=2z\Rightarrow f_{yz}(0,-1,0)=0;\quad f_{zzx}(x,y,z)=0\Rightarrow f_{zzx}(2,0,1)=0.$

4. $z=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2})=\frac{-y}{x^2+y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

5. $z=x\ln xy$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln xy+1;\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x};\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x\partial y}=0.$

全微分

一、选择题:

1．已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某函数的全微分，则 a 和 b 的值分别等于 (　B　)

A．–2 和 2　B. 2 和–2　C．–3 和 3　D. 3 和–3

2．考虑二元函数的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数相等；

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微；④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有(　无答案　)

A．②⇒③⇒①　B．③⇒②⇒①　C．③⇒④⇒①　D．③⇒①⇒④

二、填空题:

1. 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$，则 $df(1,1,1)=$ $dx-dy$.

2. 设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，则 $df=$ $\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$.

3. 函数 $z=e^{xy}$，当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分为 $e/4$.

4. $\dfrac{(1.01)^2}{\sqrt[3]{0.97}\sqrt[4]{1.02}}$ 的近似值为 1.025.

$$f=\frac{x^2}{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{4}}}=x^2y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}\Big|_{(0.01,-0.03,0.02)}^{(1,1,1)}$$

三、求下列函数的全微分:

1. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

解: $$dz=\frac{\sqrt{x^2+y^2}dy-y\cdot\dfrac{2(xdx+ydy)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)dy-(xydx+y^2dy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xydx+x^2dy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

2．$z=\ln(1+x^2+y^2)$(当 x＝1，y=2 时);

解: $$dz=\frac{2xdx+2ydy}{1+x^2+y^2}\Rightarrow dz\big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}(dx+2dy)$$

3．$u=e^{xy}\sin(x+y)$;

解: $$du=\sin(x+y)e^{xy}(xdy+ydx)+e^{xy}\cos(x+y)(dx+dy)$$
$$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy$$

4．$u=x^{yz}$.

解: $$du=yzx^{yz-1}dx+x^{yz}\cdot\ln x\cdot z\cdot dy+x^{yz}\cdot\ln x\cdot y\cdot dz=yzx^{yz-1}dx+x^{yz}\cdot z\ln x\cdot dy+x^{yz}\cdot y\ln x\cdot dz$$

或者 $$\ln u=yz\ln x\Rightarrow\frac{du}{u}=\frac{yz}{x}dx+\ln x(ydz+zdy)\Rightarrow du=x^{yz}\frac{yz}{x}dx+x^{yz}\ln x(ydz+zdy)$$

四、设 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x,2x)=x,\ f_x(x,2x)=x^2$, 求 $f_y(x,2x)$.

解：对 $f(x,2x)=x$ 两边对 x 求导，可得　$f_x(x,2x)+2f_y(x,2x)=1\Rightarrow f_y(x,2x)=\dfrac{1}{2}[1-x^2]$

五、设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明：$f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

证明：

$f_x(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$；$f_y(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$；

$f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$; $f_{yx}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

多元复合函数的求导法则

一、填空题：

1．设 $z=u^2+v^2$, 而 $u=x+y, v=x-y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ___ $2x$ ___, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ ___ $2y$ ___.

2. 设 $z=e^{x-2y}$, 而 $x=\sin t, y=t^3$, 则 $\frac{dz}{dt}=$ ___ $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$ ___.

3. 设 $z=\arctan(xy)$, 而 $y=e^x$, 则 $\frac{dz}{dx}=$ ___ $\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$ ___.

4. 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x, z=\cos x$, 则 $\frac{du}{dx}=$ ___ $e^{ax}\sin x$ ___.

二、求下列函数的一阶偏导数：

1. $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$;

解：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf_x(x^2-y^2,e^{xy})+ye^{xy}f_y(x^2-y^2,e^{xy});$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2yf_x(x^2-y^2,e^{xy})+xe^{xy}f_y(x^2-y^2,e^{xy}).$$

2. $u=yf(x^2-y^2)$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=2xyf'(x^2-y^2)$;　$\frac{\partial u}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)$.

三、求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, (其中 f 具有二阶连续偏导数):

1． $z=f(xy^2,x^2y)$;

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2f_1(xy^2,x^2y)+2xyf_2(xy^2,x^2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1(xy^2,x^2y)+x^2f_2(xy^2,x^2y)$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=y^2\frac{\partial}{\partial x}[f_1(xy^2,x^2y)]+2yf_2(xy^2,x^2y)+2xy\frac{\partial}{\partial x}[f_2(xy^2,x^2y)]\\&=y^2[y^2+2xyf_{12}]+2yf_2+2xy[y^2f_{21}+2xyf_{22}]\\&=y^4f_{11}+4xy^3f_{12}+4x^2y^2f_{22}+2yf_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=2xf_1(xy^2,x^2y)+2xy\frac{\partial}{\partial y}[f_1(xy^2,x^2y)]+x^2\frac{\partial}{\partial y}[f_2(xy^2,x^2y)]\\&=2xf_1+2xy[2xyf_{11}+x^2f_{12}]+x^2[2xyf_{21}+x^2f_{22}]\\&=4x^2y^2f_{11}+4x^3yf_{12}+x^4f_{22}+2xf_1.\end{aligned}$$

2． $z=f(\sin x,\cos y,e^{x+y})$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos xf_1+e^{x+y}f_3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin yf_2+e^{x+y}f_3$;

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=(-\sin x)f_1+\cos x\frac{\partial f_1}{\partial x}+e^{x+y}f_3+e^{x+y}\frac{\partial f_3}{\partial x}\\&=(-\sin x)f_1+\cos x[\cos xf_{11}+e^{x+y}f_{13}]+e^{x+y}f_3+e^{x+y}[\cos xf_{31}+e^{x+y}f_{33}]\\&=\cos^2 xf_{11}+2e^{x+y}\cos xf_{13}+e^{2x+2y}f_{33}-f_1\sin x+e^{x+y}f_3\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(-\cos y)f_2-\sin y\frac{\partial f_2}{\partial y}+e^{x+y}f_3+e^{x+y}\frac{\partial f_3}{\partial y}$$
$$=-\sin y[-\sin yf_{22}+e^{x+y}f_{23}]_3+e^{x+y}[-\sin yf_{32}+e^{x+y}f_{33}]$$
$$=\sin^2 yf_{11}-2e^{x+y}\sin yf_{23}+e^{2x+2y}f_{33}-f_2\cos y+e^{x+y}f_3$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\frac{\partial f_1}{\partial y}+e^{x+y}f_3+e^{x+y}\frac{\partial f_3}{\partial y}$$
$$=\cos x[-\sin yf_{12}+e^{x+y}f_{13}]+e^{x+y}f_3+e^{x+y}[-\sin yf_{32}+e^{x+y}f_{33}]$$
$$=-\cos x\sin yf_{12}+e^{x+y}\cos xf_{13}-e^{x+y}\sin yf_{32}+e^{2x+2y}f_{33}+e^{x+y}f_3$$

四、解答题：

1．设 f 和 g 为连续可微函数，$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$;

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+yf_2;\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)(f_1+yf_2)g'$

2．设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中 f 和 g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})+\frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x});\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x});$$
$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x}{y}f''(\frac{x}{y})+\frac{y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})-\frac{x}{y}f''(\frac{x}{y})-\frac{y^2}{x^2}g''(\frac{y}{x})=0.$$

3．设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$, $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'(2x-y)+g_1(x,xy)+yg_2(x,xy)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''(2x-y)+xg_{12}(x,xy)+g_2(x,xy)+xyg_{22}(x,xy)$$

4．设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$, 其中 $f(x,y)$具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin yf_1(e^x\sin y,x^2+y^2)+2xf_2(e^x\sin y,x^2+y^2)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos yf_1+e^x\sin y[e^x\cos yf_{11}+2yf_{12}]+2x[e^x\cos yf_{21}+2yf_{22}]$$
$$=e^x\cos yf_1+e^{2x}\sin y\cos yf_{11}+2ye^x\sin yf_{12}+2xe^x\cos yf_{21}+4xyf_{22}$$
$$=e^{2x}\sin y\cos yf_{11}+2e^x(y\sin y+x\cos y)f_{12}+4xyf_{22}+e^x\cos yf_1$$

5．设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f,φ 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$
$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

6．设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1，1)处可微，且 $f(1,1)=1,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\quad \varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$；

解：由题设　$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=3\varphi^2(x)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$$
$$=3\left[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\left(f_1'(x,x)+f_2'(x,x)\right)\right]\Big|_{x=1}$$
$$=3\cdot\left[2+3\cdot(2+3)\right]=51$$

7．试用线性变换 $\xi=x+at,\eta=x-at$ 把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0(a\neq 1)$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta};\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=a\frac{\partial z}{\partial\xi}-a\frac{\partial z}{\partial\eta}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial z}{\partial\xi}]+\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial z}{\partial\eta}]=[\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}]+[\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}]$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial z}{\partial\xi}]-a\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial z}{\partial\eta}]=a[\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}]-a[\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial t}]=a^2[\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}]$$

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 化简可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

五、证明题：

1．设 $\omega=f(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$, 证明：$x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=0;$

证明：
$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{1}{z}f_1;\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{z}f_2;\frac{\partial\omega}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}f_1-\frac{y}{z^2}f_2$$
$$x\frac{\partial\omega}{\partial x}+y\frac{\partial\omega}{\partial y}+z\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{x}{z}f_1+\frac{y}{z}f_2-\frac{x}{z}f_1-\frac{y}{z}f_2=0$$

2．设 $z=x\varphi(\frac{x}{y^2})$, 验证　$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

证明：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(\frac{x}{y^2})+\frac{x}{y^2}\varphi'(\frac{x}{y^2});\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'(\frac{x}{y^2})(-\frac{2x}{y^3})=-\frac{2x^2}{y^3}\varphi'(\frac{x}{y^2})$$
$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\varphi(\frac{x}{y^2})+2\frac{x^2}{y^2}\varphi'(\frac{x}{y^2})+-\frac{2x^2}{y^2}\varphi'(\frac{x}{y^2})=2z.$$

3．设$u=f(x,y)$有连续二阶偏导数，$x=\dfrac{s-\sqrt{3}t}{2},y=\dfrac{\sqrt{3}s+t}{2}$，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

证明：

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial y};\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}[\frac{\partial z}{\partial x}]+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial s}[\frac{\partial z}{\partial y}]=\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}]+\frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}]$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial z}{\partial x}]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial z}{\partial y}]=-\frac{\sqrt{3}}{2}[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}]+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}]$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

所以$\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{3}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{3}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

4．设$z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中f为可导函数，验证：$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xyf'(x^2-y^2)}{[f(x^2-y^2)]^2};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}+\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{[f(x^2-y^2)]^2}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'(x^2-y^2)}{[f(x^2-y^2)]^2}+\frac{1}{y}\frac{1}{f(x^2-y^2)}+\frac{2yf'(x^2-y^2)}{[f(x^2-y^2)]^2}=\frac{z}{y^2}.$$

隐函数的求导公式

一、填空题：

1．已知$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$，其中$z=f(x,y)$，则 dz=$-\dfrac{1}{\sin 2z}(\sin 2xdx+\sin 2ydy)$.

2．已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$$\dfrac{x+y}{x-y}$.

3．函数$z=z(x,y)$是由方程$z=\varphi(\dfrac{x}{z},y)$所确定的函数，其中φ具有连续的一阶偏导数，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$$\dfrac{z\varphi_1}{z^2+x\varphi_1}$.

4．由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分 dz=$dx-\sqrt{2}dy$.

二、计算由下列方程所确定的隐函数的一阶偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1. $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$;

解：

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{xyz}}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{xyz}-yz}{xy-\sqrt{xyz})};\quad 2+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{xyz}}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\sqrt{xyz}-xz}{xy-\sqrt{xyz}}$$

2. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$.

解：方程化为$x=z\ln z-z\ln y$， $1=(\ln z+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\ln y\dfrac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\ln z-\ln y+1}$

$$0=(\ln z-\ln y+1)\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\ln z-\ln y+1}\cdot\frac{z}{y}$$

三、计算由下列方程所确定的隐函数的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1. $z^3-3xyz=a^3$;（a 为常数）

解：$3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$； $3z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}-3xz-3xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{yz}{z^2-xy})=\frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(z^2-xy)-yz(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{-(xy+z^2)y\frac{\partial z}{\partial x}+y^2z}{(z^2-xy)^2}=\frac{-y^2z(xy+z^2)+y^2z(z^2-xy)}{(z^2-xy)^3}=\frac{-2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{yz}{z^2-xy})=\frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(z^2-xy)-yz(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x)}{(z^2-xy)^2}=\frac{z^5-2xy^2z^4-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}$$

2. $e^z - xyz = 0.$

解：$e^z\dfrac{\partial z}{\partial x} - yz - xy\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz}{e^z - xy}; e^z\dfrac{\partial z}{\partial y} - xz - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz}{e^z - xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{e^z - xy}\right) = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) - yz(e^z\frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(e^z - xy)^2} = \frac{y^2 z e^z - 2xy^3 z}{(e^z - xy)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{e^z - xy}\right) = \frac{(z + y\frac{\partial z}{\partial y})(e^z - xy) - yz(e^z\frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(e^z - xy)^2}$$

$$= \frac{ze^z(e^z - xy) - xyz^2 e^z + xyz(e^z - xy)}{(e^z - xy)^3} = \frac{ze^{2z} - xyz^2 e^z - x^2 y^2 z}{(e^z - xy)^3}$$

四、求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数.

1. 设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

解：消去 z 得到$4x^2 + 5y^2 = 20$，从而$8xdx + 10ydy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{5y}$

设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

消去 y 得到$2z + 3z^2 - x^2 = 20$，从而$2\dfrac{dz}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} - 2x = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{1 + 3z}$

2. 设$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解：$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = e^u + u\sin v - x = 0 \\ G = e^u - u\cos v - y = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & u\cos v \\ 0 & u\sin v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}} = -\frac{-u\sin v}{e^u u(\sin v - \cos v) + u} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & u\cos v \\ -1 & u\sin v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}} = -\frac{u\cos v}{e^u u(\sin v - \cos v) + u} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & -1 \\ e^u - \cos v & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^u + \sin v & u\cos v \\ e^u - \cos v & u\sin v \end{vmatrix}} = -\frac{e^u - \cos v}{e^u u(\sin v - \cos v) + u} = \frac{\cos v - e^u}{e^u u(\sin v - \cos v) + u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}e^u+\sin v & 0\\ e^u-\cos v & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^u+\sin v & u\cos v\\ e^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}}=-\frac{-(e^u+\sin v)}{e^u u(\sin v-\cos v)+u}=\frac{e^u+\sin v}{e^u u(\sin v-\cos v)+u}$$

3．设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,e^y,z)=0,y=\sin x,$ 其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

解：$\varphi(x^2,e^{\sin x},z)=0\Rightarrow 2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2+\varphi_3\frac{dz}{dx}=0\Rightarrow\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\varphi_3}[2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2]$

$$\frac{du}{dx}=f_1+f_2\cos x+f_3\frac{dz}{dx}=f_1+f_2\cos x-\frac{f_3}{\varphi_3}[2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2]$$

五、证明题：

1．设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x+\frac{x}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$

证明：$F_1(1+\frac{1}{y})+F_2(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x}-\frac{F_1}{F_2}(x+\frac{x}{y})$

$$F_1(-\frac{x}{y^2})+F_2(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_1}{F_2}\frac{x^2}{y^2}-x$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\frac{F_1}{F_2}(x^2+\frac{x^2}{y})+\frac{F_1}{F_2}\frac{x^2}{y}-xy=z-xy-\frac{F_1}{F_2}x^2\ \ldots$$

方程 F 应该为 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$，可以证明结论成立：

$$F_1(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})+F_2(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}\frac{zF_2-x^2F_1}{xF_1+yF_2}$$

$$F_1(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y})+F_2(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\frac{zF_1-y^2F_2}{xF_1+yF_2}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF_2-x^2yF_1}{xF_1+yF_2}+\frac{xzF_1-xy^2F_2}{xF_1+yF_2}=\frac{z(xF_1+yF_2)-xy(xF_1+yF_2)}{xF_1+yF_2}=z-xy$$

2．设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明：由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$

证明：

$$\Phi_1(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+\Phi_2(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\Phi_1}{a\Phi_1+b\Phi_2};\Phi_1(-a\frac{\partial z}{\partial y})+\Phi_2(c-b\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\Phi_2}{a\Phi_1+b\Phi_2};$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ac\Phi_1}{a\Phi_1+b\Phi_2}+\frac{bc\Phi_2}{a\Phi_1+b\Phi_2}=\frac{ac\Phi_1+bc\Phi_2}{a\Phi_1+b\Phi_2}=c.$$

微分法在几何上的应用

一、填空题：

1．设在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上，某一点的切平面过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$，则此切平面方程为___ $x+2z=7$ or $x+4y+6z=21$ ______.

设切点为 M(x0,y0,z0)，切平面方程为 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$，直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$ 在切平面上，从而有

$$\begin{cases} x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}+3z_0^{\ 2}=21(\text{椭球面上}) \\ 2x_0+2y_0-3z_0=0(\text{直线方向与切面法线垂直}) \\ 7x_0+7y_0=21(\text{直线上点}(7,\frac{7}{2},0)\text{在切面上}) \end{cases} \begin{cases} x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}=9 \\ x_0+y_0=3 \\ z_0=2 \end{cases} \begin{cases} x_0=3 \\ y_0=0 \\ z_0=2 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \\ z_0=2 \end{cases}$$

切平面方程为　$x+2z=7$　or　$x+4y+6z=21$

2．由曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $(0,\dfrac{2}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{15}})$ ______.

在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的外法向与 z 轴夹角为锐角，从而

$$3x^2+2y^2+3z^2=12\Rightarrow \vec{n}=(6x,4y,6z)|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \vec{n}^0=(0,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}},\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{30}})\Rightarrow \vec{n}^0=(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$$

3．曲面 $z-e^x+2xy=2$ 在点(1,2,0)处的切平面方程为__ $(4-e)x+2y+z=8-e$ ______.

$$\vec{n}=(-e^x+2y,2x,1)|_{(1,2,0)}=(4-e,2,1)$$
$$(4-e)(x-1)+2(y-2)+z=0\Rightarrow(4-e)x+2y+z=8-e$$

4．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点(l，−2,2)处的法线方程为__ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$ ______.

$$\vec{n}=(2x,4y,6z)|_{(1,-2,2)}=2(1,-4,6)\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$$

5．曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是____ $2x+4y-z=5$ ______.

$$\vec{n}=(2x,2y,-1)//(2,4,-1)\Rightarrow x=1,y=2,z=5$$
$$\Rightarrow 2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\Rightarrow 2x+4y-z=5$$

二、选择题：

1．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是(C)

A. (1, −1,2)　B.(−1 , 1,2)　C. (l , 1 , 2)　D. (−l, −1 , 2)

2 .在曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=-t^2 \\ z=t^2 \end{cases}$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(A)

A．只有一条　B．只有两条　C．至少有三条　D．不存在

3．设函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)附近有定义，且 $f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=1$, 则(　C　)

A．$dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

B．曲面 $z=f(x,y)$ 在点(0,0,f (0,0)) 的法向量为｛3 , 1 , 1｝

C．曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点(0,0,f(0,0))的切向量为｛1 ,0 , 3｝

D．曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点(0,0,f(0,0))的切向量为｛3 , 0 , l｝

看成 xoz 坐标面的平面曲线 z=f(x,0)在 x=0 初的导数为 3，因而在该平面内存在切线。

三、解答题：

1．求曲线 $x=t-\sin t, y=1-\cos t, z=4\sin\frac{t}{2}$ 在点 $(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$ 处的切线和法平面方程.

解：切向量 $\vec{T}=(1-\cos t,\sin t,2\cos\frac{t}{2})|_{\frac{\pi}{2}}=(1,1,\sqrt{2})$

切线方程 $\dfrac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

法平面方程 $(x-\frac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0\Rightarrow x+y+\sqrt{2}z=4+\frac{\pi}{2}$

2．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(l,1,1)处的切线及法平面方程.

解：切向量 $\vec{T}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-3 & 2y & 2z \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}=(16,9,-1)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程 $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0\Rightarrow 16x+9y-z=24$

3．求椭圆球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解：法向量 $\vec{n}=(2x,4y,2z)//(1,-1,2)$，且 $x^2+2y^2+z^2=1$，即

$x=\frac{1}{2}t, y=-\frac{1}{4}t, z=t, x^2+2y^2+z^2=1\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{8}{11}}, x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, y=\mp\sqrt{\frac{1}{22}}, z=\pm\sqrt{\frac{8}{11}}$

切平面方程 $x-y+2z=\sqrt{\frac{11}{2}}$ 　或者　$x-y+2z=-\sqrt{\frac{11}{2}}$

4．设直线 L: $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 S 上，且平面 S 又与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点(1,–2,5)，求 a,b 的值.

解：曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(1,–2,5)的切平面为 $(2x,2y,-1)|_{(1,-2,5)}\cdot(x-1,y+2,z-5)=0$，即

$2x-4y-z-5=0$，为平面 S 的方程。又直线 L: $\begin{cases} x=t \\ y=-b-t \\ z=-ab-3+(1-a)t \end{cases}$ 在平面 S 上，有

$(2,-4,-1)\cdot(1,-1,1-a)=0\Rightarrow a=-5$，$2x-4y-z-5=0|_{(0,-b,-ab-3)}\Rightarrow b=-2$

5．证明：$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证明：曲面上点 M(x,y,z)处的切平面: $(\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}})\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$

各坐标轴上的截距之和 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a$

方向导数与梯度

一、填空题：

1．$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 A(1,0,1)处沿 A 指向 B(3,–2,2)方向的方向导数为___$\frac{1}{2}$_______

函数梯度 $(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}})|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}(1,0,1)$，

方向导数为$\frac{1}{2}(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})\cdot(1,0,1)=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$

2．函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 M(1,2, –2)处的梯度 **grad**$u|_M$ =__$\frac{2}{9}(1,2,-2)$______.

函数梯度 $2(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2})|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}(1,2,-2)$

二、选择题：

1．设曲线$\begin{cases}y=1-2x\\ z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x^2\end{cases}$ 在点(1, –1, –2)处的切线与直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\ 3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 的夹角为φ，则φ的值应为(B)

A. 0　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

$\vec{T}=(1,-2,-5),\vec{l}=(3,4,-1),\vec{T}\cdot\vec{l}=0,\varphi=\frac{\pi}{2}$

2．设函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点(x,y)的某邻域内可微分，则在点(x,y)处有 **grad**(uv)=(B　).

A. $\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v$　　B. $u\cdot\mathrm{grad}v+v\cdot\mathrm{grad}u$　　C. $u\cdot\mathrm{grad}v$ D　　D. $v\cdot\mathrm{grad}u$

三、计算题：

1．求函数$u=\ln(x+y)$ 在抛物线$y^2=4x$ 上点(1,2)处，沿着抛物线在该点处偏向 x 轴正方向的切线方向的方向导数.

解：抛物线$4x-y^2=0$ 上点(1,2)处，沿着抛物线在该点处偏向 x 轴正方向为

$$(-F_y,F_x)=(2y,4)|_{(1,2)}=4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$$

函数的方向导数：$gradu|_{(1,2)}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=(\frac{1}{x+y},\frac{1}{x+y})|_{(1,2)}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{3}$

2．求函数$u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 方向的方向导数.

解：函数的方向导数：

$$gradu|_{(1,1,2)}\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=(y^2-yz,2xy-xz,3z^2-xy)|_{(1,1,2)}\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})=5$$

3．设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathrm{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathrm{grad}f(1,1,1)$.

解：函数的方向导数：$gradf=(2x+y+3,4y+x-2,6z-6)$

$\mathrm{grad}f(0,0,0)=(3,-2,-6)$，$\mathrm{grad}f(1,1,1)=(6,3,0)$

4．设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量，求函数$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

解：　$\vec{n}=(4x,6y,2z)|_P=2(2,3,1)\Rightarrow \vec{n}^0=(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$，而

$\frac{\partial u}{\partial x}|_P=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$，　$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$　，　$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$

$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times 2+8\times 3-14\times 1\right)=\frac{11}{7}$

多元函数的极值及其求法

一、填空题：

1．函数 $f(x,y)=2x^2+ay^2+4xy^2+2y$ 在点$(-1,1)$处取得极值，则常数 a=**3**

2．函数 $z=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值为 $\frac{1}{4}$

3．函数 $z=x^2+4xy+9y^2-x-3y$ 的极小值为 $\frac{6}{25}$

二、设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$，则以下结论正确的是(D)

A．点(0,0)是 $f(x,y)$ 的驻点

B．点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的驻点，而是极值点

C．点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点，而是可微点

D．点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点，也不是驻点

三、在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使它到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短．

解：只需求 $S'=d^2=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2$ 或 $S=(2x+3y-6)^2$ 在条件 $x^2+4y^2=4$ 下的最小值，令

$F=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，对各变量求导并令其为 0，

$$\begin{cases}2(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\3(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+3y-6+\lambda x=0\\2x+3y-6+\frac{8}{3}\lambda y=0\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{8}{5}\\y=\pm\frac{3}{5}\end{cases}$$

，代入可知在点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 处距离最短(最小值为 $\frac{1}{\sqrt{13}}$)

四、求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体．

解　设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，(x,y,z)是它的各面平行于坐标面的内接长方体在第一卦限内的一个顶点，则此长方体的长,宽,高分别为 2x,2y,2z，其体积为 $V=8xyz$，令

$$F=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$$

分别求导并令为 0，得到

$$\begin{cases}8yz+2\lambda x=0\\8xz+2\lambda y=0\\8xy+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}\Rightarrow x=y=z=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

由题意知，这种长方体必有最大体积,所以当长,宽,高都为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ 时其体积最大．

五、在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围的四面体的体积最小，求切点的坐标．

解：**设切点** (x_0,y_0,z_0)**,则切平面方程为** $(x-x_0)(-\frac{2x_0}{a^2})+(y-y_0)(-\frac{2y_0}{b^2})+(z-z_0)(-\frac{2z_0}{c^2})=0$

即 $\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{a^2}(z-z_0)=0$**,则与三点坐标轴交点为:** $(\frac{a^2}{x_0},0,0)$;$(0,\frac{b^2}{y_0},0)$;$(0,0,\frac{c^2}{z_0})$

$\therefore U=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$,即为最小值

令$f=\frac{1}{6}\bullet\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}+\lambda(1-\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{b^2}-\frac{z_0}{c^2})$,设$f_{x_0}=f_{y_0}=f_{z_0}=f_\lambda=0$,则有

$$\begin{cases}\frac{1}{8}\frac{a^2b^2c^2}{y_0z_0}\bullet\frac{-1}{x_0^{\ 2}}-\frac{\lambda^2x_0}{a^2}=0\\ \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0z_0}\bullet\frac{-1}{y_0^{\ 2}}-\frac{2\lambda^2y_0}{b^2}=0\\ \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0}\bullet\frac{-1}{z_0^{\ 2}}-\frac{2\lambda^2z_0}{c^2}=0\\ \frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}=1\end{cases},$$

解得：$x_0=\frac{a}{\sqrt{3}},y_0=\frac{b}{\sqrt{3}},z_0=\frac{c}{\sqrt{3}},$

$\lambda=-\frac{3}{4}\sqrt{3}abc$

$\therefore$所求点为$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$,极值为$\sqrt{3}abc$

六、抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一个椭圆，求原点到椭圆的最长和最短距离.

解：只需求$S=x^2+y^2+z^2$在条件$z=x^2+y^2,x+y+z=1$下的最小值，令
$F=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-1)$，对各变量求导并令其为0，

$$\begin{cases}2x+2\lambda_1x+\lambda_2=0\\2y+2\lambda_1y+\lambda_2=0\\2z-\lambda_1+\lambda_2=0\\z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2\lambda_1x+\lambda_2=0\\2y+2\lambda_1y+\lambda_2=0\\2z-\lambda_1+\lambda_2=0\\z=x^2+y^2\\x+y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\\z=\frac{5}{4}\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}\text{代入}$$

$$S=2(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{5}{4}\mp\frac{\sqrt{6}}{2})^2=\frac{69}{16}\mp\frac{3\sqrt{6}}{4}$$

可知在点$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2})$处距离最短

最小值为$\sqrt{S}=\sqrt{2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2})^2}=\frac{\sqrt{69-12\sqrt{6}}}{4}$

可知在点$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{6}}{2})$处距离最长 ，最小值为$\sqrt{S}=\frac{\sqrt{69+12\sqrt{6}}}{4}$

七、设$z=z(x,y)$是由$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数，求$z=z(x,y)$的极值点和极值.

解：将方程两边分别对 x,y 求偏导

$$2x-6y-2yz_x-2zz_x=0\Rightarrow z_x=\frac{x-3y}{y+z}$$

$$-6x+20y-2z-2yz_y-2zz_y=0\Rightarrow z_y=-\frac{3x-10y+z}{y+z}$$

$$\begin{cases}x-3y=0\\3x-10y+z=0\\x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm9\\y=\pm3\\z=\pm3\end{cases}$$
驻点为(9,3,3)和(−9, −3, −3).

根据 $z_x=\frac{x-3y}{y+z}, z_y=-\frac{3x-10y+z}{y+z}$ 有

$$z_{xx}=\frac{(y+z)-(x-3y)z_x}{(y+z)^2}, z_{xy}=\frac{3(y+z)-(x-3y)(1+z_y)}{(y+z)^2}, z_{yy}=-\frac{-10(y+z)-(3x-10y+z)(1+z_y)}{(y+z)^2}$$

从而对驻点(9,3,3)，$A=\frac{1}{6}>0, B=\frac{1}{2}, C=\frac{5}{3}, B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，所以函数在(9,3,3)处有极小值；

对驻点(−9, −3, −3)，$A=-\frac{1}{6}<0, B=-\frac{1}{2}, C=-\frac{5}{3}, B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，所以函数在(−9, −3, −3)处有极大值.

二重积分的概念与性质

一、利用二重积分的几何意义，确定下列二重积分的值.

1．$\iint\limits_D (4-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le 4$；

解：可以看成一个圆柱减去圆锥得到，所以积分为 $4\cdot\pi\cdot 4-\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot 2=\frac{40}{3}\pi$.

2．$\iint\limits_D (\sqrt{a^2-x^2-y^2})d\sigma$，其中

解：可以看成一个球的 1/8，所以积分为 $\frac{1}{6}\pi a^3$.

二、比较二重积分的大小.

1．$I_1=\iint\limits_D \ln^3(x+y)d\sigma, I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma, I_3=\iint\limits_D \sin^3(x+y)d\sigma$，

其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, \frac{1}{2}\le (x+y)\le 1\}$.

解：在 D 内，$(x+y)^3\ge \sin^3(x+y)\ge \ln^3(x+y)\Leftarrow I_2\ge I_3\ge I_1$

2．$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是矩形闭区域：$3\le x\le 5, 0\le y\le 1$.

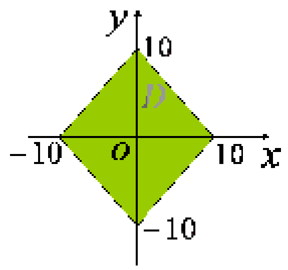
解：在 D 内，$x+y>e \Rightarrow \ln^2(x+y)\ge \ln(x+y)\Rightarrow \iint_D \ln^2(x+y)d\sigma \ge \iint_D \ln(x+y)d\sigma$

三、利用二重积分的性质估计积分的值：$I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$.

解：D 的面积为 $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$，

$\frac{1}{102}\le \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \frac{200}{102}\le I\le \frac{200}{100}\Rightarrow 1.96\le I\le 2$



四、设 $f(x,y)$ 为连续函数，求 $I=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)d\sigma$.

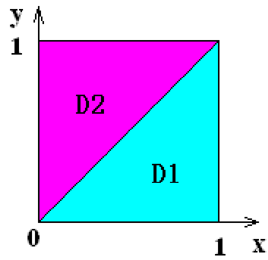
解：根据积分中值定理，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\,\sigma$，根据函数的连续性，所以

$$I=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)d\sigma=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi,\eta)\cdot\pi\rho^2=f(0,0).$$

二重积分的计算(1)

一、计算下列二重积分:

1. $\iint\limits_D (x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



解：

$$\iint\limits_D (x+y)\operatorname{sgn}(x-y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)(x-y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)(x-y)dxdy$$

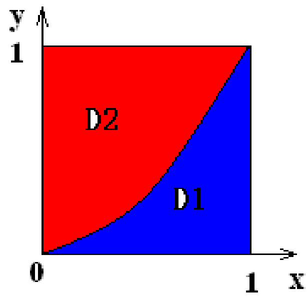
$$=\iint\limits_{D_1}(x^2-y^2)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x^2-y^2)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x(x^2-y^2)dy-\int_0^1dx\int_x^1(x^2-y^2)dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1x^3dx+\int_0^1(\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3})dx=\frac{1}{3}$$

2. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,\text{由}y=x^2, y=4x^2, y=1\text{所围}\}$.

解：$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^{4x^2}(x+y)dy=\int_{-1}^1(3x^3+\frac{15}{2}x^4)dx=15\int_0^1x^4dx=3$

3. $\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.



解：$\iint\limits_D |y-x^2|dxdy=\iint\limits_{D_2}(y-x^2)dxdy-\iint\limits_{D_1}(y-x^2)dxdy$

$$=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)dy-\int_0^1dx\int_0^{x^2}(y-x^2)dy$$

$$=\int_0^1(x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2})dx+\frac{1}{2}\int_0^1x^4dx=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

4. $\iint\limits_D e^{-\frac{1}{2}y^2}dxdy$，其中 D是由x=1, $y=0, y=\sqrt{x}$所围成的面积.

解：$\iint\limits_D e^{-\frac{1}{2}y^2}dxdy=\int_0^1e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\int_{y^2}^1dx=\int_0^1(1-y^2)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=\ldots\ldots$

二、更换下列积分次序.

1. I=$\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy=$ $\int_0^1dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)dy$

2. I=$\int_0^1dx\int_x^{x^2}f(x,y)dy+\int_2^8dx\int_x^8f(x,y)dy=$____________________

3. $a>0, I=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy=$

$$\int_0^ady\int_{\frac{1}{2a}y^2}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dy+\int_0^ady\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}y^2}^{2a}f(x,y)dy+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{1}{2a}y^2}^{8}f(x,y)dy$$

4. $I=\int_0^4dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}}f(x,y)dx=$ $\int_{-2}^0dx\int_0^{4-x^2}f(x,y)dy+\int_0^2dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$

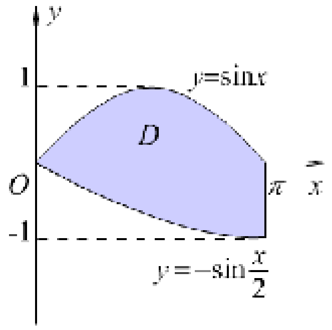
5. $I=\int_0^{\pi}dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)dy=$ $\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{-1}^0dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

解　由根据积分限可得积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,-\sin\frac{x}{2}\le y\le\sin x\}$，如图.

因为积分区域还可以表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 0,-2\arcsin y\le x\le\pi\}\cup\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\arcsin y\le x\le\pi-\arcsin y\},$$

所以　$\int_0^{\pi}dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x}f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx+\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.



三、设 $f(x,y)$在$[a,b]$上连续，证明：$[\int_a^b f(x)dx]^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$

证明：令 $F(t)=(t-a)\int_a^t f^2(x)dx-[\int_a^t f(x)dx]^2, F(a)=0,$

$$F'(t)=\int_a^t f^2(x)dx+(t-a)f^2(t)-2f(t)\int_a^t f(x)dx$$

$$=\int_a^t f^2(x)dx-2\int_a^t f(t)f(x)dx+\int_a^t f^2(t)dx=\int_a^t[f(t)-f(t)]^2dx\ge 0$$

所以函数 F(t)为单调不减函数，故结论成立。

二重积分的计算(2)

一、化下列二次积分为极坐标形式的二次积分.

1. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=$____

____$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$_

2. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=$______ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$ ______

二、利用极坐标计算下列二重积分.

1. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

解：$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin rdr=2\pi(-r\cos r+\sin r)|_\pi^{2\pi}=-6\pi^2$

2. $I=\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x+y\ge 1\}$.

解：$I=\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta-1)d\theta=2-\frac{\pi}{2}$

3. $I=\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

解：

$$I=\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2-2xy}+2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r(r\sqrt{1-\sin 2\theta}+2)dr=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta-\sin\theta|d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta+\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$$

三、求由平面 $z=x-y,z=0$ 与柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围成的立体的体积(a>0).

解：设 D 为 xoy 坐标面的圆面 $x^2+y^2=ax$，则

$$V=\iint\limits_D|x-y|dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta-\sin\theta|d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta-\sin\theta|\cos^3\theta d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\cos^3\theta d\theta+\frac{a^3}{3}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)\cos^3\theta d\theta=\frac{15\pi-6}{48}a^3$$

四、设闭区域 $D:x^2+y^2\le y,x\ge 0,f(x,y)$ 为 D 上连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)dudv$，求 $f(x,y)$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dudv - \frac{\pi}{8}\cdot\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)dudv$$

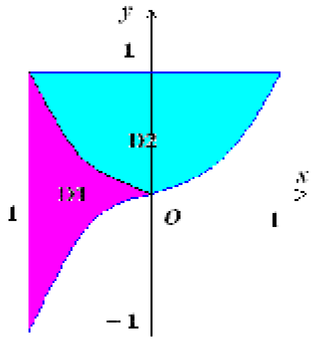
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

解： $$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta} r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{6}(\theta - \sin\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi-4}{36}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{6\pi-8}{9\pi}$$

五、求 $I = \iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围成的，f 是连续函数.



解：因为被积函数在关于 y 轴对称的区域 D2 上是奇函数，

从而 $\iint_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy = 0$

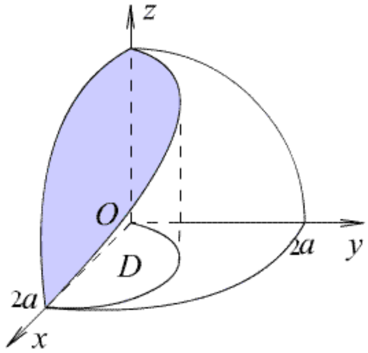
在关于 x 轴对称的区域 D1 上，$\iint_{D_1} xyf(x^2+y^2)dxdy$，

$$\iint_{D_1} xdxdy = \int_{-1}^{0} xdx\int_{x^3}^{-x^3} dy = 2\int_0^1 x^4dx = \frac{2}{5}$$

$$I = \iint_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy + \iint_{D_1} xdxdy + \iint_{D_1} xyf(x^2+y^2)dxdy = \frac{2}{5}$$

二重积分的应用

一、求由球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所围的且在柱面内部部分的体积.



解：位于柱面内的部分球有四块，其体积相等，由曲面方程 $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 得

$$V=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 2ax\\ y>0}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}\,dr$$

$$=\frac{128}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{128}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})=\frac{64}{9}a^3(3\pi-4)$$

二、求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积.

解：$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(r-r^3)dr=\frac{4\pi}{15}$

三、求球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 被平面 $z=3$ 所分成的上半部分曲面的面积.

解：设 D 为平面区域 $x^2+y^2\le 16$，由曲面方程 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 得

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$，于是

$$A=\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=5\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4\frac{rdr}{\sqrt{25-r^2}}=20\pi$$

四、求由半球面 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=4z$ 所围立体的表面积.

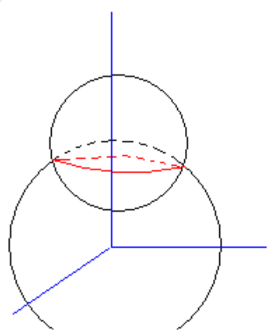
解：所围立体在 xoy 坐标面的投影区域 D 为 $x^2+y^2\le 8$，由曲面方程 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 得

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{12-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{12-x^2-y^2}}$，于是

$A_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 8}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=\sqrt{12}\iint\limits_{x^2+y^2\le 8}\frac{dxdy}{\sqrt{12-x^2-y^2}}=\sqrt{12}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{rdr}{\sqrt{12-r^2}}=8(3-\sqrt{3})\pi$ 由曲面方程 $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ 得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2}$，于是

$A_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le 8}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 8}\sqrt{x^2+y^2+4}\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r\sqrt{r^2+4}\,dr=\frac{8}{3}(3\sqrt{3}-1)\pi$ 所求表面积为 $A=A_1+A_2=8(3-\sqrt{3})\pi+\frac{8}{3}(3\sqrt{3}-1)\pi=\frac{64}{3}\pi$

五、设有一半径为 R 的空球，另有一半径为 r 的变球与空球相割，如果变球的球心在空球的表面上，问 r 等于多少时，含在空球内变球的表面积最大？并求出最大表面积的值.



解：变球与空球相交线为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2+(z-R)^2=r^2\end{cases}$，它在 xoy 面投影为：

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}=R-\sqrt{r^2-x^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=r^2-\dfrac{r^4}{4R^2}$

由曲面方程 $z=R-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ 得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$，于是

$$A=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=r\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=r\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4R^2}}}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}=2\pi(r^2-\frac{r^3}{2R})$$

$$A'(r)=2\pi(2r-\frac{3r^2}{2R})=0\Rightarrow r=\frac{4R}{3},A=2\pi(\frac{16R^2}{9}-\frac{1}{2R}\frac{64R^3}{27})=\frac{32}{27}\pi R^2$$

六、求坐标轴与 $2x+y=6$ 所围成三角形均匀薄片的重心.

解：重心的横坐标为：$\dfrac{\iint_D x\rho dxdy}{\iint_D \rho dxdy}=\dfrac{1}{9}\int_0^3 xdx\int_0^{6-2x}dy=\dfrac{2}{9}\int_0^3(3x-x^2)dx=1$

重心的纵坐标为：$\dfrac{\iint_D y\rho dxdy}{\iint_D \rho dxdy}=\dfrac{1}{9}\int_0^3 dx\int_0^{6-2x}ydy=\dfrac{2}{9}\int_0^3(3-x)^2dx=2$，所以重心为(1,2).

七、由螺线 $r=\theta$ 与直线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 围成一平面薄片 D，面密度 $\rho(r,\theta)=r^2$，求它的质量.

解：质量为：$\iint_D\rho d\sigma=\iint_D\rho rdrd\theta=\iint_D r^3drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\theta}r^3dr=\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4d\theta=\dfrac{\pi^5}{640}$

八、求均匀椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 关于直线 $y=mx$ 的转动惯量，并求使转动惯量最小的 m 值.

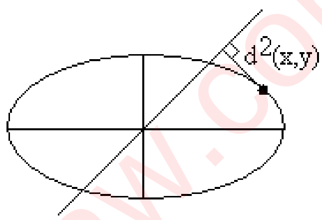
转动惯量等于转动质量与其至转动中心距离的平方的积；刚体的转动惯量是由质量、质量分布、转轴位置三个因素决定的。

如果你知道什么是惯性，就能理解什么是转动惯量。

惯性：保持原来匀速直线运动状态或者静止状态的性质，惯性（质量）越大越难改变（容易保持）

转动惯量：保持原来匀速圆周运动状态或者静止状态的能力。举个例子：呼啦圈转动时不难停下，但大型机床上的带动轮转起来后你能轻易使它停下吗？

转动惯量的单位为千克米 2,符号为 kg.m^2。



解:在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 上任取一点 P(x,y),P 点关于直线 $y=mx$ 的转动惯量：

$$G=\iint_D\mu d^2dxdy=\mu\iint_D\frac{(y-mx)^2}{1+m^2}dxdy=\frac{\mu}{1+m^2}\iint_D(y-mx)^2dxdy=\frac{\mu ab}{1+m^2}\int_0^{2\pi}(b\sin\theta-am\cos\theta)^2d\theta\int_0^1r^3dr$$

$$=\frac{\mu ab}{4(1+m^2)}\int_0^{2\pi}(b^2\sin^2\theta-abm\sin2\theta+a^2m^2\cos^2\theta)d\theta=\frac{\mu ab\pi}{4}\frac{b^2+a^2m^2}{1+m^2}=\frac{\mu ab\pi}{4}(a^2-\frac{a^2-b^2}{1+m^2})$$

当　m=0

时，G 最小为$\dfrac{\mu ab^3\pi}{4}$。

九、求面密度为常数ρ的均质半圆环薄片：$\sqrt{R_1^{\,2}-y^2}\le x\le\sqrt{R_2^{\,2}-y^2}, z=0$ 对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$处单位质量的质点的引力F.

解　由积分区域关于x轴对称性，有$F_y=0$。设引力常数为 G，则

$$dF_x=G\frac{1\cdot\rho x d\sigma}{[(x-0)^2+(y-0)^2+(0-a)^2]^{3/2}}$$

所以　$F_x=G\rho\iint\limits_D\dfrac{xdxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=G\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{r^2dr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$

$$=2G\rho[\ln\frac{\sqrt{a^2+R_2^2}+R_2}{\sqrt{a^2+R_1^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{a^2+r_2^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{a^2+\sqrt{_1^2}}}]$$

同理　$F_x=-\iint\limits_D\dfrac{G\rho a d\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=-Ga\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{rdr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$

$=\pi aG\rho(\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{a^2+R_2^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+R_1^2}}})$，故所求引力$F\{F_x$，0，$F_x\}$。

三重积分的概念及其计算

一、设Ω_1为：$x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0;\Omega_2$为：$x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$，则(C)

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} xdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xdxdydz$　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} ydxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydxdydz$

C. $\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdxdydz$　　D. $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdxdydz = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdxdydz$

二、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz$, 其中$\Omega$是由$z=0, y+z=1$及$y=x^2$所围成的立体

解　由题设知，Ω在 xOy 面上的投影区域为$D_{xy}: -1\le x\le 1, 0\le y\le 1$

所以　　原式$=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}ydy\int_0^{1-y}dz=\dfrac{8}{35}$

三、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$, 其中$\Omega$是由$y=\sqrt{x}, z=0, y=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围成的立体.

解　由题设知，Ω在 xOy 面上的投影区域为$D_{xy}: 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le \sqrt{x}$

所以　　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+z)dz=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$

四、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$, 其中$\Omega$是由$z=xy, x+y=1$及$z=0$所围成的立体.

解　由Ω在 xOy 面的投影域为$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$，可知，

原式$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}ydy\int_0^{xy}dz=\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=\dfrac{1}{180}$

五、计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{xz}{(1+y)^2}dxdydz$, 其中$\Omega$是由$x=0, z=0, z=1-y^2$及$x=\sqrt{y}$所围成的立体.

解　由Ω在 xOy 面的投影域为$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2$，可知，

原式$=\int_0^1 xdx\int_0^{x^2}\dfrac{1}{(1+y)^2}dy\int_0^{1-y^2}zdz=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{x^2}(1-y)^2dy$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{x^2}(1-y)^2dy=\dfrac{1}{6}\int_0^1(3x^3-3x^5+x^7)dx=\dfrac{1}{16}$

六、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dxdydz$, 其中$\Omega$是由$x^2+y^2+z^2\le 1$所围成的立体.

解　由Ω在 xOy 面的投影域为$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$，可知，

原式$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}e^z dz=4\pi\int_0^1(re^{\sqrt{1-r^2}}-re)dr=4\pi$

七、计算$I=\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz$, 其中$\Omega$是由$z=xy, x+y+z=1$及$z=0$所围成的立体.

解　由Ω在 xOy 面的投影域为$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$，可知，

原式$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_{xy}^{1-x-y}dz=\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=\dfrac{1}{40}$

利用柱面、球面坐标计算三重积分

一、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dxdydz$, 其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体.

解：Ω 为 $\sqrt{x^2+y^2}=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1; x^2+y^2\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$，在柱面坐标系下，$\Omega$ 为 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, r^2\le z\le r$，所以原式

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cdot\frac{\ln(1+r)}{r^2}dr\int_{r^2}^{r}dz=2\pi\int_0^1(1-r)\ln(1+r)dr$$

$$=\pi[(3+2r-r^2)\ln(1+r)+\frac{1}{2}(1+r)^2-4r]|_0^1=(4\ln 2-\frac{5}{2})\pi$$

二、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz$, 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=12-x^2-y^2$ 所围成的立体.

解：Ω为 $\sqrt{x^2+y^2}=12-x^2-y^2\Rightarrow x^2+y^2=3^2; \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 12-x^2-y^2$，在柱面坐标系下，$\Omega$ 为 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 3, r\le z\le 12-r^2$，所以原式 $=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^3 r^2dr\int_r^{12-r^2}zdz=0$

三、设Ω为曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成曲面与平面 z=4 所围成的区域，求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z\right)dv$。

解：旋转曲面为 $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$　故Ω为 $x^2+y^2\le 8, \dfrac{x^2+y^2}{2}\le z\le 4$，在柱面坐标系下，$\Omega$为 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2\sqrt{2}, \dfrac{r^2}{2}\le z\le 4$，所以原式

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)dz=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}[2r+4r^3-\frac{5}{8}r^5]dr=\frac{112\pi}{3}$$

四、$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dxdydz$，其中$\Omega$是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的所围立体.

解　由方程 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=\sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$ 得两曲面的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}(z=\frac{\sqrt{2}}{2})$

从而Ω在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+y^2\le\frac{1}{2}$　(z=0)

在柱面坐标系下，Ω为 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}, r\le z\le\sqrt{1-r^2}$，所以　原式

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}rdr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}(r\cos\theta+z)dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[(r^2\sqrt{1-r^2}-r^3)\cos\theta+(\frac{1}{2}r-r^3)]dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(r^2\sqrt{1-r^2}-r^3)dr+2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}r-r^3)dr=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{1}{2}r-r^3)dr=\frac{\pi}{8}$$

五、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 及

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$ 所围成的所围立体.

解：在球面坐标系下，$\sqrt{3(x^2+y^2)}=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=(\frac{R}{2})^2$，

$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{6},0\le r\le R$

$I=\iiint\limits_{\Omega}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}r^2\sin r^3dz=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{3})(1-\cos R^3)$

六、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2})dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z^2=x^2+y^2$，$z^2=3(x^2+y^2)$ 及 $z=1$ 所围成的所围立体.

解：在球面坐标系下，$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi}$

$I=\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2})dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}(r+\frac{1}{r^2})r^2dr$

$=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos\varphi}+\frac{1}{4\cos^4\varphi})\sin\varphi d\varphi=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos\varphi}+\frac{1}{4\cos^4\varphi})\sin\varphi d\varphi$

$=2\pi[\frac{1}{12\cos^3\varphi}-\ln|\cos\varphi|]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{27}+\ln\frac{3}{2})\pi$

七、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 所围成的所围立体.

解：在球面坐标系下，$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\varphi$

$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3dr=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{5}\pi$

八、将 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$ 表示成柱面坐标系和球面坐标系的累次积分，其中 Ω 是由 $2z=x^2+y^2,z=2,z=1$ 所围成的所围立体.

解：在柱面坐标系下，$\Omega_1:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 2,\frac{r^2}{2}\le z\le 2;\Omega_2:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\sqrt{2},\frac{r^2}{2}\le z\le 1;$

$I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)dxdydz-\iiint\limits_{\Omega_2}f(x,y,z)dxdydz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}fdz-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}fdz$

在球面坐标系下，

$$\Omega_1:0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le\frac{2}{\cos\varphi};\Omega_2:0\le\theta\le2\pi,\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le2\cos\varphi;$$

$$\Omega_1':0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\arctan2,0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi};\Omega_2':0\le\theta\le2\pi,\arctan2\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le r\le2\cos\varphi.$$

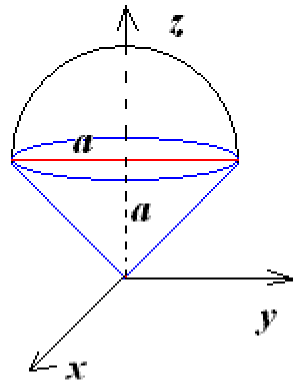
$$I=\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)dxdydz+\iiint_{\Omega_2}f(x,y,z)dxdydz-\iiint_{\Omega_1'}f(x,y,z)dxdydz-\iiint_{\Omega_2'}f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}}r^2fdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2fdr$$

$$-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\arctan2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^2fdr-\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\arctan2}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2fdr.$$

三重积分的应用

一、一物体由圆锥和与圆锥共底的半球拼成，圆锥的高等于球的半径 a，物体上任一点处的密度等于该点到圆锥顶点的平方，求此物体的质量.



解：在球面坐标系下，$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le 2a\cos\varphi$

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^4dr$$

$$=\frac{64}{5}a^5\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{28}{15}a^5\pi$$

二、设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比（比例常数 $R>0$），求球体的重心位置.

解：设球体方程为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$P_0$ 的坐标为(0,0,R)，密度函数为 $\rho=R[x^2+y^2+(z-R)^2]$，球体的质量为：

$$I=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega R[x^2+y^2+(z-R)^2]dxdydz$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R(r^4-2Rr^3\cos\varphi+R^2r^2)dr=2\pi R^6\int_0^{\pi}(\frac{8}{15}\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi=\frac{32}{15}\pi R^6$$

利用函数关于 x 轴和 y 轴的奇偶性有

$$I_x=\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega Rx[x^2+y^2+(z-R)^2]dxdydz=0$$

$$I_y=\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega Ry[x^2+y^2+(z-R)^2]dxdydz=0$$

$$I_z=\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz=R\iiint_\Omega z[x^2+y^2+(z-R)^2]dxdydz$$

$$=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^R(r^5-2Rr^4\cos\varphi+R^2r^3)dr$$

$$=2\pi R^7\int_0^{\pi}(\frac{7}{12}\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{5}\sin\varphi\cos^2\varphi)d\varphi=-\frac{4}{3}\pi R^7\Rightarrow I_z/I=-\frac{5}{8}R$$

所以重心坐标为：$(0,0,-\frac{5}{8}R)$

三、设球在动点 P(x,y,z)处的密度与该点到球心距离成正比，求质量为 m 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对于其直径的转动惯量.

解：设球体方程为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，,密度函数为 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，球体的质量为：

$$m=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz=k\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=k\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^3dr=k\pi R^4$$

所以，密度函数为 $\rho=\frac{m}{\pi R^4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

计算该球体绕 z 轴转动的转动惯量：

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz=\frac{m}{\pi R^4}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$=\frac{m}{\pi R^4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^R r^5dr=\frac{2}{3}mR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{4}{9}mR^2$$

四、一匀质圆柱筒以柱面 $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=b^2(a<b)$ 和平面 $z=0, z=h(h>0)$ 为界面，在原点处有一质量为 m 的质点，求圆柱筒对原点的引力.

解：由对称性知引力 $\vec{F}=(0,0,F_z)$，设密度为 k，使用柱面坐标计算

$$F_z=Gk\iiint_\Omega\frac{z}{r^3}\mathrm{d}v=Gk\iiint_\Omega\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz=Gk\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b rdr\int_0^h\frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$

$$=2\pi Gk\int_a^b(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}})dr=2\pi Gk[(b-a)-(\sqrt{b^2+h^2}-\sqrt{a^2+h^2})]$$

五、证明 $\int_0^x\int_0^v\int_0^u f(t)dtdudv=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$.

证明

$$\int_0^x\int_0^v\int_0^u f(t)dtdudv=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x\int_0^u f(t)dtdu=\int_0^x(x-t)f(t)dt\Leftrightarrow\int_0^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt$$

思路：从改变积分次序入手. $\because\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\int_0^v dt\int_t^v f(t)du=\int_0^v(v-t)f(t)dt,$

$$\therefore\int_0^x[\int_0^v(\int_0^u f(t)dt)du]dv=\int_0^x dv\int_0^v(v-t)f(t)dt=\int_0^x dt\int_t^x(v-t)f(t)dv=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt.$$

六、设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，试证: $\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)dxdydz=\frac{1}{6}[\int_0^1 f(x)dx]^3$.

证明：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$

$$\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)dxdydz=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy\int_x^y f(z)dz$$

$$=\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)[F(y)-F(x)]dy=\int_0^1 f(x)[\frac{1}{2}F^2(y)-F(x)F(y)]|_x^1 dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}[F(1)-F(x)]^2dx=\frac{1}{2}\int_0^1[F(1)-F(x)]^2dF(x)$$

$$=-\frac{1}{3!}[F(1)-F(x)]^3|_0^1=\frac{1}{3!}F^3(1)]=\frac{1}{6}[\int_0^1 f(x)dx]^3$$

对弧长的曲线积分

一、求曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 以 t = 0 到任意点间那段弧的质量，设它各点的密度与该点到原点的距离平方成反比，且在点(1,0,1)处的密度为 1.

解：设密度函数 $\rho=\dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$，利用在点(1,0,1)处的密度为 1 得到 $\rho=\dfrac{2}{x^2+y^2+z^2}$.

所求质量等于：$\displaystyle\int_L\frac{2}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^{t_0}\frac{1}{e^{2t}}\sqrt{3}e^tdt=\sqrt{3}\int_0^{t_0}e^{-t}dt=\sqrt{3}(1-e^{t_0})$

二、计算下列曲线积分：

1. $\displaystyle\int_L\sqrt{2y}ds, L: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\quad(0\le t\le 2\pi)$

解：$\displaystyle\int_L\sqrt{2y}ds=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=2a\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=4a\pi$

2. $\displaystyle\int_L(x+y)ds, L:$ 顶点为$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 的三角形边界；

解：
$$\int_L(x+y)ds=\int_{OA}(x+y)ds+\int_{BA}(x+y)ds+\int_{OB}(x+y)ds$$
$$=\int_0^1(x+0)dx+\int_0^1(x+1-x)dx+\int_0^1(y+0)dy=2$$

3. $\displaystyle\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds, L:$由曲线$r=a, \theta=0, \theta=\dfrac{\pi}{4}$所围成的区域的边界；

解：$\displaystyle\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{a^2}d\theta=\frac{\pi}{4}ae^a$

4. $\displaystyle\int_L(x+y+z)ds, L:$ 直线AB$:A(1,1,0), B(1,0,0)$ 及螺线 $\overline{BC}: x=\cos t, y=\sin t, z=t(0\le t\le 2\pi)$ 组成.

解：
$$\int_L(x+y+z)ds=\int_{AB}(x+y+z)ds+\int_{\widehat{BC}}(x+y+z)ds$$
$$=\int_0^1(1+y)dy+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)dt=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi$$

三、计算 I=$\displaystyle\int_L\cos\sqrt{x^2+y^2}ds$, 其中$L$是由曲线$x=y, y=\sqrt{R^2-x^2}, y=0$所围成的第一象限部分的边界.

解：$\displaystyle I=\int_L\cos\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^1\cos xdx+\int_0^{\frac{\sqrt{2}R}{2}}\cos(\sqrt{2}x)dx+R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos rdr=\sin 1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin R+R)$

四、求 I=$\displaystyle\int_L\sqrt{2y^2+z^2}ds$, 其中$L$满足$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x-y=0\end{cases}$.

解：曲线L的参数方程为:$\begin{cases}x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\varphi\\ z=a\cos\varphi\end{cases}, 0\le\varphi\le\pi.$

$\displaystyle I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}ds=a^2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}d\varphi=\pi a^2$

五、求$\displaystyle\oint_L xds$, 其中L是由直线$x=0, y=x$及曲线$2-y=x^2$所围成的第一象限部分的闭路.

解：$\oint_L xds = \sqrt{2}\int_0^1 xdx + \int_0^2 0dy + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx = \dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1}{12}$

对坐标的曲线积分

一、设一质点处于弹性力场中，弹力方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比，比例系数为 k，若质点沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 从点(a,0)移到点(0,b)(第一象限内)，求弹力所做的功.

解：$I=k\int_L |r|\bullet r^0\cdot(dx,dy)=k\int_L xdx+ydy=k(b^2-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}k(b^2-a^2)$

二、求曲线积分 $I=\int_L(x^2+2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，$L$ 是一段抛物线 $y=x^2(-1\le x\le 1)$ 沿 x 增加方向.

解：$I=\int_L(x^2+2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^1(2x^5-4x^4+2x^3+x^2)dx=-\frac{14}{15}$

三、计算 $I=\int_L y\sqrt{x}dx+xe^{y^2}dy$，其中 L 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 上从点 O(0,0)到点(1,1)的一段弧.

解：$I=\int_L y\sqrt{x}dx+xe^{y^2}dy=\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}+xe^{x^2})dx=\frac{5e-1}{10}$

四、求 $I=\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，$L$ 是曲线 $y=1-|1-x|$ 点 O(0,0)到点(2,0)部分.

解：$I=\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=2\int_0^1x^2dx+2\int_1^2x^2dx=2\int_0^2x^2dx=\frac{16}{3}$

五、求 $I=\int_{\widehat{ABC}}xdy-ydx$，其中 $A(-1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $\widehat{AB}$ 为 $x^2+y^2=1$ 的上半圆弧段，$\widehat{BC}$ 为 $y=1-x^2$ 上的弧段.

解：$I=\int_{\widehat{ABC}}xdy-ydx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\int_0^1(1+x^2)dx=-\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$

六、求 $\oint_L xdy$，其中 L 是由直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 和坐标轴构成的三角形闭路，沿逆时针方向.

解：$\oint_L xdy=\int_{(0,0)}^{(2,0)}xdy+\int_{(2,0)}^{(0,3)}xdy+\int_{(0,3)}^{(0,0)}xdy=\int_{(2,0)}^{(0,3)}xdy=\int_0^3(2-\frac{2}{3}y)dy=3$

七、求 $I=\int_L(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$，其中 L 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上由 t_1=0 到 t_2=1 的一段弧.

解：$I=\int_L(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz=\int_0^1(3t^6-2t^4)dt=\frac{1}{35}$

八、已知平面力场 $\vec{F}=\{y,x\}$，问将单位质量的质点 M 从坐标原点沿直线移到曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限的部分上，终点为何点时，$\vec{F}$ 做功最大？

解：$I=\int_L (y,x)\cdot(dx,dy)=\int_L ydx+xdy=\int_0^1 (br\sin\theta a\cos\theta+ar\cos\theta b\sin\theta)dr=\frac{1}{2}ab\sin 2\theta$ 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\vec{F}$ 做功最大，为 $\frac{1}{2}ab$.

格林公式及其应用

一、利用曲线积分计算由旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围区域的面积.

解：$$S=\frac{1}{2}\oint_L (xdy-ydx)=\int_0^0 xd(0)-0dx+\int_{2\pi}^0 a(t-\sin t)\bullet a\sin tdt$$
$$=-a^2\int_0^{2\pi}(t\sin t-\sin^2 t)dt=-a^2(-t\cos t+\sin t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t)\big|_0^{2\pi}=\pi$$

二、利用格林公式计算下列曲线积分：

1. $\oint_L (x+y)^2dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 是顶点为点 $A(1,1),B(3,3),C(3,5)$的三角形的边界，沿逆时针方向；

解：$\oint_L (x+y)^2dx+(x^2-y^2)dy=-2\iint\limits_D ydxdy=-2\int_1^3 dx\int_x^{2x-1} ydy=-12$

2. $\oint_L xy^2dx-x^2ydy$，其中 L 是 $x^2+y^2=R^2$ 沿逆时针方向；

解：$\oint_L xy^2dx-x^2ydy=-4\iint\limits_D xydxdy=-4\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^R r^3dr=0$

3. $\int_L (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy$，其中 L 是从点 $A(0,-1)$沿直线 $y=1-x$ 到点 $M(1,0)$，再从点 M 沿圆周 $x^2+y^2=1$ 依逆时针到点 $B(0,1)$;

解：$\int_L (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy=\iint\limits_D 0dxdy+\int_{-1}^1 y^2dy=\frac{2}{3}$

4. $\int_L [f(y)e^x-my]dx+[f'(y)e^x-m]dy$，其中 $f(y)$有连续的一阶导数，L 是连接点 $A(0, y_1)$, $B(0, y_2)$的任何路径，且 L 与直线 AB 所围成区域的面积为定值 S，L 总是位于直线段 AB 的左方.

解：$$\int_L [f(y)e^x-my]dx+[f'(y)e^x-m]dy$$
$$=\iint\limits_D mdxdy+\int_{y_1}^{y_2}[f'(y)-m]dy=mS+f(y_2)-f(y_1)-m(y_2-y_1)$$

三、求 $\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，其中 L 为曲线$|x|+|y|=1$ 沿逆时针方向.

解：计算可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，使用包含于曲线内部的圆 C：$x^2+y^2=R^2$，

$$\oint_L \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta=2\pi$$

四、设曲线积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0)=0$，求 $\varphi(x)$，并求积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值.

解：根据曲线积分与路径无关，有 $\varphi'(x)=2x\Rightarrow\varphi(x)=x^2$，

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+yx^2dy=2\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}$$

五、求$\int_L (y+2xy)dx+(x^2+2xy+y^2)dy$,其中 L 是 $x^2+y^2=2x$ 的上半圆周由点 $A(4,0)$到点 $B(0,0)$的弧段.

解:
$$\int_L (y+2xy)dx+(x^2+2xy+y^2)dy=\iint_D (2y-1)dxdy-\int_{BA}(y+2xy)dx+(x^2+2xy+y^2)dy$$
$$=2\iint_D ydxdy-2\pi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{4}{3}$$

六、求$\oint_L |y|dx+|x|dy$，其中 L 是以点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$为顶点的三角形的正向边界曲线.

解：$\oint_L |y|dx+|x|dy=\oint_{ABO} ydx+xdy+\oint_{OBC} ydx-xdy=-2\iint_{\Delta OBC} dxdy=-1$

七、证明：$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y-4y^3)dy$ 在 xOy 面上是某一函数 $u(x, y)$的全微分，并求出一个 $u(x, y)$.

解：计算可得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由于 $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y-4y^3)dy=d(x^3+3x^2y^2-y^4)$,

所以 $u(x, y)=x^3+3x^2y^2-y^4$

八、计算抛物线$(x+y)^2=ax$ ($a>0$)与 x 轴所围成的面积.

解：抛物线$(x+y)^2=ax$ 的参数方程为 $x=t^2, y=\sqrt{a}t-t^2, (\sqrt{a}>t>0)$,

$$S=\oint_L xdy=-\int_0^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}t^2-2t^3)dt=\frac{1}{6}a^2$$

九、设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有连续导数，求$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$,其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$到点 $B(1,2)$的直线段.

解：由于$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,

$$\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy=\int_3^1[\frac{3}{2}+\frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)]dx+\int_{\frac{2}{3}}^2[f(y)-\frac{1}{y^2}]dy$$
$$=-3-\int_1^3\frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)dx+\int_{\frac{2}{3}}^2[f(y)]dy-\frac{1}{6}=-\frac{19}{6}+\int_{\frac{2}{3}}^2[f(y)]dy-\int_{\frac{2}{3}}^2[f(t)]dt=-\frac{19}{6}$$

对面积的曲面积分

一、计算下列曲面积分：

（1）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds, \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$；

解：取球面坐标，$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$，$x^2+y^2=R^2\sin\varphi$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds=R^4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\pi^2R^4$$

（2）$\iint\limits_{\Sigma}xyzds, \Sigma: x+y+z=1$在第一卦限部分；

解：
$$\iint\limits_{\Sigma}xyzds=\iint_{D_{xy}}xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\int_0^1xdx\int_0^x y(1-x-y)dy$$
$$=\sqrt{3}\int_0^1(\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{6}x^4)dx=-\frac{\sqrt{3}}{24}$$

（3）$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds, \Sigma:$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z=1$所转成立体的表面；

解：$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+yz+zx)ds, \Sigma:$锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截下的那块曲面；

解：
$$\iint\limits_{\Sigma}(xy^2+yz+zx)ds=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le2ax}(xy^2+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$
$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3(r\cos\theta\sin^2\theta+\sin\theta+\cos\theta)dr$$
$$=\frac{32}{5}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^5\cos^6\theta\sin^2\theta+\frac{16}{4}a^4(\sin\theta+\cos\theta)\cos^4\theta]d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\sqrt{2}[a^5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^2\theta d\theta+\frac{16}{4}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta d\theta+\frac{16}{4}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta]$$

$$=\frac{32}{5}\sqrt{2}[2a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta-2a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta d\theta+8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta]$$

$$=\frac{32}{5}\sqrt{2}[2a^5\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}-2a^5\frac{7}{8}\bullet\frac{5}{6}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\pi}{2}+8a^4\frac{4}{5}\bullet\frac{2}{3}]$$

$$=\frac{32}{5}\sqrt{2}a^4[\frac{15\pi}{48}a-\frac{35\pi}{128}a+\frac{64}{15}]$$

（5）$\iint\limits_{\Sigma} 3zds, \Sigma:$抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xoy 面上方的部分；

解：
$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} 3zds &= \iint_{x^2+y^2\le 2}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}dr^2 \\ &= \pi\int_0^2 (2-t)\sqrt{1+4t}dt \xrightarrow[\frac{u^2-1}{4}=t]{u=\sqrt{1+4t}} \frac{\pi}{8}\int_1^3(9u^2-u^4)du = \frac{37}{10}\pi\end{aligned}$$

（6）$\iint\limits_{\Sigma} xyds, \Sigma:$曲面 $z=x^2+y^2 (0\le z\le 1)$ 在第一卦限部分；

解：

$$\iint\limits_{\Sigma} xyds = \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0, y\ge 0}} xy\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{1}{4}\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr^2$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 t\sqrt{1+4t}dt \xrightarrow[\frac{u^2-1}{4}=t]{u=\sqrt{1+4t}} \frac{\pi}{64}\int_1^{\sqrt{5}}(u^4-u^2)du = \frac{\pi}{64}\int_1^{\sqrt{5}}(u^4-u^2)du = \frac{\pi}{32}(\frac{5}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{15})$$

二、求上半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2 (z\ge 0)$ 的质量，此壳的面密度 $\rho = z$.

解：$\iint\limits_{\Sigma} zds = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = a\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy = \pi a^3$

三、求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的重心坐标.

解：$\iint\limits_{\Sigma} zds = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = a\iint_{x^2+y^2\le a^2}dxdy = \pi a^3$

$$\iint\limits_{\Sigma} ds = \iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = 2\pi a\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2a^2\pi$$

结合对称性，重心为 $(0, 0, \dfrac{a}{2})$

一、把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化为对面积的曲面积分：

（1）Σ 为平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的上侧；

解：
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy \\ &= \frac{1}{5}\iint\limits_{\Sigma}[3P(x,y,z)+2Q(x,y,z)+2\sqrt{3}R(x,y,z)]dS\end{aligned}$$

（2）Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧.

解：$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}[xP(x,y,z)+yQ(x,y,z)+zR(x,y,z)]dS$$

二、计算 $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy$，其中 $f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数，Σ 为直角平行六面体 $0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c$ 的表面外侧.

解：曲面积分在 $0\le x\le a,0\le y\le b,z=0$（下侧），$0\le x\le a,0\le y\le b,z=c$（上侧）位、为 $\iint\limits_{D_{xy}} h(c)dxdy-\iint\limits_{D_{xy}} h(0)dxdy=ab[h(c)-h(0)]$；类似可以计算其他面，结果为

$$bc[f(a)-f(0)]+ca[g(b)-g(0)]+ab[h(c)-h(0)]$$

三、计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中 Σ 为柱面 $x^2+z^2=R^2$ 在 $x\ge 0,y\ge 0$ 两卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧.

解：Σ_1 为半柱面的下底：$x^2+z^2=R^2,y=0,x\ge 0$；Σ_2 为半柱面的上底：$x^2+z^2=R^2,y=h,x\ge 0$；Σ_3 为半柱面的底：$y:0\to h,z:-R\to R,x=0$，

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} xyzdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy-\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy-\iint\limits_{\Sigma_3} xyzdxdy$$
$$=\iiint_{\Omega} xydxdydz=\iint\limits_{\substack{x:0\to R\\ y:0\to h}} xydxdy\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dz=2\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx\int_0^h ydy=\frac{1}{3}h^2R^3$$

四、求 $\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=h(h>0)$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解：根据高斯公式 $\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=\iiint_{\Omega}0dxdydz=0$

五、求 $\iint\limits_{\Sigma}(f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)+(f(x,y,z)+z)dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上例.

解：$$\iint\limits_{\Sigma}(f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)+(f(x,y,z)+z)dxdy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}[(f(x,y,z)+x)-(2f(x,y,z)+y)+(f(x,y,z)+z)]dxdy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}[x-y+z]dxdy=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

一、利用高斯公式计算曲面积分：

（1）$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy, \Sigma$ 由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所转成四面体的外侧表面；

解：根据高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy = \iiint_{\Omega}(y+z+x)dxdydz = \frac{1}{3}\iiint_{\Omega} zdxdydz$$
$$= \frac{1}{3}\iint_{D_{xy}} dxdy\int_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{6}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{18}\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{72}$$

（2）$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy, \Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧；

解：根据高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy = 3\iiint_{\Omega} dxdydz = 4\pi abc$$

（3）$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy, \Sigma:$ 球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的外侧；

解：根据高斯公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2+x^2)dxdydz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\cos\varphi} r^3dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{\pi}{10}$$

（4）$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z^2dxdy, \Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧.

解：根据高斯公式 （关于 z 为奇函数） $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} z^2dxdy = 2\iiint_{\Omega} zdxdydz = 0$

二、求向径 $\vec{r}=\{x,y,z\}$ 通过圆锥体 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 全表面外侧的通量.

解：所求通量为 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{r}\cdot\overrightarrow{dS} = 3\iiint_{\Omega} dxdydz = \pi$

三、求 $\iint_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy, \Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半球面外侧.

解：设Σ_1 为 $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2, z=0}$（下侧），则

$$\iint_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$
$$= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy - \iint_{\Sigma_1} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$$
$$= 3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr = \frac{3\pi}{2}a^4$$

四、求 $\iint_{\Sigma}\frac{2}{a+y}f[(a+x)(a+y)^2]dydz - \frac{1}{a+x}f[(a+x)(a+y)^2]dzdx +$ $[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}]dxdy, \Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的下半部分的上侧，常数 $a>1$, f 可导.

解：设Σ₁为 $x^2+y^2=a^2, z=0$（下侧），则

$$\iint_{\Sigma}\frac{2}{a+y}f[(a+x)(a+y)^2]dydz - \frac{1}{a+x}f[(a+x)(a+y)^2]dzdx + [(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}]dxdy$$
$$= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = -\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz = -\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr = -\frac{4\pi}{15}a^5$$

五、求 $I=\iint_{\Sigma}(z^2x+ye^z)dydz + x^2ydzdx + (\sin^3 x + y^2z)dxdy, \Sigma$: 下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：设Σ₁为 $x^2+y^2=R^2, z=0$（下侧），则

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = -\iiint_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz - \iint_{\Sigma_1}\sin^3 xdxdy$$
$$= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin^3\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi\sin\varphi]d\varphi\int_0^R r^4dr = -\frac{2+5\pi}{15}R^5$$

六、计算 $\iint_{\Sigma}(2x+z)dydz + zdxdy$，其中Σ为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解：$I = 3\iiint_{\Omega}dxdydz = 3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz = \frac{3\pi}{2}$

七、求下列向量场的散度

(1) $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$　　　(2) $\vec{A} = \frac{1}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r}$，其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

解：(1) $div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$

(2)
$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$+ \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{|\vec{r}|}$$

一、利用斯托克斯公式计算曲线积分：$\oint_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$，从$z$轴正向往负向看，$\Gamma$的方向是顺时针的.

解：$$\oint_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}ds$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}ds=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D}\frac{1}{\sqrt{3}}dxdy=\frac{2}{3}\pi$$

二、求向量场$\vec{A}=(2z-3y)\vec{i}+(3x-z)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$的旋度

解：$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2z-3y & 3x-z & y-3x\end{vmatrix}=(2,5,6)$$

一、用比较审敛法或极限敛法判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$； （2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$； （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解：(1) 因为 $\frac{1+n}{1+n^2}\sim\frac{1}{n}$，发散；

(2) 当 $0<a<1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=1$；$a=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n}=\frac{1}{2}$，发散；

当 $a>1$，$\frac{1}{1+a^n}\sim\frac{1}{a^n}=(\frac{1}{a})^n$，收敛。

(3) 因为 $\sin\frac{\pi}{2^n}\sim\pi(\frac{1}{2})^n$，收敛。

二、判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$； （2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$； （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$

解：（1） 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}/\frac{2^n n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$，所以原级数收敛；

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{3-1/n})^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{9}<1$，所以原级数收敛；

(3) 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=1$，所以原级数发散；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}(a>0)$； （5）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n-1}}$； （6）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

解：（4） 当 $a\le1$ 时，因为 $\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}=+\infty$，原级数发散；

当 $a>1$ 时，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{(a+\frac{1}{n+1})^{n+1}}/\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}\times\frac{(a+\frac{1}{n})^n}{(a+\frac{1}{n+1})^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+\frac{1}{n})^n}{(a+\frac{1}{n+1})^n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}(\frac{a+\frac{1}{n}}{a+\frac{1}{n+1}})^n=\frac{1}{a}e^{\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(a+\frac{1}{n})-\ln(a+\frac{1}{n+1})]}=\frac{1}{a}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a+x)-\ln(ax+x+a)+\ln(x+1)}{x}}$$

$$=\frac{1}{a}e^{\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x+a}-\frac{a+1}{ax+x+a}+\frac{1}{x+1}]}=\frac{1}{a}e^{\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{a}-\frac{a+1}{a}+1]}=\frac{1}{a}<1$$

，原级数收敛；

(5) 因为 $\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|=\frac{1}{3}<1$，所以原级数(绝对)收敛；

(6) 原级数(条件)收敛。

三、若 $\lim_{n\to+\infty}n^2u_n$ 存在，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明：根据 $\lim_{n\to+\infty}n^2u_n$ 存在，$u_n\sim\frac{1}{n^2}$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

四、证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

证明：只需证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^{3n}}{n!a^n}$收敛即可. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b^3}{(n+1)a}=0<1$可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^{3n}}{n!a^n}$收敛。

五、下列级数是交错级数还是一般的变号级数？讨论它们的敛散性，并对收敛级数说明是绝对收敛还是条件收敛：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$；

证明：(1)根据$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$绝对收敛。

(2) 根据$\dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}$发散。但对于$u_n=\dfrac{1}{n-\ln n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

$$1>\ln(1+\frac{1}{n})\Rightarrow n+1-\ln(n+1)>n-\ln n$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n+1-\ln(n+1)}\Rightarrow u_n>u_{n+1}$$

根据莱布尼茨法则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n-\ln n}$(条件)收敛。

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2+(-1)^n}{n^{5/4}}$.

证明：(3) 根据$0<\dfrac{2+(-1)^n}{n^{5/4}}\le\dfrac{3}{n^{5/4}}$可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2+(-1)^n}{n^{5/4}}$(绝对)收敛。

一、求下列幂级数的收敛半径和收敛区间：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+b^n}x^n$　（a＞0，b＞0）；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(x-1)^n$.

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}x^{2n}}{a_n x^{2n-2}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{2n+1}{2^{n+1}}/\frac{2n-1}{2^n}||x^2|=\frac{x^2}{2}$

当$\frac{x^2}{2}<1$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，级数收敛；

当$\frac{x^2}{2}>1$，即$x>\sqrt{2}或x<-\sqrt{2}$时，级数发散。

对端点$x=\pm\sqrt{2}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$发散，所以收敛区间为：$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

（2）$\because\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(\frac{a}{b})^n+b}{(\frac{a}{b})^n+1}=b & a\le b\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b(\frac{b}{a})^n+a}{(\frac{b}{a})^n+1}=a & a>b\end{cases}=\max(a,b)$

对端点$x=\pm\max(a,b)$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\max(a^n,b^n)}{a^n+b^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\max(a^n,b^n)}{a^n+b^n}$发散(通项极限不等于零)。所以收敛区间为：$(-\max(a,b),\max(a,b))$

（3）$\because\ R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$

对端点$x=0和x=2$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$收敛。所以收敛区间为[0, 2].

二、求和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$；

解：（1） 易求出幂级数的收敛半径为 1 ，端点发散，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1+x})'=\frac{1}{(1+x)^2},|x|<1$$

（2） 易求出幂级数的收敛半径为 1 ，端点 x=1 发散，x=−1 收敛

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n}dx=x+\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n})dx$$

$$=x+\int_0^x\frac{x^2}{1-x^2}dx=-\int_0^x\frac{1}{x^2-1}dx=\ln|\frac{x+1}{x-1}|,x\in[-1,1)$$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$,并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$之和.

（3） 易求出幂级数的收敛半径为 1 ，端点 x=1，x=−1 发散

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'=(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1})'=[x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)']'=[x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)']'$$

$$=[x(\frac{x}{1+x})']'=[\frac{x}{(1+x)^2}]'=\frac{1-x}{(1+x)^3},x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}=5\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\frac{1}{5})^{n-1}=5\frac{1-\frac{1}{5}}{(1+\frac{1}{5})^3}=\frac{125}{54}$$

一、将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间

（1） $(1+x)\ln(1+x)$； （2） $\arcsin x$； （3） $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

解：（1）
$$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}$$
$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2},-1<x\le 1$$

(2)
$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{\frac{1}{2}}^n x^{2n}]dx$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{\frac{1}{2}}^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}C_{\frac{1}{2}}^n x^{2n+1},(-1<x<1)$$

(3)
$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}=(\frac{1}{1-x})''-(\frac{1}{1-x})'=(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''-(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1},|x|<1$$

二、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

解：令 $t=x+4$，则
$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{t^2-5t+6}=\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{t}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{t}{3})^n=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}]t^n=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}](x+4)^n$$
$$-2<t<2\Rightarrow -6<x<-2$$

三、将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解：
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(\frac{x}{\sqrt{2}})^{2n-1}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}\sin(\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}}=$$
$$\sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}[(\frac{x-1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{3!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^3+\frac{1}{5!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^{2n-1}+\cdots]+$$
$$\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}[1-\frac{1}{2!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{4!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^{2n}+\cdots]$$
$$=\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^2-\frac{1}{12}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^3+\ldots+$$
$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^{2n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\frac{\sqrt{2}}{2^n}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^{2n}+\ldots$$

四、将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的幂级数.

解：$\cos x=\cos[(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{3}]=\dfrac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$$\cos x = \cos[(x+\tfrac{\pi}{3})-\tfrac{\pi}{3}] = \frac{1}{2}\cos(x+\tfrac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+\tfrac{\pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2}[1-\frac{1}{2!}(x+\tfrac{\pi}{3})^2+\frac{1}{4!}(x+\tfrac{\pi}{3})^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}(x+\tfrac{\pi}{3})^{2n}+\cdots]+$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}[(x+\tfrac{\pi}{3})-\frac{1}{3!}(x+\tfrac{\pi}{3})^3+\frac{1}{5!}(x+\tfrac{\pi}{3})^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}(x+\tfrac{\pi}{3})^{2n-1}+\cdots]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x+\tfrac{\pi}{3})-\frac{1}{2}\frac{1}{2!}(x+\tfrac{\pi}{3})^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}(x+\tfrac{\pi}{3})^3+\ldots$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(x+\tfrac{\pi}{3})^{2n-1}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}(x+\tfrac{\pi}{3})^{2n}+\ldots$$

一、利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

（1）$\ln 3$　（误差不超过 0.0001）

解 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots)\ (-1<x<1)$，

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}+\cdots).$$

又 $$|r_n|=2[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\cdots]$$

$$=\frac{2}{(2n+1)2^{2n-1}}[1+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot 2^{2n+5}}+\cdots]$$

$$<\frac{2}{(2n+1)2^{2n-1}}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots)=\frac{1}{3(2n-1)2^{2n-2}},$$

故 $|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012$，$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.00003$.

因而取 $n=6$，此时

$$\ln 3=2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}})\approx 1.0986.$$

（2）$\cos 2^\circ$　（误差不超过 0.0001）

解 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$，

$$\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2+\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4-\frac{1}{6!}\cdot(\frac{\pi}{90})^6+\cdots.$$

由于 $\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\approx 6\times 10^{-4}$，$\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\pi}{90})^4\approx 10^{-8}$，

故 $\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\pi}{90})^2\cdot\approx 1-0.0006=0.9994$.

二、求 $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$ 的近似值，误差不超过 0.0001.

解 $$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}[1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots]dx$$

$$=(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots)|_0^{0.5}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots.$$

因为 $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.00625$，$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.00028$，$\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009$，

所以 $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.4940$.

一、设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且满足 $f(x,x^2)=x^3$，$f'_x(x,x^2)=x^2-x^4$，计算 $f'_y(x,x^2)$.

解：两边对 x 求导，有 $f'_x(x,x^2)+2xf'_y(x,x^2)=3x^2\quad\Rightarrow f'_y(x,x^2)=\frac{2x+x^3}{2}$

二、计算曲面积分，其中积分曲面Σ为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：设Σ1 为 $\boldsymbol{x^2+y^2 1, z=0}$ 的下侧. 则

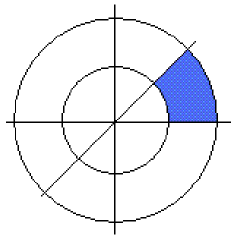
$$\boldsymbol{I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma 1}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$\boldsymbol{-\iint\limits_{\Sigma 1}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$\boldsymbol{=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2-3+3z^2)dxdydz+\iint\limits_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz-3\pi+2\pi}$$

$$\boldsymbol{=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr-\pi=\frac{7}{5}\pi}$$

三、计算 $\iint\limits_{D}\arctan\frac{y}{x}d\sigma$ ，其中 D 由直线 $y=0$ 及圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域．



解：$\iint\limits_{D}\arctan\frac{y}{x}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr=\frac{3}{64}\pi^2$

一、填空题：

（1）设 $f(x)=\begin{cases}-1 & ,-\pi<x\le 0\\ 1+x^2 & ,0<x<\pi\end{cases}$，则以 2π 为周期的傅立叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于_$\pi^2/2$_.

（2）设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，其表达式为 $f(x)=\begin{cases}2 & ,-1<x\le 0\\ x^3 & ,0<x\le 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=1$ 处收敛于___3/2_______.

二、将下列函数 $f(x)$ 开成傅里叶级数：

（1）$f(x)=\begin{cases}bx & -\pi<x<0\\ ax & 0\le x<\pi\end{cases}$　　$(a>b>0)$；

解 因为 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}axdx=\frac{\pi}{2}(a-b)$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ax\cos nxdx]$$

$$=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n\ (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ax\sin nxdx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{a+b}{n}\ (n=1, 2, \cdots),$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\}$$

$$(x\ne(2n+1)\pi,\ n=0, \pm1, \pm2, \cdots).$$

（2）$f(x)=\begin{cases}e^x & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\end{cases}$；

解 将 $f(x)$ 拓广为周期函数 $F(x)$，则 $F(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续，在 $x=\pm\pi$ 间断，且

$$\frac{1}{2}[F(-\pi^-)+F(-\pi^+)]\ne f(-\pi),\quad \frac{1}{2}[F(\pi^-)+F(\pi^+)]\ne f(\pi),$$

故 $F(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 中收敛于 $f(x)$，而在 $x=\pm\pi$ 处 $F(x)$ 的傅里叶级数不收敛于 $f(x)$.

计算傅氏系数如下:

$$a_0=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx]$$

$$=\frac{1}{\pi}\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\}\ (n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}]\sin nx\}$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

（3）$f(x)=\sin(\arcsin\frac{x}{\pi})$ （$-\pi\le x\le\pi$）;

解: 显然 $f(x)=\sin(\arcsin\frac{x}{\pi})=\frac{x}{\pi}$ 在整个数轴上连续,由收敛定理知,其傅立叶级数处处收敛于 $f(x)$，又 $f(x)$ 是奇函数,故由上面的讨论知,其傅立叶级数是正弦级数.

其中 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}$

∴ 所求傅立叶级数为:

$$f(x)=\sin(\arcsin\frac{x}{\pi})=\frac{x}{\pi}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\qquad x\in[-\pi,\pi).$$

一、将 $f(x)=2x^2(0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 对 $f(x)$ 作奇延拓，则 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx dx=\frac{4}{\pi}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\ (n=1, 2, \cdots),$$

故正弦级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n})-\frac{2}{n^3}]\sin nx\ (0\le x<\pi),$$

级数在 $x=0$ 处收敛于 0.

对 $f(x)$ 作偶延拓，则 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$，而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2dx=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx dx=(-1)^n\frac{8}{n^2}\ (n=1, 2, \cdots),$$

故余弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (0\le x\le\pi).$$

二、设 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2},(-\pi\le x\le\pi)$ 将其展开成傅里叶级数.

解 因为 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 为偶函数，故 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$，而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\frac{1}{2}-n)x-\cos(\frac{1}{2}+n)x]dx$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}\ (n=1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续，所以

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx\ (-\pi\le x\le\pi).$$

三、函数 $f(x)$ 的周期为 2π . 证明：

（1）如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_0=0, a_{2k}=0, b_{2k}=0(k=1,2,\cdots)$；

（2）如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅立叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$.

解1 因为 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$$\overset{令t=\pi+x}{=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt=-a_0,$$

所以 $a_0=0$.

因为 $a_{2k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2kxdx$

$$\overset{令t=\pi+x}{=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)\cos 2k(t-\pi)dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos 2ktdt=-a_{2k},$$

所以 $a_{2k}=0$.

同理 $b_{2k}=0(k=1, 2, \cdots)$.

解2 因为 $a_{2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2k+1)xdx$

$$\overset{令t=\pi+x}{=\!=\!=}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t-\pi)\cos(2k+1)(t-\pi)dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(2k+1)tdt=-a_{2k+1},$$

所以 $a_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

同理 $b_{2k+1}=0(k=1, 2, \cdots)$.

一、将周期为 6 的周期函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & -3\le x<0\\ 1 & 0\le x\le 3\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 $a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)dx+\int_0^3 dx]=-1$,

$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx$

$=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx]$

$=\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\ (n=1, 2, \cdots)$,

$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx$

$=\frac{1}{3}[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx]$

$=\frac{6}{n\pi}(-1)^n\ (n=1, 2, \cdots)$,

而在$(-\infty, +\infty)$上, $f(x)$的间断点为 $x=3(2k+1)$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$,

故 $f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\}$,

$(x\ne 3(2k+1), k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

二、将函数 $f(x)=x^2$,（$0\le x\le 2$）展开为正弦级数和余弦级数.

解: 显然 $f(x)=x^2$ 满足收敛定理中的条件,且 $\ell=2$

(I) 现将 $f(x)$ 展开成正弦级数,为此,先将 $f(x)$ 延拓成奇函数,

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}xdx=\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi}{2}xdx=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1],\quad n=1,2,\cdots$$

在$[0,2]$内, $f(x)$连续 $\Rightarrow$ $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2[(-1)^n-1]}{n^3\pi^2}\}\sin\frac{n\pi}{2}x$

(II) 现将 $f(x)$ 展开成余弦级数,为此,先将 $f(x)$ 延拓成偶函数,利用(6)求其系数 a_n ($n=0,1,2,\cdots$)

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi}{2}xdx$$

当 $n=0$ 时, $a_0=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$,

当 $n\ne 0$ 时, $a_n=\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi}{2}xdx=(-1)^n\frac{16}{n^2\pi^2}$, n=1,2,…

由 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,所以 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛余 $f(x)$.

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$$

一、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{n})^n}n^{n+\frac{1}{n}}$ 的敛散性.

证：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{n})^n}n^{n+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}}{[\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\neq 0=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=1$$

所以级数发散.

二、求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数.

解：令 t=x-1,先计算 $s=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$，显然 $s=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$ 的收敛区域为(−1,1). 所求和函数为

$$s=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{n+1})'=(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})'=(\frac{t}{1-t})'=\frac{1}{(2-x)^2},x\in(-1,1)$$

三、将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 有开成麦克劳林级数.

解：$\because$ $f'(x)=\arctan x$，而 $arctgx$ 可按下面方法展开成 x 的幂级数.

$$\because\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\forall x\in(-1,1)$$

$$\therefore\ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,\forall x\in(-1,1)$$

$$arctgx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots,\forall x\in(-1,1)$$

$$\therefore\ f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=\int_0^x\arctan xdx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{30}x^6-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}+\cdots$$

四、将 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 展开成付里叶级数并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解：显然 $f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$ 是偶函数,且 $\ell=1$,故 $b_n=0\quad n=1,2,\cdots$,下面来求 $a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx=2\int_0^1(2+x)dx=5$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi xdx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases},n=1,2,\cdots$$

又 $f(x)$ 在 $(-1,1]$ 上处处连续,故其傅立叶级数处处收敛于 $f(x)=2+|x|$.

$$\therefore\ f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}\quad,\ x\in(-1,1]$$

取 x=0 代入，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=s$，那么

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{4}s+\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow s=\frac{\pi^2}{6}$$

一、指出下列方程中那些是微分方程：

(1) $y''-3y'+2y=x$（ √ ）；　　(2) $y^2-3y+2=x$（ ）；

(3) $y'=x+y+y^2\cos x$（ √ ）；　　(4) $y^2+1=3x+2xy+\sin x$（ ）.

二、指出下列微分方程的阶数，同时指出它是线性的，还是非线性的：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=1$（1阶；非线性）；　(2) $x^2y''-xy'+y=\ln x$;（2阶；非线性）；

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$（1阶；非线性）；　(4) $(7x+3y)dx+(x+y)dy=0$（1阶；非线性）.

三、指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.如果是解，是通解，还是特解？请选出相应的选项.

(1) $.xy'=2y, y=5x^2$（ A　D ）；

(A)是解；(B)不是解；(C)是通解；(D)是特解.

(2) $y''+\omega y=0, y=3\sin\omega x-4\cos\omega x$（ B ）；

(A)是解；(B)不是解；(C)是通解；(D)是特解.

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2e^x$（ B ）；

(A)是解；(B)不是解；(C)是通解；(D)是特解.

(4) $y'=3xy, y=Ce^{\frac{3}{2}x^2}$（ C ）.

(A)是解；(B)不是解；(C)是通解；(D)是特解.

四、求下列可分离变量的微分方程的解：

(1) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;

解：当 $x^2-1\neq 0$ 时,方程可变为 $\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{y}{y^2+1}dy$，两边积分，得

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1)=\frac{1}{2}\ln(y^2+1)+C_1$$ 即为方程的通解。

可以验证 $x^2-1=0$ 或 $x=1,-1$ 满足方程.

综上所述，方程的通解为 $y^2+1=C(x^2-1)$

(2) $y'=e^{5x-2y}, y(0)=0$;

解：方程可变为

$$e^{2y}dy=e^{5x}dx\Rightarrow\frac{1}{2}e^{2y}=\frac{1}{5}e^{5x}+C_1\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{5}e^{5x}+C)$$

$$y(0)=0\Rightarrow C=\frac{3}{5}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{5}e^{5x}+\frac{3}{5})$$

(3) $y'=\frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$;

解：方程可变为

$$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\Rightarrow 1+y^2=C(1+x^2)$$

(4) $y'=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$;

解：方程可变为

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\arcsin y=\arcsin x+C\Rightarrow y=\sin(\arcsin x+C)$$

(5) $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

解：方程可变为

$$\frac{e^y dy}{e^y-1}=-\frac{e^x dx}{e^x+1}\Rightarrow \ln(e^y-1)+\ln(e^x-1)=C\Rightarrow (e^y-1)(e^x-1)=C$$

(6) $y'=\tan x-y=a, y(\frac{\pi}{2})=0$;

(7) $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^2=0$;

解：方程可变为

$$(y+1)^2dy=-x^2dx\Rightarrow \frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{3}x^3+C_1\Rightarrow (y+1)^3+x^3=C$$

(8) $y'\sin x=y\ln y$;

解：方程可变为

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}\Rightarrow \ln\ln y=\ln|\cot x-\csc x|+C_1\Rightarrow y=Ce^{\cot x-\csc x}$$

附加题：设函数 $u(x,y)$ 有连续二阶偏导数，证明：在变换 $\xi=x-y$，$\eta=x-\frac{1}{3}y$ 下方程：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$可变为方程:$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$

证明:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial u}{\partial\xi}]+\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial u}{\partial\eta}]=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial u}{\partial\xi}]+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial u}{\partial\eta}]=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$=-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial u}{\partial\xi}]-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial u}{\partial\eta}]=-[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}]-\frac{1}{3}[\frac{\partial u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}]$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$$

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+4[-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}]+3[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}]$$

可变为方程:$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$

一、求下列齐次微分方程的解：

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;

解：原方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=ux$，代入方程，得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{u^2-1}\text{，化简}\quad \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{dx}{x}$$

积分，得 $\ln(u+\sqrt{u^2-1})=\ln x+C_1\Rightarrow\dfrac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x^2}=C$，得通解为

$$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$$

(2) $x^2y'=x^2+xy+y^2$;

解：原方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$，令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=ux$，代入方程，得

$$u+x\frac{du}{dx}=1+u+u^2\text{，化简}\quad \frac{du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

积分，得 $\arctan u=\ln x+C\Rightarrow\arctan\dfrac{y}{x}=\ln x+C$，得通解为

$$y=x\tan(\ln x+C)$$

(3) $(xy'-y)\cos^2\dfrac{y}{x}+x=0$;

解：原方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，即$y=ux$，代入方程，得

$$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{1}{\cos^2 u}+u\text{，化简}\quad \cos^2 u\,du=-\frac{dx}{x}$$

积分，得通解 $\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{4}\sin 2u=-\ln x+C_1\Rightarrow 2\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{2y}{x}+4\ln x=C$

(4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x},y(1)=0$;

解： $\dfrac{dy}{dx}=e^u+u\Rightarrow u+x\dfrac{du}{dx}=e^u+u\Rightarrow e^{-u}du=\dfrac{dx}{x}\Rightarrow e^{-\frac{y}{x}}+\ln x=C$

$$e^0+\ln 1=C\Rightarrow C=1\Rightarrow e^{-\frac{y}{x}}+\ln x=1$$

(5) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2},y(1)=1$;

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}\Rightarrow u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}\Rightarrow\dfrac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}du=-\dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right]du=\frac{dx}{x}\Rightarrow u+1=Cx(u^2+1)\Rightarrow x+y=C(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow 2=2C\Rightarrow C=1\Rightarrow x+y=x^2+y^2\Rightarrow(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$

(6) $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})dy=0$;

解：$\dfrac{dx}{du}\overset{}{\underset{u=x/y}{===}}\dfrac{2(u-1)e^u}{1+2e^u}\Rightarrow y\dfrac{du}{dy}=-\dfrac{u+2e^u}{1+2e^u}\Rightarrow\dfrac{1+2e^u}{u+2e^u}du=-\dfrac{dy}{y}$

$\Rightarrow y(u+2e^u)=C\Rightarrow x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$

(7) $\dfrac{x}{y}y'=\ln\dfrac{y}{x}$.

解：$\dfrac{d(\ln y)}{d(\ln x)}=\ln y-\ln x\Rightarrow\dfrac{dY}{dX}=Y-X\overset{u=Y-X}{\Rightarrow}\dfrac{du}{dX}=u-1\Rightarrow\dfrac{du}{u-1}=dX$

$\Rightarrow u-1=Ce^X\Rightarrow\ln y-\ln x-1=Cx\Rightarrow y=xe^{Cx+1}$

一、求下列一阶线性微分方程的解：

(1) $xy'+y=e^{x}, y(1)=e$;

解：由于 $xy'+y=e^{x}$ 为一阶线性非齐次方程，且 $P(x)=\dfrac{1}{x}, Q(x)=\dfrac{e^{x}}{x}$，代入（4），得其通解为

$$y=\left(\int\frac{e^{x}}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}\left(e^{x}+C\right)=\frac{e^{x}+C}{x}$$

(2) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

解： $y=\left(\int e^{-\sin x}e^{\int\cos xdx}dx+C\right)e^{-\int\cos xdx}=\left(x+C\right)e^{-\sin x}$

(3) $(x^{2}+1)y'+2xy=4x^{2}$;

解： $y=\left(\int\dfrac{4x^{2}}{x^{2}+1}e^{\int\frac{2x}{x^{2}+1}dx}dx+C\right)e^{-\int\frac{2x}{x^{2}+1}dx}=\dfrac{1}{x^{2}+1}\left(\dfrac{4}{3}x^{3}+C\right)$

(4) $(x-2)y'=y+2(x-2)^{3}$;

解： $y=\left(\int 2(x-2)^{2}e^{\int-\frac{1}{x-2}dx}dx+C\right)e^{\int\frac{1}{x-2}dx}=(x-2)\left(x^{2}-4x+C\right)$

(5) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}, y(\pi)=1$;

解：

$$y=\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right)$$

$$y(\pi)=1\Rightarrow C=\pi-1\Rightarrow y=\frac{1}{x}\left(-\cos x+\pi-1\right)$$

(6) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+5\rho=4$;

$$\rho=\left(\int 4e^{\int 5d\theta}d\theta+C\right)e^{-\int 5d\theta}=e^{-5\theta}\left(\int 4e^{5\theta}d\theta+C\right)=e^{-5\theta}\left(\frac{4}{5}e^{5\theta}+C\right)=\frac{4}{5}+Ce^{-5\theta}$$

(7) $y'+\dfrac{2-3x^{2}}{x^{3}}y=1, y(1)=0$;

解：

$$y=\left(\int e^{\int\frac{2-3x^{2}}{x^{3}}dx}dx+C\right)e^{-\int\frac{2-3x^{2}}{x^{3}}dx}=\left(\int x^{-3}e^{-x^{-2}}dx+C\right)e^{x^{-2}+3\ln x}=x^{3}e^{x^{-2}}\left(\frac{1}{2}e^{x^{-2}}+C\right)$$

$$y(1)=0\Rightarrow C=\frac{1}{-2e}\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^{3}\left(1-e^{x^{-2}-1}\right)$$

(8) $xy'+y=x^{2}+3x+2$.

解：

$$y=\left(\int\frac{x^{2}+3x+2}{x}\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}\left(\int(x^{2}+3x+2)dx+C\right)=\frac{1}{3}x^{2}+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$$

一、利用全微分计算下列各题：

(1) 求解 $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$；

解：令 $P=5x^4+3xy^2-y^3, Q=3x^2y-3xy^2+y^2$，由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故方程为全微分方程,所以

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=\int_0^x 5x^4dx+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3+C$$

(2) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y^2}{2xy+2y^3}$ 的通解；

微分方程变形为: $(y^2-x)dx+(2xy+2y^3)dy=0$. 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,故方程为全微分方程,

$$(y^2-x)dx+(2xy+2y^3)dy=0\Rightarrow d(2xy^2)+dy^4-dx^2=0\Rightarrow 2xy^2+y^4-x^2=C$$

(3) $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$；

解：由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0\Rightarrow d(xe^y-y^2)=0\Rightarrow xe^y-y^2=C$

(4) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$.

解：微分方程变形为: $(x+y-1)dx-(x+y+1)dy=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+y+1}$,

令 $t=x+y+1$，方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+y+1}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=2-\frac{2}{t}\Rightarrow(1+\frac{1}{t-1})dt=2dx$$

$$\Rightarrow t+\ln|t-1|=2x+C\Rightarrow y-x+1+\ln|x+y|=C$$

一、求下列微分方程的通解：

(1) $y^{(4)}=xe^{x}+2$

解：连续积分，得 $y=xe^{x}-4e^{x}+\frac{1}{12}x^{4}+\frac{1}{6}C_1x^{3}+\frac{1}{2}C_2x^{2}+C_3x+C_4$

(2) $y''=y'+x$;

解：令 $p=y'$，则 $p'=y''$，则 $p'-p=x$ （一阶线性方程）

通解： $p=e^{x}\left(\int xe^{-x}dx+C\right)=e^{x}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)=-x-1+C_1e^{x}$

又 $p=y'$，所以通解 $y=-\frac{1}{2}x^{2}-x+C_1e^{x}+C_2$

(3) $y''=1+y'^{2}$;

解：令 $p=y'$，则 $p'=y''$，则 $p'=1+p^{2}\Rightarrow\frac{dp}{1+p^{2}}=dx\Rightarrow p=\tan(x+C_1)$

又 $p=y'$，所以通解 $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(4) $yy''+y'^{2}=0$;

解：令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，则

$$yp\frac{dp}{dy}+p^{2}=0\Rightarrow y\frac{dp}{dy}+p=0\text{或}p=0\Rightarrow\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}\text{或}p=0$$

$$\Rightarrow yp=C_1\text{或}p=0\Rightarrow ydy=C_1dx\text{或}y=C_3\Rightarrow\frac{1}{2}y^{2}=C_1x+C_2$$

(5) $1+y'^{2}=2yy''$;

解：令 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，则

$$1+p^{2}=2yp\frac{dp}{dy}\Rightarrow\frac{2pdp}{1+p^{2}}=\frac{dy}{y}\Rightarrow p^{2}=C_1y-1$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{C_1y-1}}=\pm dx\Rightarrow2\sqrt{C_1y-1}=\pm xC_1+C_1C_2$$

(6) $2xy'y''-y'^{2}=1$.

解：令 $p=y'$，则 $p'=y''$，则 $2xpp'=1+p^{2}\Rightarrow\frac{2pdp}{1+p^{2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow p=\pm\sqrt{Cx-1}$

$$\Rightarrow y=\pm\int\sqrt{Cx-1}dx=\pm\frac{2(Cx-1)}{3C}\sqrt{Cx-1}$$

(7) $y''+y'^{2}=1,y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

解：令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则

$p\dfrac{dp}{dy}+p^2=1 \Rightarrow \dfrac{dp^2}{dy}+2p^2=2$或$p^2=e^{\int -2dy}[\int 2e^{\int 2dy}dy+C_1]=C_1e^{-2y}+1 \Rightarrow y'=\pm\sqrt{C_1e^{-2y}+1}$ 根据 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$，$C_1=-1, y'=\pm\sqrt{1-e^{-2y}} \Rightarrow \ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x+C_2$

根据 $y|_{x=0}=0$，$C_2=0, \ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x \Rightarrow y=\ln chx$

(8) $y''=3\sqrt{y}, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2.$

解：令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则 $p\dfrac{dp}{dy}=3\sqrt{y} \Rightarrow pdp=3\sqrt{y}dy \Rightarrow \dfrac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+2C_1 \Rightarrow y'=2\sqrt{y^{\frac{3}{2}}+C_1}$ 根据 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$，$C_1=0 \Rightarrow y'=2y^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2 \Rightarrow y=(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}C_2)^4$

根据 $y|_{x=0}=1$，$C_2=1$，$y=(\dfrac{1}{2}x+1)^4$.

一、求下列常系数齐次微分方程的解：

(1) $y''-3y'+2y=0$;

解：特征方程为 $r^2-3r+2=0$ 则 $r_1=1, r_2=2$，从而通解为 $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

(2) $y''+a^2y=0$;

解:特征方程为 $r^2+a^2=0$ 则 $r_{1,2}=\pm ai$，从而通解为 $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

(3) $y''+6y'+13y=0$;

解:特征方程为 $r^2+6r+13=0 \Rightarrow r=-3\pm 2i$，从而通解为

$$y=e^{-3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

(4) $y^{(4)}-16y=0$;

解：特征方程为 $r^4-16=0 \Rightarrow r=\pm 2, \pm 2i$，从而通解为

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$$

(5) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$;

解：特征方程为 $4r^2-4r+1=0 \Rightarrow r=\pm\frac{1}{2}$，从而通解为 $y=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{-\frac{1}{2}x}$，

根据初始条件有 $c_1=c_2=1$，所以 $y=e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}$

(6) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$.

解:特征方程为 $r^2+4r+29=0 \Rightarrow r=-2\pm 5i$，从而通解为

$$y=e^{-2x}(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x)$$

根据初始条件有 $c_1=0, c_2=3$，所以 $y=3e^{-2x}\sin 5x$

一、求下列常系数非齐次微分方程的解：

(1) $y''+3y'+2y=(x^2+1)e^{2x}$；

解：特征方程为 $r^2+3r+2=0\Rightarrow r=-1,-2$，则齐次方程的通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

设特解为 $y^*=(ax^2+bx+c)e^{2x}$，代入方程，比较系数得

$$12ax^2+(14a+12b)x+2a+7b+12c=x^2+1 \qquad a=\frac{1}{12},b=\frac{7}{72},c=\frac{11}{864}$$

故 特解 $y^*=\frac{1}{12}(x^2+\frac{7}{6}x+\frac{11}{72})e^{2x}$

所以通解为：$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{12}(x^2+\frac{7}{6}x+\frac{11}{72})e^{2x}$

(2) $y''+3y'+2y=(x+3)e^{-2x}$；

解：特征方程为 $r^2+3r+2=0\Rightarrow r=-1,-2$，则齐次方程的通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

设特解为 $y^*=x(ax+b)e^{-2x}$

代入方程，比较系数得 $-2ax+2a-b=x+3\Rightarrow a=-\frac{1}{2},b=-4$

故 特解 $y^*=-\frac{1}{2}x(x+8)e^{-2x}$ 所以通解为：$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{2}x(x+8)e^{-2x}$

(3) $25y''-10y'+y=(3x^2+x)e^{\frac{1}{5}x}$；

解：特征方程为 $25r^2-10r+1=0\Rightarrow r_{1,2}=\frac{1}{5}$，则齐次方程的通解为

设特解为 $y^*=x^2(ax^2+bx+c)e^{\frac{1}{5}x}$

代入方程，比较系数得 $50(6ax^2+3bx+c)=(3x^2+x)$ $\qquad a=\frac{1}{100},b=\frac{1}{150},c=0$

故 特解 $y^*=\frac{1}{300}x^3(3x+2)e^{\frac{1}{5}x}$

所以通解为：$y=c_1e^{\frac{1}{5}x}+c_2xe^{\frac{1}{5}x}+\frac{1}{300}x^3(3x+2)e^{\frac{1}{5}x}$

(4) $y''-2y'+5y=3x^2e^x(\cos 2x+\sin 2x)$;

解：特征方程：$r^2-2r+5=0$，则 $r_{1,2}=1\pm 2i$，从而通解为 $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$

使用常数变异法，设 $y=c_1(x)e^x\cos 2x+c_2(x)e^x\sin 2x$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(\cos 2x - \sin 2x) + c_2'(x)(\sin 2x + \cos 2x) = 3x^2(\cos 2x + \sin 2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = -3x^2 \sin 2x(\cos 2x + \sin 2x) \\ c_2'(x) = 3x^2 \cos 2x(\cos 2x + \sin 2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{3}{2}x^2\cos 4x - \frac{3}{2}x^2\sin 4x - \frac{3}{2}x^2 \\ c_2'(x) = \frac{3}{2}x^2\cos 4x + \frac{3}{2}x^2\sin 4x + \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\int x^2\cos 4x dx = \frac{1}{4}x^2\sin 4x + \frac{1}{8}x\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x$$

$$\int x^2\sin 4x dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x$$

$$\begin{cases} c_1(x) = \frac{3}{8}x^2\sin 4x - \frac{3}{16}x\sin 4x - \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{3}{8}x^2\cos 4x + \frac{3}{16}x\cos 4x - \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{1}{2}x^3 + c_1 \\ c_2(x) = \frac{3}{8}x^2\sin 4x + \frac{3}{16}x\sin 4x - \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{3}{8}x^2\cos 4x + \frac{3}{16}x\cos 4x + \frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{2}x^3 + c_2 \end{cases}$$ 所以方程的

解：

$$y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\sin 2x + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{1}{8})e^x(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{3}{8})xe^x(\sin 2x - \cos 2x)$$

(5) $y'' + 4y + 3\sin 3x = 0, y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$；

解：特征方程：$r^2 + 4 = 0$，则 $r_{1,2} = \pm 2i$，从而通解为 $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

从而特解设为 $y^\bullet = A\cos 3x + B\sin 3x$，代入方程比较系数，得 $A = 0, B = \frac{3}{5}$

从而特解为 $y^\bullet = \frac{3}{5}\sin 3x$，　所以通解为：$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{3}{5}\sin 3x$.

根据 $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$，$c_1 = 1, c_2 = \frac{7}{5}$,所求解为：$y = \cos 2x + \frac{7}{5}\sin 2x + \frac{3}{5}\sin 3x$

(6) $y'' - 6y' + 5y = 4x + 1, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$；

解：特征方程为 $r^2 - 6r + 5 = 0$　则 $r_1 = 1, r_2 = 5$，则齐次方程的通解为 $y = c_1e^x + c_2e^{5x}$

设特解为 $y^\bullet = ax + b$,代入方程，比较系数得

$$-6a + 5ax + 5b = 4x + 1 \Rightarrow a = \frac{4}{5}, b = \frac{29}{25}$$ 故 特解 $y^\bullet = \frac{1}{25}(20x + 29)$

所以通解为：$y = c_1e^x + c_2e^{5x} + \frac{1}{25}(20x + 29)$

根据初始条件， $c_1=-\frac{1}{4},c_2=\frac{9}{100}$，所求解: $y=-\frac{1}{4}e^x+\frac{9}{100}e^{5x}+\frac{1}{25}(20x+29)$

(7) $y''-6y'+9y=(2x+1)e^{3x},y|_{x=0}=y'|_{x=0}=1$；

解：特征方程为 $r^2-6r+9=0$ 则 $r_1=3,r_2=3$，则齐次方程的通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$

设特解为 $y^{*}=x^2e^{3x}(ax+b)$,代入方程，比较系数得

$$e^{3x}(6ax+2b)=e^{3x}(2x+1)\Rightarrow a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2}$$

故 特解 $y^{*}=x^2e^{3x}(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})$

所以通解为: $y=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}+x^2e^{3x}(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})$

根据初始条件，$c_1=1,c_2=-2$，所求解: $y=e^{3x}-2xe^{3x}+x^2e^{3x}(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})$

(8) $y''+4y=\cos 2x,y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$.

解：特征方程：$r^2+4=0$，则 $r_{1,2}=\pm 2i$

又 $\lambda+\omega i=2i$ 是特征方程的根，$k=1$，从而通解为 $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

从而特解设为 $y^{*}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，代入方程比较系数，得 $A=0,B=\frac{1}{4}$

故 特解 $y^{*}=\frac{1}{4}x\sin 2x$

所以通解为: $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x$

根据初始条件，$c_1=c_2=0$ 所求解: $y=\frac{1}{4}x\sin 2x$

一、一曲线在任一点的斜率等于$\dfrac{2y+x+1}{x}$，且通过点(1，0)，试求.

解：$y'=\dfrac{2y+x+1}{x}$， 令$\begin{cases}x=X+h\\ y=Y+k\end{cases}$，则

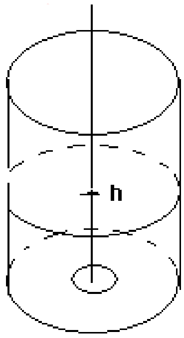
$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+2k+h+1}{X+h}\Rightarrow\begin{cases}2k+h+1=0\\ h=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2}\\ h=0\end{cases}\Rightarrow\frac{dY}{dX}=1+2\frac{Y}{X}$$

令$u=\dfrac{Y}{X}$ 代入，得$\dfrac{du}{1+u}=\dfrac{dX}{X}$，积分，得$u=CX-1$，由 $u=\dfrac{Y}{X}$代回，得

通解为： $y+\dfrac{1}{2}=Cx^2-x$，通过点(1，0)有$C=\dfrac{3}{2}$，此曲线的方程式

$$y=\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$$

二、有一直径为2R＝1.8m,高为H＝2.45m的圆柱形水槽.柱轴竖直放着柱底有一直径为2R＝6cm的小圆孔，问在多长时间内可使全槽中的水经小圆孔全部流尽？(液体多容器中流出的速度等于$0.6\sqrt{2ghg}$，其中$g=10m/s^2$为重力加速度，h为流孔上方水平面的高度.)



解：由水力学知, 水从孔口流出的流速为 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.6\sqrt{2gh}$

由于$V=\pi R^2h=0.81\pi h$，从而

$$0.81\pi dh=0.6\sqrt{2gh}dt,\ h|_{t=0}=2.45$$

$$h=\left(\frac{0.1\sqrt{20}}{0.27\pi}t+\sqrt{2.45}\right)^2$$

三、求曲线的方程，此曲线上任一点(x，y)处之切线垂直于此点与原点的连线.

解：设曲线的方程为y=f(x),根据题意有

$$y'=-\frac{x}{y}$$

解方程：$ydy=-xdx\Rightarrow y^2=-x^2+C\Rightarrow x^2+y^2=C$

四、汽艇以(1/0.36)m/s的速度在静水上运动.停止了发动机，经过20秒钟，艇的速度减至(1/0.6)m/s，问发动机停止2min后艇的速度(假定水的阻力与艇速成正比).

解：根据牛顿第二定律列方程$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$， 初始条件为$v\big|_{t=0}=\dfrac{1}{0.36}$

对方程分离变量,然后积分 ：$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt\Rightarrow v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$

利用初始条件，得. $v=\dfrac{1}{0.36}e^{-\frac{k}{m}t}$

(1/0.6)m/s: $\dfrac{1}{0.6}=\dfrac{1}{0.36}e^{-\frac{20k}{m}}\Rightarrow\dfrac{k}{m}=-\dfrac{1}{20}\ln\dfrac{3}{5}$

从而. $v=\dfrac{1}{0.36}e^{(\frac{1}{20}\ln\frac{3}{5})t}$. 经过2min秒钟，艇的速度减至 $v=\dfrac{1}{0.36}e^{6\ln\frac{3}{5}}=0.1296$

数一期末模拟试题(一)

一、填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

(1) 设函数 $u=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$，则 $du|_{(1,1,1)}=$____ $dx-dy$ __________.

$$du=\frac{1}{zy}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}dx+\frac{1}{z}(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}-1}(-\frac{x}{y^2})dy+(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}(-\frac{1}{z^2})dz\Rightarrow du|_{(1,1,1)}=dx-dy$$

(2) D 为圆 $x^2+y^2\le R^2$ 中第一象限部分，$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2}dxdy=$__ $\frac{2}{3}\pi R^3$ ______.

(3) 曲面 $\sum$ ：$x^2+y^2=1(0\le Z\le 2)$，$\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2+1)ds=$___ 8π _.

$$\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2+1)ds=\iint\limits_\Sigma 2ds=2\bullet 2\bullet 2\pi=8\pi$$

(4) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & -\pi<x\le 0\\ x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅氏级数在 $(-\pi,\pi)$ 内的和

$S(x)=$____ $f(x)=\begin{cases}-x+1, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0<x<\pi\\ 1/2, & x=0\end{cases}$ ____.

(5) 二阶线性方程 $y''-2y'+10y=0$ 的通解 $y=$___ $y=e^x(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$ __.

二、选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n+1}$ 的收敛半径为（ D ）.

(A) 2； (B) 1； (C) $\sqrt{2}$； (D) $1/\sqrt{2}$

(2) 直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$ 与平面 $\pi:x-y+2z+3=0$ 位置关系为（ D ）.

(A) l 平行于 π； (B) l 垂直于 π； (C) l 在 π 内； (D) l 与 π 斜交.

(3) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 偏导数存在为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续的（ B ）条件.

(A) 充分； (B) 无关； (C) 必要； (D) 充要.

(4) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则（ C ）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必发散； (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 必发散；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 必发散； (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 必发散.

(5) $D=\{(x,y)|-a\le x\le a,\ x\le y\le a\}$，$D_1=\{(x,y)|0\le x\le a,\ x\le y\le a\}$ 则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\cdot\sin y)dxdy=$（ A ）.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\cdot\sin ydxdy$； (B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$；

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$； (D) 0.

$$\iint\limits_D (xy+\cos x\cdot\sin y)dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{x}^{a}(xy+\cos x\cdot\sin y)dy$$
$$=\int_{-a}^{a}[\frac{1}{2}xa^2-\cos x\cdot\cos a-\frac{1}{2}x^3+\cos^2 x]dx$$
$$=2\int_{0}^{a}[-\cos x\cdot\cos a+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)]dx=-\sin a\cdot\cos a+a$$

三、解答题：（每小题 9 分，共 36 分）

(1) 已知 $f(x,y)$ 有连续偏导数， $f(2,\ 2)=3$ ， $f_x'(2,\ 2)=-1$ ， $f_y'(2,\ 2)=4$ ， 函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x+z-1,\ yz)=x^2-y+3$ 确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

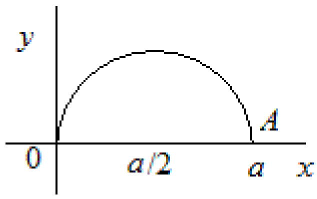
解：
$$f(x+z-1,yz)=x^2-y+3\Rightarrow f_1(x+z-1,yz)(1+z_x)+yf_2(x+z-1,yz)z_x=2x$$
$$f(2,2)=3\Rightarrow x+z-1=2,yz=2,x^2-y+3=3\Rightarrow x=1,y=1,z=2$$
$$\Rightarrow f_1(2,2)(1+z_x)+f_2(2,2)z_x=2\Rightarrow z_x=1$$

(2) 求由球面 $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积.

解：
$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr=-\frac{16}{3}a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi d\cos\varphi=\frac{4}{3}a^3\pi\cos^4\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0}=a^3\pi$$

(3) 设 L 为圆周 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 上从 $A(a,0)$ 到原点 $O(0,0)$ 的一段圆弧，计算积分

$$I=\int_L\left(e^x\sin^2 y-2y-x\right)dx+\left(\cos^2 y+e^x\sin 2y\right)dy.$$



解：$I=\int_{L+OA}-\int_{OA}=\iint\limits_D 2dxdy-\int_{OA}-xdx=\dfrac{\pi a^2}{4}+\dfrac{1}{2}a^2$

(4) $\sum$ 为有向曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向夹角为锐角，计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left(3x+z\right)dydz+zdxdy$.

解：设 D 为圆面 $x^2+y^2=1,z=1$（下侧）
$$\iint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma+D}-\iint\limits_{D}=-4\iiint\limits_{V}dxdydz-\iint\limits_{D}\left(3x+z\right)dydz+zdxdy$$
$$=-4\iiint\limits_{V}dxdydz+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-4\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 1+\pi=-\frac{1}{3}\pi$$

四、应用题（每小题 9 分，共 18 分）

(1) 求 $f(x,y)=2x^2+y^2-4x+7$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\le 16$ 内最大值、最小值.

解：首先求函数的驻点，为极值点.

求条件极值：$F=2x^2+y^2-4x+7+\lambda(x^2+y^2-16)$

$$\begin{cases}4x-4+2\lambda x=0\\2y+2\lambda y=0\\x^2+y^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 4\\y=0\end{cases}\ or\ \begin{cases}x=2\\y=\pm\sqrt{12}\end{cases}$$，代入 $f(x,y)=2x^2+y^2-4x+7$，

$$f(1,0)=5,f(4,0)=23,f(-4,0)=55,f(2,\sqrt{12})=f(2,-\sqrt{12})=19$$

所以最大值 55、最小值点 5.

(2)求连接点 $A(0,1)$ 和 $B(1,0)$ 的一条(向上)凸曲线，对其上任意一点 $P(x,y)$，曲线弧段 AP 与线段 AP 之间的面积恰为 x^3.

解：根据曲线弧段 AP 与线段 AP 之间的面积为 x^3，

两边求导，$y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$

则 $y=Cx+1-6x^2 \Rightarrow y=-6x^2+5x+1$。

五、证明题(每小题 8 分，共 16 分)

(1)设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，求证 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 收敛.

证明:根据莱布尼茨法则，$\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$，对 $\varepsilon=a/2>0$，存在 N，当 n>N 时，$0<a_n-a<a/2$. 所以 根据比较法则和 $(\frac{1}{a_n+1})^n<(\frac{1}{a+1})^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 收敛.

(2)设函数 $z=f(u)$，且 $u=u(x,y)$ 满足 $u=y+x\varphi(u)$，其中 f，φ 可导，证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\varphi(u)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

证明：$u_x=\varphi(u)+x\varphi'(u)u_x \Rightarrow u_x=\frac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)}; u_y=1+x\varphi'(u)u_y \Rightarrow u_y=\frac{1}{1-x\varphi'(u)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)u_x=\frac{f'(u)\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)u_y=\frac{f'(u)}{1-x\varphi'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\varphi(u)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f'(u)\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)}-\varphi(u)\frac{f'(u)}{1-x\varphi'(u)}=0$$

数一期末模拟试题(二)

一、填空题：(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 设 $u=e^{-x}\sin(x+y)$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点(0，π)处的值为____1______.

(2) 交换二次积分的积分次序，$\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 f(x,y)dx$ =______$\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 f(x,y)dy$________.

(3) 曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} zds=$____$8\pi$_____.　(Σ是球面 $x^2+y^2+z^2=4$，在 Z≥0 的部分.)

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & -\pi\le x\le 0 \\ 2x & 0<x\le\pi \end{cases}$ 则它的傅里叶级数在区间(—π，π)内的和函数 $S(x)$=

$f(x)=\begin{cases} -x+1, & -\pi<x<0 \\ 2x, & 0<x<\pi \\ 1/2, & x=0 \end{cases}$ _________.

(5) 曲线 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转一周，则旋转曲面的方程为____$y=x^2+z^2$____________.

二、选择题：(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)x^n$ 的收敛半径为 R，则 R=(　A　).

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) $\dfrac{1}{2}$.

(2) 在曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　B　)

(A) 只有 1 条；　(B) 只有两条；　(C) 至少有三条；　(D) 不存在.

(3) 由方程 $xyz+x^2+y^2+z^2=2$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点(1，0，-1)处的全微分 $dz=$ B__________.

(A) $dz=-\dfrac{1}{2}dx+dy$；　(B) $dz=dx-\dfrac{1}{2}dy$；

(C) $dz=\dfrac{1}{2}dx+dy$；　(D) $dz=dx+\dfrac{1}{2}dy$.

(4) 函数 $z=x^2+y^2$ 在 $(1,2)$ 处从 $(1,2)$ 点到 $(2,2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数为___C_____.

(A) $\{2,4\}$；　(B) $8+2\sqrt{3}$；　(C) $1+2\sqrt{3}$；　(D) $\dfrac{4}{3}\pi$.

(5) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足 $y\,|_{x=1}=1$ 的特解 $y=$____D_______.

(A) $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$；　(B) $y=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$；　(C) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$；　(D) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

三、计算题：(每小题 8 分，共 24 分)

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-x+yz=1$ 所确定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}$ 的值.

解：
$$z^3-x+yz=1\Rightarrow x=0,y=0,z=1$$
$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-1+y\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y+3z^2}$$
$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+z+y\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y+3z^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1+6z\frac{\partial z}{\partial y}}{(y+3z^2)^2}=-\frac{y-3z^2}{(y+3z^2)^3}=\frac{1}{9}$$

(2) 求由 $x^2+y^2+z^2=4$ 和 $z^2-x^2-y^2=0$ 在 $z\le 0$ 的部分所围成的立体体积.

解:交线在 XOY 面上的投影为: $x^2+y^2\le 2$, 利用柱面坐标,
$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{\sqrt{4-r^2}}^{r}dr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(\sqrt{4-r^2}-r)rdr=\frac{8}{3}(2-\sqrt{2})\pi$$

(3) 求微分方程 $y''-4y'+4y=e^x$ 的通解.

解：特征方程为 $r^2-4r+4=0$ 则 $r_1=r_2=2$，则齐次方程的通解为 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

设特解为 $y^{\bullet}=ae^x$,代入方程，比较系数得 $a=1$, 故 特解 $y^{\bullet}=e^x$

所以通解为: $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+e^x$

四、解答题:（每小题 8 分，共 16 分）

(1) 设曲线积分 $\int_L x^2y^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有一阶连续的导数，且 $\varphi(0)=1$，计算: $\int_{(0,0)}^{(1,1)}x^2y^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值.

解：根据曲线积分与路径无关，
$$y=y\varphi'(x)\Rightarrow\varphi'(x)=2x^2\Rightarrow\varphi(x)=\frac{2}{3}x^3+C\Rightarrow\varphi(x)=\frac{2}{3}x^3+1$$
原函数为: $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y^2+\frac{1}{2}y^2$
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}x^2y^2dx+y\varphi(x)dy=(\frac{1}{3}x^3y^2+\frac{1}{2}y^2)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{5}{6}$$

(2) Σ为有向曲面 $z=x^2+y^2\quad(0\le z\le 1)$，$\sum$ 的方向为外侧，计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}xdydz+ydxdz+dxdy$.

解：补充Σ1: z=1(方向,上侧),利用高斯公式:
$$\iint_{\Sigma}=\iint_{\Sigma+\Sigma1}-\iint_{\Sigma1}=2\iiint_V dxdydz-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz-\pi=0$$

五、应用题:（每小题 8 分，共 16 分）

(1) 在第一卦限内作椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小，求此切平面的切点， 并求此最小体积.

解 现将问题化为求函数 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最小值的问题，或求函数 $f(x, y, z)=xyz$ 在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值的问题.

作辅助函数 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$.

令 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$， 解方程组得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

于是，所求切点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{y}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，此时最小体积为 $V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

解:现将问题化为求函数 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最小值的问题，或求函数．或求 $f=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的最大值的问题．作辅助函数

$F=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ ， 令 $\begin{cases}yz+\frac{2\lambda x^2}{a^2}=0\\ xz+\frac{2\lambda y^2}{b^2}=0\\ xy+\frac{2\lambda z^2}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt{3}}\\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}\end{cases}$

于是，所求切点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，此时最小体积为 $V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

(2) 某曲线经过原点， 且在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$， 求此曲线的方程.

解： $y'=2x+y, y(0)=0$

$y'-y=2x\Rightarrow y=Ce^x-2x-2\Rightarrow y=2(e^x-x-1)$

六、证明题：（每小题 7 分，共 14 分）

(1) 设 $a_n>0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，

求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\arctan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$ 绝对收敛 $(0<\lambda<\frac{\pi}{2}$ 为常数).

证明：首先证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛. （$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}\le\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k$）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(narc\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}}{a_{2n}}=\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{arc\tan\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}}=\lambda.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(narc\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(narc\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$$

(2) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中：函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 都具有二阶连续导数，

求证：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

证明：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

数二期末模拟试题(二)

一、选择题：(每小题 3 分，共 15 分)

(1)方程 $y^2+z^2-4x+8=0$，表示(D).

(A)单叶双曲面； (B)双叶双曲面； (C)锥面； (D)旋转抛物面.

(2)设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ (A)

(A) $\frac{F_1-F_3}{F_2-F_3}$ (B) $\frac{F_2-F_1}{F_2-F_3}$ (C) $\frac{F_1+F_3}{F_2-F_3}$ (D) $\frac{F_1-F_3}{F_2+F_3}$

(3) 函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1,2)处,沿着此抛物线在该点偏向 x 轴正向的切方向的方向导数为(A)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$

(4) $\int_0^1 dx\int_1^x e^{-y^2}dy=$(A)

(A) $\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$ (B) $\frac{1}{2}(e-1)$ (C) $\frac{1}{2}(e+1)$ (D) $\frac{1}{2}(e^{-1}+1)$

(5)若 y_1 和 y_2 是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ _________ B __________.

(A)是该方程的通解； (B)是该方程的解；

(C)是该方程的特解； (D)不一定是方程的解.

二、填空题(每小题3分，共15分)

(1) 已知有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度为 6, 方向余弦为 $-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}$,P_1 点的坐标为 $(-3,2,5)$,则 P_2 点的坐标为 $(-7,4,9)$ __________

(2)曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(-1,2,0)$ 处的切平面方程为____ $x+y-1$ ___=0

(3)点 M(-3，4，-5)到 YOZ 平面的距离为___3_____.

(4)设 $f(x)=\begin{cases}-\pi,-\pi<x<0\\3x^2+1,0\le x\le\pi\end{cases}$，且以 2π 为周期，f(x)的付氏级数在 x =0 处收敛于 $\frac{1-\pi}{2}$.

(5)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛区间是 $[-1,0)$

三、计算题：(每小题8分，共24分)

1.设函数 $Q(x,\ y)$ 在 xoy 平面上具有一阶连续偏导数,积分曲线 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 t,恒有 $\int_{(0,0)}^{(1,\,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(t,\,1)}2xydx+Q(x,y)dy$,求 $Q(x,y)$.

解:根据积分曲线与路径无关, $Q_x(x,y)=2x\Rightarrow Q(x,y)=x^2+C(y)$

由于 $\int_{(0,0)}^{(1,\,t)}2xydx+[x^2+C(y)]dy=\int_0^t[1+C(y)]dy$

$\int_{(0,0)}^{(t,\,1)}2xydx+[x^2+C(y)]dy=\int_0^1 C(y)dy+2\int_0^t xdx$

根据 $\int_{(0,0)}^{(1,\,t)}2xydx+[x^2+C(y)]dy=\int_{(0,0)}^{(t,\,1)}2xydx+[x^2+C(y)]dy$

$$\int_0^t [1+C(y)]dy=\int_0^1 C(y)dy+2\int_0^t xdx \Rightarrow 1+C(t)=2t \Rightarrow C(x)=2x-1$$

所以 $Q(x,y)=x^2+2x-1$

(2)求曲面积分: $I=\iint\limits_{\Sigma} yzdzdx+(z+1)dxdy$, 其中Σ是面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 z≥0 的部分

解：设 Σ_1 为 $x^2+y^2=4, z=0$ (下侧)，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma 1} -\iint\limits_{\Sigma 1} =2\iiint_{\Omega} dv-\iint\limits_{\Sigma 1} 1dxdy=\frac{32}{3}\pi+4\pi=\frac{44}{3}\pi$$

(3) 求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

解：特征方程为 $r^2+5r+6=0$ 则 $r_1=-2, r_2=-3$，则齐次方程的通解为 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

设特解为 $y^{*}=ae^{-x}$,代入方程，比较系数得 $a=1$

所以通解为： $y=c_1e^{x}+c_2e^{5x}$ $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}+e^{-x}$

四、应用题：(每小题10分，共30分)

(1)在 xoy 平面上求一点,使它到三直线 x=0,y=0 及 $x+2y-16=0$ 的距离的平方和为最小.

解：设所求点为(x, y)，即使 $S=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2$ 最小，

$$\begin{cases} 2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0 \\ 2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{16}{5} \end{cases}$$

(2)求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 夹在两曲面 $x^2+y^2=y,\ \ x^2+y^2=2y$ 之间的面积.

解： $$\iint\limits_{\Sigma} 1ds=\iint_{x^2+y^2\le y}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}dxdy=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le y}dxdy=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

(3)在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点P(x, y)处的曲率(曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$)等于此曲线在该点的法线段PQ长度的倒数(Q是法线与x轴的交点),且曲线在点(1, 1)处的切线与x轴平行.

解：设曲线方程为y=f(x),根据题意,过点P(x, y)处的法线方程为： $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$,

与x轴的交点Q为 $(x+y'y,0)$, PQ长度： $\sqrt{(y'y)^2+y^2}=y\sqrt{1+y'^2}$, 所以

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow \frac{y''}{1+y'^2}=\frac{1}{y}, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0,$$

$$\int\frac{y''}{1+y'^2}dy=\int\frac{1}{y}dy \Rightarrow \arctan y'=\ln Cy$$, 利用初始条件 $C=1, y'=\ln y \Rightarrow \int\frac{dy}{\ln y}=x+C$

//////////////

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\Rightarrow\frac{y''}{1+y'^2}=1\Rightarrow\arctan y'=x$$
$$\Rightarrow\arctan y'=x+C\Rightarrow y=-\ln\cos(x-1)+C_2$$
$$\Rightarrow y=1-\ln\cos(x-1)$$

五、证明题：（每小题8分，共16分）

（1）证明：变换 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+3y\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

证明:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+3\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial z}{\partial u}]+\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial z}{\partial v}]=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial z}{\partial u}]+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial z}{\partial v}]=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial z}{\partial u}]+3\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial z}{\partial v}]=-2[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}]+3[\frac{\partial z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}]$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$0=6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=6\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

可变为方程：$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$

(2) 设 S_n 表示正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项之和，试证：[1]若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ 发散；[2]若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明：[1]]若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty}S_n=s>0$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ 的通项极限不为 0，发散；

[2]]若$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

数二期末模拟试题(二)

一、填空题：(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 设$|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, 且$\vec{a}\perp\vec{b}$, 则$|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=$ ______24_______. .

(2) 一边长为a 正方形薄板垂直没入水中，其中一边与水面(比重为 1)齐平，则板一侧所受压力为____1_________

(3) $u=xy^2$ 在点$M_0(1,-1)$ 处从M_0 指向$M_1(4,4)$ 的方向导数为___$-\dfrac{7}{\sqrt{34}}$______.

(4) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ 的和函数为___xe^x________.

(5) 求全微分$(3y+e^x)dx+(3x-\cos y)dy=d$ ____$(3xy+e^x-\sin y)$______.

二、选择题：(每小题 3 分，共 15 分)

(1) 由曲线$y=\ln x$ 与$x=e$ 及$y=0$ 所围成平面图形的面积是(D).

(A) $\dfrac{2}{3}$； (B) $\dfrac{3}{2}$； (C) 1； (D) e.

(2) 设$I=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$, 交换积分次序得$I=$ (C).

(A) $\int_0^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$； (B) $\int_0^1 dy\int_{-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^4 dy\int_{-1}^{2}f(x,y)dx$； (D) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

(3) 二元函数$\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$(0,0)$处(C).

(A) 连续，偏导存在； (B) 连续，偏导不存在；

(C) 不连续，偏导存在； (D) 不连续，偏导不存在.

(4) 若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于S, 则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}-a_{n+2})$ 收敛于 (B).

(A) $S+a_1$； () $S+a_2$； (C) $S+a_1+a_2$； (D) $S+a_2-a_1$.

(5) 微分方程$\cos^2 x\cdot y'+y=\tan x$ 的通解是(A).

(A) $y=\tan y-1+Ce^{-\tan x}$； (B) $y=\tan y-1-Ce^{-\tan x}$；

(C) $y=-\tan y+1+Ce^{-\tan x}$； (D) $y=\tan y-1+Ce^{\tan x}$.

三、计算题：(每题 7 分，共 28 分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$；

解：$\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

(2) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ 的收敛区间；

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=1$

当$x=-3$, $x=1$时, 对应的级数收敛, 因而收敛区间为$[-3,1]$.

(3) 求二阶非齐次方程 $y''+2y'+3y=3x+5$ 的通解；

解：特征方程为 $r^2+2r+3=0$ 则 $r_1=-1\pm\sqrt{2}i$，则齐次方程的通解为 $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

设特解为 $y^{\bullet}=ax+b$，代入方程，比较系数得 $3ax+2a+3b=3x+5\Rightarrow a=b=1$

故 特解 $y^{\bullet}=x+1$

所以通解为： $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)+x+1$

(4) 判定直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$ 与平面 $\pi:x+4y-z-1=0$ 的位置关系，若相交则求出交点与夹角.

解：直线的方向向量 $\vec{n}_1=(1,-2,2)$，平面的法向量 $\vec{n}_2=(1,4,-1)$. 根据内积 $\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2=-9\neq 0$，二者相交. 连立方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2},x+4y-z-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{9},y=-\dfrac{2}{9},z=-\dfrac{16}{9}$

$$\sin\theta=\frac{\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

四、解答题：（每题 8 分，共 24 分）

(1) 求曲面 $z=x\,f(\dfrac{y}{x})$ 的所有切平面均通过的那一点，写出公共交点坐标.

解：令 $F=x\,f(\dfrac{y}{x})-z$，$\vec{n}=(f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x}),f'(\dfrac{y}{x}),-1)$，通过 (x, y, z) 的切平面：

$$(f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}))(X-x)+f'(\frac{y}{x})(Y-y)-1(Z-z)=0$$

$$(f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x}))X+f'(\frac{y}{x})Y-Z=0$$

该方程均通过坐标原点 (0, 0, 0).

(2) 求一平面薄片所占的区域由不等式 $x^2+y^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2\le 2Rx$ 所确定，其上每一点的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，试求该薄片的质量.

解：根据对称性 $m=2\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$，D 是由不等式 $x^2+y^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2\le 2Rx$，y=0 确定，两圆的交点 $(\dfrac{R}{2},\dfrac{\sqrt{3}R}{2})$. 直线 $y=\sqrt{3}x$ 将 D 分成两部分.

$$m=2\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^R r^3dr+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^3dr=(\frac{2\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{8})R^4$$

(3) 在第一象限有曲线过点 $(4,1)$，由线上任一点 $P(x,y)$ 向 x 轴，y 轴作垂线，垂足分别为 Q 及 R，又曲线在点 P 处的切线交 x 轴于 T，若使长方形 $OQPR$ 和三角形 PQT 有相同的面积，求曲线的方程.

解：设曲线方程为 y=y(x)，根据几何条件可以得到

$$|PR||PQ|=\frac{1}{2}|PT||PQ|\Rightarrow 2|PR|=|PT|$$

直线 PT 的方程为$v-y=y'(u-x)$，则 T 点坐标为：$(x-\frac{y}{y'},0)$，$P(x,y),R(0,y)$，$Q(x,0)$，则$2|x||y'|=|y|$. 下面解方程：

（1） $2xy'=y\Rightarrow y^2=Cx$，根据初值(4, 1)得到$C=\frac{1}{4},\Rightarrow y^2=\frac{1}{4}x$

（2） $2xy'=-y\Rightarrow y^2=Dx^{-1}$，根据初值(4, 1)得到$C=4,\Rightarrow y^2x=4$

六、证明题：（每题 9 分，共 18 分）

(1) 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=1, f''(0)=2$. 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛.

证明： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=1+x^2+o(x^2)$（偶函数，$f'(0)=0$）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1$$

根据$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1]$ 绝对收敛。

(2) 设函数 $f(u,v)$ 可微，证明：由方程 $f(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$（$a,b,c$ 为常数）.

证明：方程两边对 x 求导： $f_1(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+f_2(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{cf_1}{af_1+bf_2}$

方程两边对 y 求导： $f_1(a\frac{\partial z}{\partial y})+f_2(c-b\frac{\partial z}{\partial y})=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{cf_2}{af_1+bf_2}$

所以$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{acf_1}{af_1+bf_2}+\frac{bcf_2}{af_1+bf_2}=c$