

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

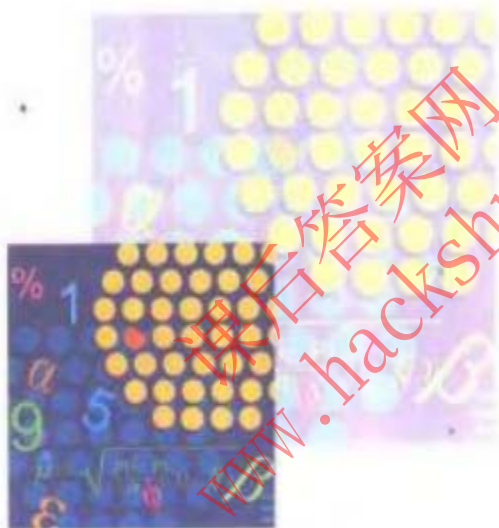
课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com



普通高等教育“九五”国家级重点教材



概率论与数理统计 习题与解答

蒯诗松 周纪芴 编著

 中国统计出版社
China Statistics Press

责任编辑 徐 颖 吕 军

封面设计: 北京大路策划咨询有限公司



国家级重点统计教材 高等院校统计专业“九五”规划教材

时间序列分析

多元统计分析

经济计量学教程

质量管理统计方法

统计学原理

贝叶斯统计

概率论与数理统计

非参数统计

国民经济统计学

市场调查与分析

概率论与数理统计习题与解答

宏观经济统计分析

ISBN 7-5037-3392-6



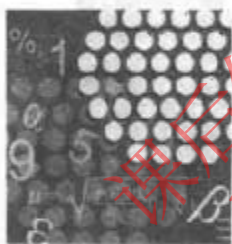
9 787503 733925 >

ISBN 7-5037-3392-6/O · 38

定价 30.00元



普通高等教育“九五”国家级重点教材



概率论与数理统计 习题与解答

邵诗松 周纪梦 编著

 中国统计出版社
China Statistics Press

概率论与数理统计习题与解答

~~~~~

## 序 言

~~~~~

为经济类统计专业本科生编写的教科书《概率论与数理统计》第二版把教材与习题分册出版, 这里提供给大家的是为教材配套的习题与解答册。

第二版把习题分节配置, 针对性加强了, 习题数量也增加了, 部分习题给出了较为详细的解答, 另外每节又加写了“概要”。这样全书七章共有三十八节, 每节都按概要、习题、解答的次序编排, 便于阅读和选用。假如能把这个分别如同教材那样从头到尾阅读一遍, 可以使你对概率论与数理统计更为亲近, 因为这可以加深你对这门课的认识, 无论在它的独特的思维方式、计算技巧, 还是在应用的面广量大上都可以留下深刻的印象, 从而会使你更热爱这门学科。

为什么对部分习题要给出较为详细的解答呢? 我们的想法很简单, 就是为了从各种角度给出示范, 告诉学生应该如何思考、分析和表述。初学这门课做习题时常会犯愁, 缺乏思路, 难以下手, 有时想好了也表达不清楚, 有时做完习题也不敢说确实做对了, 这些都反映了学生尚不习惯概率论与数理统计独有的思维方式。这时怎么办? 只有让学生多听老师怎么讲, 多看别人怎么做, 多与同学讨论。这一过程就象学下棋, 学会下棋的规则还不一定能成为优秀的棋手, 除了自己多与别人下棋外, 看别人如何下棋, 甚至多看棋谱对你提高棋艺都是必不可少的。我们为部分习题作出较为详细的解答, 决不是代替学生去思

考,而是想帮助你思考,使你一进门就能抓住问题的要害,解开随机世界的秘密。假设你自己不去独立思考,而把这些解答照搬照抄,那对你的帮助就太小了,很难成为随机世界探秘的能手,因此独立思考,独立去做才是基本要求。

我们如此编写习题与解答也是一种尝试,能否在教学过程中收到实效,受到广大师生和读者的欢迎还有待于实践的检验,很希望听到大家的批评和建议。我们共同的目的是为了不断提高《概率论与数理统计》的教与学的质量。我们十分感谢国家统计局统计教育中心和中国经济出版社给我们一次宝贵的尝试机会,他们为此提出了很多很多的建议,使本书得以新的面貌出版。

薛诗松 周纪梦

2000年7月

概率论与数理统计习题与解答

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1.1 随机事件及其运算	(1)
§ 1.2 事件的概率	(8)
§ 1.3 概率的性质	(17)
§ 1.4 独立性	(23)
§ 1.5 条件概率	(35)
第二章 随机变量及其概率分布	(47)
§ 2.1 随机变量	(47)
§ 2.2 离散随机变量	(53)
§ 2.3 连续随机变量	(65)
§ 2.4 方差	(81)
§ 2.5 随机变量的其它特征数	(92)
第三章 多维随机变量	(97)
§ 3.1 多维随机变量及其联合分布	(97)
§ 3.2 随机变量的独立性	(111)
§ 3.3 多维随机变量的特征数	(121)

* § 3.4	条件分布与条件期望	(134)
§ 3.5	中心极限定理	(146)
第四章	统计量及其分布	(155)
§ 4.1	总体与样本	(155)
§ 4.2	统计量与抽样分布	(164)
§ 4.3	次序统计量及其分布	(170)
第五章	参数估计	(181)
§ 5.1	矩法估计	(181)
§ 5.2	点估计优劣的评价标准	(184)
§ 5.3	极大似然估计	(189)
§ 5.4	区间估计	(196)
§ 5.5	单侧置信限	(204)
§ 5.6	比率 p 的置信区间	(207)
* § 5.7	贝叶斯估计	(211)
第六章	假设检验	(222)
§ 6.1	假设检验的概念与步骤	(222)
§ 6.2	正态总体参数的假设检验	(225)
§ 6.3	比率 p 的检验	(234)
* § 6.4	泊松分布参数 λ 的检验	(239)
§ 6.5	检验的 p 值	(241)
§ 6.6	广义似然比检验	(243)
§ 6.7	χ^2 拟合优度检验	(246)
§ 6.8	正态性检验	(254)
第七章	方差分析和回归分析	(257)
§ 7.1	单因子方差分析	(257)
§ 7.2	多重比较	(264)
* § 7.3	方差齐性检验	(267)
§ 7.4	一元线性回归	(270)
§ 7.5	可化为一元线性回归的曲线回归	(279)

第一章

随机事件及其概率

§ 1.1 随机事件及其运算

概 要

1. 随机现象: 在一定条件下, 并不总是出现相同结果的现象。

随机试验: 可重复的随机现象。

基本结果 ω : 随机现象的最简单的结果, 它将是统计中抽样的基本单元, 故又称样本点。

基本空间 Ω : 随机现象所有基本结果的全体。

2. 事件与集合的对应关系。

事件语言	集合语言
事件 A	Ω 的子集 $A, A \subset \Omega$
必然事件 Ω	Ω 的最大子集 Ω .
不可能事件 ϕ	空集 $\phi = \Omega$ 的最小子集.
A 的对立事件 $\bar{A}$	A 的余集 $\bar{A}$
事件 B 包含事件 A	集合 B 包含集合 $A, B \supset A$ 或 $A \subset B$
事件 A 与 B 相等,	集合 A 与 B 相等, $A \supset B, B \supset A$
事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 互不相交, $AB = \phi$
事件 A 与 B 的并	集合 A 与 B 的并, $A \cup B$
事件 A 与 B 的交	集合 A 与 B 的交, $A \cap B = AB$
事件 A 对 B 的差,	集合 A 对 B 的差, $A - B$

习 题

1 写出下列随机现象的基本空间

- (1) 抛三枚硬币.
- (2) 掷三颗骰子.
- (3) 连续抛一枚硬币, 直至出现正面为止. (提示: 记正面为 1, 反面为 0)
- (4) 在某十字路口每小时通过的机动车辆数.
- (5) 某城市一天中诞生的婴儿数.
- (6) 下一个交易日的上海证券交易所的综合指数.

2 在做三枚硬币的试验中写出下列事件所含的基本结果.

- A = “至少出现一个正面”
 B = “最多出现一个正面”
 C = “恰好出现一个正面”
 D = “出现三面相同”

3 某书在书架上有五个复本, 其中两本(编号为 1 与 2)为第一版, 另三本(编号为 3, 4 与 5)为第二版, 一学生要阅读此书第二版.

- (1) 该学生最多两次就翻到此书第二版的可能基本结果有那些?
(2) 事件 A = “编号为 5 的书最多两次被翻出” 所含的基本结果有那些?

- 4 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个相同的球。若从中任取三个球, 请写出这个随机试验的基本空间。计算基本结果总数。
- 5 把编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球随机放入编号为 a, b, c, d, e 的五个盒子, 每个盒子至少能放五个球, 请算出这个随机试验的基本空间含有多少个基本结果。
- 6 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八张卡片中任取一张。设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”; 事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”; 事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”。请用基本结果表示如下事件:
 $A \cup B, AB, \bar{B}, A - B, B - A, BC, \overline{B \cup C}, (A \cup B)C$
- 7 一位工人生产四个零件, 以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是不合格品, $i = 1, 2, 3, 4$ 。请用诸 A_i 表示如下事件:
(1) 全是合格品;
(2) 全是不合格品;
(3) 至少有一个零件是不合格品;
(4) 仅仅有一个零件是不合格品。
- 8 请叙述下述事件的对立事件。
(1) A = “掷二枚硬币, 皆为正面”;
(2) B = “射击三次, 皆命中目标”;
(3) C = “加工四个产品, 至少有一个正品”。
- 9 某建筑公司在三个地区各承建一个项目, 定义如下三个事件:

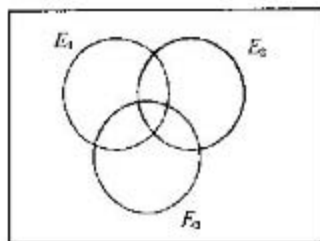
E_i = “地区 i 的项目可按合同期完成”, $i = 1, 2, 3$

这三个事件间的关系可用下面维恩图表示。

用维恩图上的阴影区域分别表示下列事件。

A = “至少一个项目可按期完成”;

B = “所有项目都可按期完成”;



C = “没有一个项目可按期完成”;

D = “仅仅地区 1 的项目可按期完成”;

E = “三个项目中只有一项可按期完成”;

F = “或者仅地区 1 的项目按期完成或者另二个项同时按期完成”。

- 10 事件是集合, 事件的运算性质完全与集合的运算性质相同。现罗列如下, 请用维恩图来验证这些性质(提示: 等式两端各画一张维恩图):

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$ (并的交换律)

$AB = BA$ (交的交换律)

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (并的结合律)

$(AB)C = A(BC)$ (交的结合律)

(3) 分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC$ (交对并的分配律)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (并对交的分配律)

$A(B - C) = AB - AC$ (交对差的分配律)

(4) 对偶原理: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

习题解答

- 1 (1) $\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ (其中 0 表示反面, 1 表示正面)

(2) $\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(3) $\Omega = \{(1), (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \dots\}$

(4) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

(5) $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$(5) \Omega = \{x : x \geq 100\}$$

$$2 \quad A = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$B = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$C = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$D = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$3 \quad (1) \{(3), (4), (5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$(2) \{(5), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

$$4 \quad \Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}; \binom{5}{3} = 10, \text{这是从 5 个不同元素中任取 3 个的组合数.}$$

5 1 号球可放入 a, b, c, d, e 五个盒子任一个, 故有 5 种放法, 2 号球也类似有 5 种放法, 其它三个球也都各有 5 种放法, 五个球放完后共有 $5^5 = 3125$ 种放法。

6 由于 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 3, 5, 7\}$, 所以有 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}; A \cap B = \{2, 4\}; \bar{B} = \{1, 3, 5, 7\} = C; A - B = \{1, 3\}; B - A = \{6, 8\}; BC = \emptyset; B \cup \bar{C} = \Omega = \phi; (A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$ 。

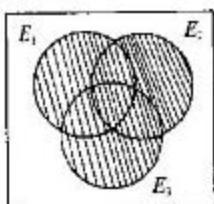
$$7 \quad (1) \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4; \quad (2) A_1 A_2 A_3 A_4; \quad (3) A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4;$$

$$(4) A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4.$$

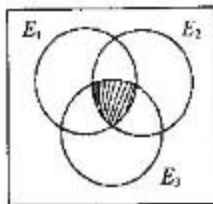
8 A = “掷二枚硬币, 至少出现一个反面”; B = “射击三次, 至少有一次没命中”; C = “加工四个产品, 皆为次品”。

9 事件 A, B, C, D, E, F 的维恩图如下:

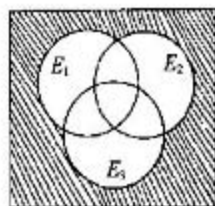
$$A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$



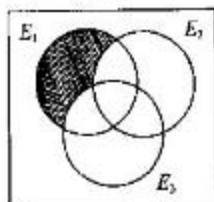
$$B = E_1 E_2 E_3$$



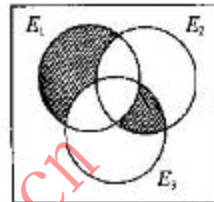
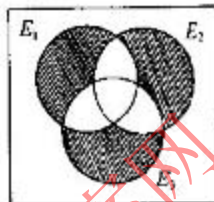
$$C = \bar{A}$$



$$D = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3$$



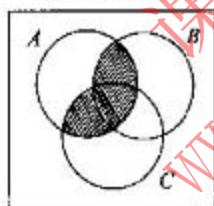
$$E = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \cup \bar{E}_1 E_2 E_3 \cup \bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3 \quad F = E_1 \bar{E}_2 \bar{E}_3 \cup \bar{E}_1 E_2 E_3$$



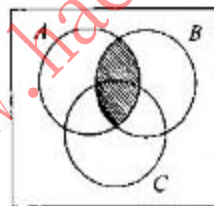
10 交换律与结合律的维恩图略去。

(3) 分配律的维恩图

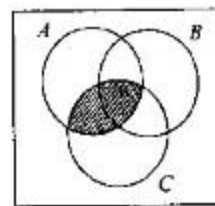
交对并的分配律:



$$A(B \cup C)$$



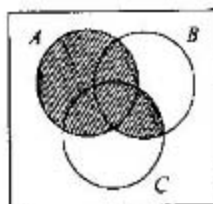
$$AB$$



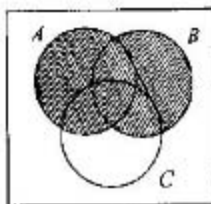
$$\cup$$

$$AC$$

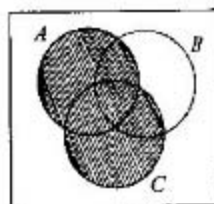
并对交的分配律:



$$A \cup (B \cap C)$$

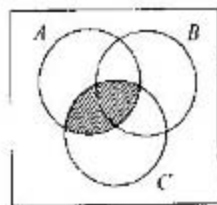
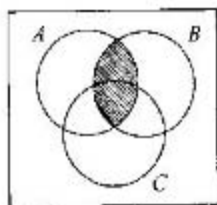
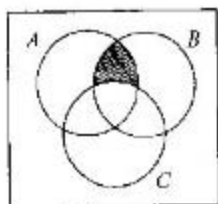


$$(A \cup B) \cap$$



$$(A \cup C)$$

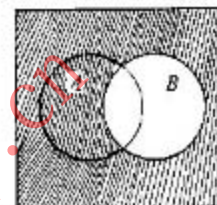
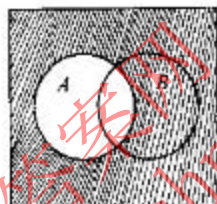
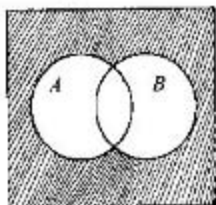
交对差的分配律:



$$A(B - C) = AB - AC$$

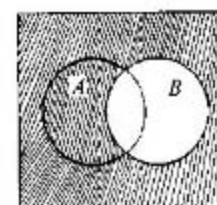
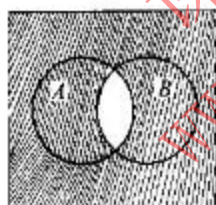
(4) 对偶原理的维恩图

并的对立等于对立的交:



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

交的对立等于对立的并:



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

§ 1.2 事件的概率

概 要

随机事件的发生带有偶然性,但其发生的可能性是可以度量的,概率就是这种度量的最好尺度。它的公理化定义如下:

定义 1.2.1 在一个随机现象中,用来表示任一个随机事件 A 发生可能性大小的实数称为该事件的概率,记为 $P(A)$,并规定

- (1)非负性公理 对任一事件 A ,必有 $P(A) \geq 0$ 。
- (2)正则性公理 必然事件的概率 $P(\Omega) = 1$ 。
- (3)可加性公理 若 A_1 与 A_2 是两个互不相容事件,则有
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

上述公理化定义是用三条公认的事实来刻画概率的本质,但它没有告诉人们如何确定概率,如今已有三种确定概率的方法,不管那种方法,只有满足上述定义中的三条公理才能说它是概率,这三种确定概率的方法是:

1. 古典方法 它的基本思想是:

- (1)所涉及的随机现象只有有限个基本结果,譬如, n 个。
- (2)每个基本结果出现的可能性是相同的(等可能性)
- (3)若被考察的事件 A 含有 k 个基本结果,则事件 A 的概率就是

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中含基本结果的个数}}{\Omega \text{ 中基本结果总数}}$$

2. 频率方法 它的基本思想是:

- (1)与考察事件 A 有关的随机现象是允许进行大量重复的。
- (2)若在 N 次重复试验中事件 A 发生 k_N 次,则事件 A 发生的频率为

$$P_N^*(A) = \frac{k_N}{N} = \frac{\text{事件 } A \text{ 发生次数}}{\text{重复试验次数}}$$

(3)随着重复次数 N 的增加,频率 $P_N^*(A)$ 将呈现稳定状态,频率的稳定值就是概率 $P(A)$ 。

(4)在现实世界中,无法把一个试验无限重复下去,常在 N 较大时,将频率 k_N/N 作为概率 $P(A)$ 的估计值,甚至就当作概率使用。

3. 主观方法 它是人们根据经验对某事件 A 发生可能性所给出的个人信念, 这里的经验可以是自己的经验、别人的经验、或历史资料, 对它们进行整理加工, 确认满足三条公理后就可认为是概率。

习 题

1 对下述五个事件发生可能性的文字描述找出相应的数值答案:

文字描述	数值答案
(1) 事件 A 发生与不发生的可能性一样	(a) 0
(2) 事件 B 很可能发生, 但不一定发生	(b) 0.1
(3) 事件 C 肯定不发生	(c) 0.5
(4) 事件 D 能够发生, 但不大可能	(d) 0.9
(5) 事件 E 无疑会发生	(e) 1.0

2 掷两颗骰子, 求下列事件的概率

- (1) 事件 A = “点数之和为 7”。
- (2) 事件 B = “点数之和不超过 5”。
- (3) 事件 C = “点数之和为偶数”。

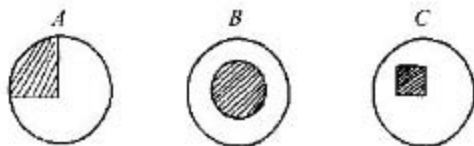
3 从 52 张扑克牌中任取 4 张, 求下列事件的概率:

- (1) 全是红色。
- (2) 二张红色, 二张黑色。
- (3) 二张黑桃。
- (4) 同花。
- (5) 没有二张同一花色。
- (6) 同花顺。
- (7) 二对 (如二张 A 和二张 K 等)。
- (8) 四条 (四张牌形相同, 如 4 张 A 等)。
- (9) 一对。
- (10) 四张同色。

4 设 5 个产品中有 3 个正品、2 个次品。从中随机抽取 2 个, 求抽出的 2 个产品中全是次品、仅有一个次品和没有次品的概率各为多少?

- 5 设 5 个产品中有 3 个正品、2 个次品。从中有放回地随机抽取 2 个, 求抽出的 2 个产品全是次品, 仅有一个次品和没有次品的概率各为多少?
- 6 从 N 个自然数 $1, 2, \dots, N$ 中随机抽出二个数, 问其中一个大于 K ($1 < K < N$), 另一个小于 K 的概率是多少?
- 7 抛两枚硬币, 至少出现一个正面的概率是多少?
- 8 十七世纪的意大利赌徒认为: 三颗骰子掷出的点数之和为 9 的概率与为 10 的概率是相等的。你的看法如何?
- 9 任取两个自然数, 求它们之和为偶数的概率。
- 10 把一个各面都涂上红色的立方体, 均分为一千个小立方体。把小立方体混乱后, 从中随机取出一个小立方体。问四面涂有红色、三面涂有红色、二面涂有红色、一面涂有红色和没有一面涂有红色的概率各是多少?
- 11 一位姑娘把 6 根草握在手掌中, 只露出其头与尾, 然后请她的男友把 6 根头两两连结, 六根尾也两两连结。姑娘放开手后, 若六根草恰好连成一个环的话, 她就愿嫁给他。求姑娘愿嫁给他的概率。
- 12 把 r 个不同的球随机放入 n 个格子 (如箱子), 假如每个格子能放很多球, 每个球落入每个格子的可能性相同, 若 $n \geq r$, 求下列事件的概率。
(1) 事件 $A =$ “恰有 r 个格子中各有一球”,
(2) 事件 $B =$ “至少有一个格子有不少于二个球”。
- 13 求 r 个人中至少有二个人的生日相同的概率。当 $r = 10, 20, 30, 40, 50$ 时, 相应的概率各是多少? (提示: 把生日看作 365 个格子, 把人看作球)
- 14 若设一个人的生日是等可能地分布在 12 个月中, 求六个人的生日恰好集中在一月和二月内的概率。

- 15 若设一个人的生日是等可能地分布在 12 个月中, 求六个人的生日都在二个月内的概率。
- 16 有 15 人排队购买上海至北京的火车票。假如上海到北京的火车有三个不同的车次: 14 次、22 次、124 次。问有 8 人购买 14 次车票的概率是多少?
- 17 把十二个球随意放进三个箱子, 问第一个箱子里有三个球的概率是多少?
- 18 5 人在第一层进入八层楼的电梯, 假如每人以相同的概率走出任一层 (从第二层开始), 求此 5 人在不同层走出的概率是多少?
- 19 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中任取三个数。求三个数中最小数是 4 的概率和三个数中最大数是 4 的概率各为多少?
- 20 某人有二盒火柴, 各含 n 根。每次使用时他从任取的一盒中取一根。问他发现一盒已空而另一盒还有 r ($0 \leq r \leq n$) 根的概率是多少?
- 21 橱内有 10 双皮鞋, 从中任取 4 只。求其中恰好成二双、只有二只成双和没有二只成双的概率各为多少?
- 22 (几何概率) 一位射手射圆形靶, 他一定会射中, 但射在任一点的可能性与射在任何其它点的可能性相同, 问该射手命中下面三个阴影区域 A、B、C 的概率各是多少?



- 23 用主观方法确定: 大学生中戴眼镜的概率是多少?
- 24 用主观方法确定: 学生考试作弊的概率是多少?

25 用主观方法确定: 自己通过国家四级英语考试的概率是多少?

习题解答

1 (1) $P(A)=c$; (2) $P(B)=d$; (3) $P(C)=a$; (4) $P(D)=b$;
(5) $P(E)=e$.

2 (1) $6/36$; (2) $10/36$; (3) $18/36$

3 (1) $\binom{26}{4} / \binom{52}{4} = 0.055222$; (2) $\binom{26}{2} \binom{26}{2} / \binom{52}{4} = 0.390156$;
(3) $\binom{13}{2} \binom{39}{2} / \binom{52}{4} = 0.008896$; (4) $4 \times \binom{13}{4} / \binom{52}{4} = 0.010564$;
(5) $13^4 / \binom{52}{4} = 0.105498$; (6) $44 / \binom{52}{4} = 0.000163$; (7) 要抽出二对可经如下三步实现: 先从 13 种牌形中任取二种, 注意, 任一种牌形各有 4 张不同花色; 然后从取出的一种牌形中任取二张, 最后再从取出的另一种牌形中任取二张, 所得的四张牌恰好组成二对. 相应概率为 $\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} / \binom{52}{4} = 0.010372$; (8) $13 / \binom{52}{4} = 0.000048$; (9) 要抽出一对可经如下四步实现: 先从 13 种牌形中任取一种, 它含有 4 张不同花色的牌; 然后从这 4 张中任取二张; 接着在余下 48 张牌中任取 1 张, 同时把这一种牌形的另外三张也随之剔去; 最后在余下的 44 张牌中任取一张, 这样所得的四张牌仅含有一对. 相应概率为 $\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{48}{1} \binom{44}{1} / \binom{52}{4} = 0.608499$; (10) $2 \times \binom{26}{4} / \binom{52}{4} = 0.110444$.

4 $\binom{2}{2} / \binom{5}{2} = 0.1$; $\binom{2}{1} \binom{3}{1} / \binom{5}{2} = 0.6$; $\binom{3}{2} / \binom{5}{2} = 0.3$.

5 $2^2/5^2=4/25$; $3 \times 2 \times 2/5^2=12/25$; $3^2/5^2=9/25$, 这里第二个概率是“仅有一个次品”的概率, 考虑到返回抽样只能一次抽取一个. 抽取二次就有先后之别, 要讲究次序. 如今“仅有一个次品”共有 $3 \times 2=6$ 个不同基本结果,

再讲究次序就有 $6 \times 2 = 12$ 个不同的基本结果。

$$6 \cdot \binom{k-1}{1} \binom{N-k}{1} \bigg/ \binom{N}{2} = \frac{2(k-1)(N-k)}{N(N-1)}.$$

7 $3/4$ 。

8 这两个事件的概率不相等, 掷三颗骰子, “点数之和为 9” 共含 25 个基本结果, “点数之和为 10” 共含 27 个基本结果, 故有 $25/216 < 27/216$ 。

9 任取两个自然数共有四种情况: (奇, 奇), (奇, 偶), (偶, 奇), (偶, 偶), 按对称性, 这四种情况发生的可能性是相同的。取出的两个自然数之和为偶数只有其中二种情况发生才可导致, 故该事件概率为 $1/2$ 。

10 $P(\text{四面涂有红色}) = 0$; $P(\text{三面涂有红色}) = 8(\text{只角})/1000 = 1/125$; $P(\text{二面涂有红色}) = 12(\text{条棱}) \times 8/1000 = 12/125$; $P(\text{一面涂有红色}) = 6(\text{个面}) \times 8^2/1000 = 48/125$; $P(\text{没有一面涂有红色}) = 8^3/1000 = 64/125$ 。

11 “六根尾两两连结”可随意进行, 不会影响成环, 故我们只需考虑“六根头两两连结”可能出现的情况。“六根头两两连结”共有 $\binom{6}{2} \binom{4}{2} = 90$ 种不同结果; 而要成环必需有选择地打好三个结。第一个结共有 6×4 种不同结果, 第二个结只有 2 种不同结果, 第三个结只有 1 种结果。故所求概率为 $6 \times 4 \times 2 \times 1/90 = 8/15$ 。

12 (1) 由于每个球都可落入 n 个格子中的任一个, 所以 r 个不同的球放入 n 个格子共有 n^r 个基本结果。要使事件 A 发生可分两步进行, 第一步从 n 个格子中随机选出 r 个格子, 这有 $\binom{n}{r}$ 种选法; 第二步把 r 个不同球随机放入选出的 r 个格子, 使每个格子各有一球, 共有 $r!$ 个放法, 依乘法原则, 事件 A 共含 $\binom{n}{r} \times r!$ 个基本结果, 故 $P(A) = \binom{n}{r} \times r! / n^r$ 。(2) 事件 B 是事件 A 的对立事件, 故事件 B 所含的基本结果数为 $n^r - \binom{n}{r} \times r!$ 。所以 $P(B) =$

$$\left[n^r - \left(\frac{n}{r} \right) \times r! \right] / n^r = 1 - P(A).$$

13 把一年 365 天看作 $n=365$ 个格子, r 个人看作不同的球, 球放入那一个格子, 相应人的生日也就确定了, “ r 个人的生日至少有二人相同”等价于“ r 个不同球放入 n 个格子时至少有一个格子中有不少于二个球”。记这个事件为 B_r , 则由习题 1.2.12 可知,

$$P(B_r) = \frac{365^r - \left(\frac{365}{r} \right) r!}{365^r}$$

并且 $P(B_{10})=0.12$; $P(B_{20})=0.41$; $P(B_{30})=0.41$; $P(B_{40})=0.71$; $P(B_{50})=0.89$; $P(B_{60})=0.97$ 。这表明: 在 50 人的团体中至少有二人生日相同的概率为 0.97, 这是很有可能发生的事件。

14 把一年 12 个月看作 12 个格子, 6 个人看作 6 个球, 6 个人的生日分布共有 12^6 种结果, 而 6 个人的生日恰好集中在二月和二月内共有 2^6 种结果, 但其中含有 6 个人的生日集中在二月, 这二种结果不应含在所求事件之中, 故所求概率为 $(2^6 - 2)/12^6 = 0.2876 \times 10^{-4}$ 。这是一个小概率事件。

15 先从 12 个月中任取二个月份, 共有 $\left(\frac{12}{2} \right)$ 种取法, 随后的考虑与上一题类似, 所求事件的概率为 $\left(\frac{12}{2} \right) \cdot (2^2 - 2)/12^2 = 0.00137$ 。

16 这相当于把 15 个不同球放入 3 个格子, 求第一个格子 (14 次车) 恰有 8 个球的概率, 所有可能的基本结果共有 3^{15} 个, 要使所涉及事件发生可分二步进行, 第一步从 15 个不同球中随机取出 8 个放入第一格中, 共有 $\left(\frac{15}{8} \right)$ 种放法; 第二步把余下 7 个球随机地放入另外二个格子中, 共有 2^7 种放法, 依据乘法原理, 所涉及的事件共含有 $\left(\frac{15}{8} \right) \times 2^7$ 个基本结果, 故所求概率为 $\left(\frac{15}{8} \right) \times 2^7 / 3^{15} = 0.0574$ 。

17 类似于上一题的考虑, 所求概率为 $\left(\frac{12}{3} \right) \times 2^3 / 3^{12} = 0.2120$ 。

18 这相当于把 5 个不同球放入 7 个格子, 求其中 5 个格子各有一球的概率, 所有可能的基本结果共有 7^5 个. 要使所涉及事件发生可分二步进行: 第一步从 7 个格子中任取 5 个格子, 共有 $\binom{7}{5}$ 种取法; 第二步把 5 个不同球放入选出的 5 个格子中, 共有 $5!$ 种放法. 依据乘法原理, 所涉及事件共含有 $\binom{7}{5} \times 5!$ 个基本结果, 故所求概率为 $\left[\binom{7}{5} \times 5!\right] / 7^5 = 0.1499$.

19 从 10 个数中随机取 3 个的不同取法共有 $\binom{10}{3}$ 个, 这是所有可能的基本结果数, 要使取出的三个数中最小数是 4, 则 4 必含其中, 另二个数从 5, 6, 7, 8, 9 等 5 个数中任取 2 个. 所求概率为 $\binom{5}{2} / \binom{10}{3} = 1/12$. 类似地, 取出的三个数中最大数是 4 的概率为 $\binom{4}{2} / \binom{10}{3} = 1/20$.

20 为确定起见, 把两盒火柴分别记为甲盒与乙盒, 它们各有 n 根火柴. 当他发现甲盒已空, 乙盒还有 r 根时他已第 $n+1$ 次使用甲盒, 而乙盒已使用 $n-r$ 次, 共使用 $2n-r+1$ 次. 每次使用都是在甲、乙两盒任取一盒, 故有 2^{2n-r+1} 个基本结果. 要使事件“发现甲盒已空, 乙盒还有 r 根”发生, 必须在 $2n-r+1$ 次中使用中最后一次一定使用到甲盒, 而余下 $2n-r$ 次使用中有 n 次使用甲盒, 这相当于从 $2n-r$ 个任取 n 个的组合, 故“甲盒已空, 乙盒还有 r 根”发生的概率为 $\binom{2n-r}{n} / 2^{2n-r+1}$. 考虑到“乙盒已空, 甲盒还有 r 根”也是属所述事件, 由于对称性, 它的发生概率也是上述概率, 故“发现一盒已空而另一盒还有 r 根”的概率为 $2 \left[\binom{2n-r}{n} / 2^{2n-r+1} \right] = \binom{2n-r}{n} / 2^{2n-r}$.

21 从 10 双皮鞋中任取 4 只共有 $\binom{20}{4}$ 种不同取法, 记 $B_i = (i=0, 1, 2)$ 表示取出的 4 只鞋的成双数, 则 B_2 (恰好二双) 含有 $\binom{10}{2}$ 个基本结果; B_1 (只有二只成双) 含有 $\binom{10}{1} \binom{9}{2} 2^2$ 个基本结果, 这是因为要使 B_1 发生, 先选 10 双鞋中任取一双, 然后在余下 9 双中任取二双, 最后在取出的二双中各取一只, 这

样合并取得的 4 只鞋中只有二只成双; 类似地 B_0 (没有二只成双) 含有 $\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} 2^4$ 个基本结果, 于是所求概率分别为

$$P(B_1) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{3}{323}; P(B_2) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} 2^2}{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{96}{323}; P(B_0) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} 2^4}{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{224}{323}$$

22 把等可能性推广到区域上去, 用面积比、体积比等确定的概率称为几何概率, 在这个题目中, 阴影区域的面积与圆面积之比就可得到事件 A, B, C 的概率, 而阴影面积可用测量方法确定, 故本题的三个概率分别为

$$P(A) = 1/4; \quad P(B) = 1/4; \quad P(C) = 1/4\pi \approx 0.08$$

23 只要你在大学里学习过一段时间, 你对大学生中戴眼镜的比例就会有一定认识, 你可设计几个问题问自己, 譬如: 这个比例是否超过 50%? 若超过 50%, 那是否超过 75%? 若没超过 75%, 是否低于 62.5%? 若不超过 50%, 那是否低于 25%? ……这些问题会帮你最后确定大学生戴眼镜的主观概率。

24 与 25 可参照 23 题定出你的主观概率。

§ 1.3 概率的性质

概 要

定理 1.3.1 对任一事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

定理 1.3.2 不可能事件 ϕ 的概率为 0, 即 $P(\phi) = 0$ 。

定理 1.3.3 对 n 个互不相容事件 $A_1, \dots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

定理 1.3.4 对任意两个事件 A 与 B , 若 $A \supset B$, 则

$$(1) P(A - B) = P(A) - P(B)$$

$$(2) P(A) \geq P(B)$$

定理 1.3.5 对任意两个事件 A 与 B , 有

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$(2) P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

定理 1.3.7 对任意三个事件 A, B, C , 有

$$(1) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$(2) P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

习 题

1 抛四枚硬币, 至少出现一个正面的概率是多少?

2 假如近期内有如下分娩信息

分娩类型	分娩次数
单胞胎	41 500 000
双胞胎	500 000
三胞胎	5 000
四胞胎	100

随机地选一位健康的怀孕妇女, 请利用上述信息确定下列事件发生的概率的近似值。

- A. 她将分娩双胞胎。
- B. 她将分娩四胞胎。
- C. 她终生下多于一个婴儿。

3 某投资资讯公司对投资者的投资去向作了调查, 获得如下结果

外汇交易占 20%	高风险股票占 18%
短期债券占 15%	中等风险股票占 25%
中期债券占 10%	存银行占 7%
长期债券占 5%	

假如随机地选择一位投资者, 请确定下列事件的概率。

- A. 他将把资金存入银行。
- B. 他将把资金投入债券。
- C. 他的资金不会投入股票市场。

4 一批产品总数为 1000 件, 其中有 10 件不合格品, 现从中随机抽出 20 件, 问其中有不合格品的概率是多少?

5 有一颗不均匀的骰子, 假如这颗骰子出现偶数点的概率是出现奇数点的概率的二倍, 那末出现 1 点的概率是多少? 出现 2 点的概率是多少? 出现偶数点的概率是多少? 最多出现 3 点的概率是多少?

6 对任意两个事件 A 与 B , 证明: $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 。

7 某足球队在第一场比赛中获胜的概率是 $1/2$, 在第二场比赛中获胜的概率是 $1/3$, 如果在两场比赛中都获胜的概率是 $1/6$, 那么在这两场比赛中至少有一场获胜的概率是多少。

8 设事件 A 与 B 互不相容, 且 $P(A) = p, P(B) = q$, 求下列事件的概率: $P(AB), P(A \cup B), P(\bar{A} \bar{B})$ 。

9 设 $P(A) = p, P(B) = q, P(A \cup B) = r$, 求概率 $P(AB), P(A\bar{B}), P(\bar{A}B)$ 。

$$P(\overline{A \cup B}), P(A \cup \overline{B})$$

- 10 在 200 名学生中选修统计学的有 137 名, 选修经济学的有 50 名, 选修计算机的有 124 名。还知道, 同时选修统计与经济的学生有 33 名, 同时选经济与计算机的有 29 名, 同时选统计与计算机的有 92 名。三门课都选修的学生有 18 人。试求 200 名学生中有多少学生在这三门课中至少选修一门。
- 11 某城市有三种报纸 A, B, C 。该城市中有 60% 的家庭订阅 A 报, 40% 的家庭订阅 B 报, 30% 的家庭订阅 C 报。又知有 20% 的家庭同时订阅 A 报与 B 报, 有 10% 的家庭同时订阅 A 报和 C 报, 有 20% 的家庭订阅 B 报和 C 报, 有 5% 的家庭三份报都订阅。试求该城市中有多少家庭一份报也没订。
- 12 设 $P(A) \geq 0.8, P(B) \geq 0.8$, 证明 $P(AB) \geq 0.6$ 。
- 13 掷两颗骰子, 至少有一颗骰子的点数小于 3 的概率是多少?
- 14 掷三颗骰子, 出现的点数都小于 3 的概率是多少?
- 15 掷三颗骰子, 至少有一颗骰子的点数小于 3 的概率是多少?
- 16 对任意四个事件 A, B, C 和 D , 使用定理 1.3.7 的证明方法写出概率 $P(A \cup B \cup C \cup D)$ 的表达式。
- 17 对任意两个事件 A 与 B , 证明: $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$ 。
- 18 一个试验仅有四个互不相容的结果: A, B, C 和 D 检查下面各组概率是否是允许的。
- (1) $P(A)=0.38, P(B)=0.16, P(C)=0.11, P(D)=0.35$
- (2) $P(A)=0.31, P(B)=0.27, P(C)=0.28, P(D)=0.16$
- (3) $P(A)=0.32, P(B)=0.27, P(C)=-0.06, P(D)=0.47$
- (4) $P(A)=1/2, P(B)=1/4, P(C)=1/8, P(D)=1/16$

$$(5) P(A) = 5/18, \quad P(B) = 1/6, \quad P(C) = 1/3, \quad P(D) = 2/9$$

习题解答

1 先计算其对立事件 $\bar{A}$ “抛四枚硬币, 全出现反面”的概率, 则容易看出 $P(A) = 1/16$, 故 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 15/16$ 。

2 总的分娩次数为 42005100。

$$P(A) = \frac{500000}{42005100} = 0.0119; \quad P(B) = \frac{100}{42005100} = 0.2381 \times 10^{-5}$$

$$P(C) = 1 - P(\text{单胞胎}) = 1 - \frac{41500000}{42005100} = 0.0120.$$

$$3 \quad P(A) = 0.07; \quad P(B) = 0.15 + 0.10 + 0.05 = 0.30;$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (0.18 + 0.25) = 0.57$$

4 设事件 A 表示“随机抽出 20 件中有不合格品”, 则其对立事件 $\bar{A}$ = “随机抽出 20 件全是合格品”。容易算出

$$P(\bar{A}) = \frac{\binom{999}{20}}{\binom{1000}{20}} = 0.8163$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.1837$$

5 由题意知: $P(\text{偶数点}) = 2P(\text{奇数点})$ 。由于掷骰子游戏中“出现偶数点”与“出现奇数点”必居其一, 所以 $P(\text{奇数点}) + P(\text{偶数点}) = 1$, 由此可推出: $P(\text{奇数点}) = 1/3$, $P(\text{偶数点}) = 2/3$ 。由于出现 1 点、3 点、5 点是等可能的, 故

$$P(1 \text{ 点}) + P(3 \text{ 点}) + P(5 \text{ 点}) = 1/3 \text{ 或 } 3P(1 \text{ 点}) = 1/3$$

由此推得: $P(1 \text{ 点}) = P(3 \text{ 点}) = P(5 \text{ 点}) = 1/9$, 类似地可推得: $P(2 \text{ 点}) = P(4 \text{ 点}) = P(6 \text{ 点}) = 2/9$, 最后

$$P(\text{最多出现 3 点}) = P(1 \text{ 点}) + P(2 \text{ 点}) + P(3 \text{ 点}) = 4/9$$

6 由事件运算知 $A - B = A - AB$, 这也可从维恩图上看, 由于 $A \supset AB$, 故由定理 1.3.4 得 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 。

7 设事件 A_i = “第 i 场比赛获胜”, $i=1, 2$, 由题意知: $P(A_1)=1/2$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_1A_2)=1/6$. “两场比赛中至少有一场获胜”可用事件 $A_1 \cup A_2$ 表示, 由定理 1.3.6 知

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 2/3$$

8 由于 A 与 B 互不相容, 所以 $AB = \phi$, 而 $P(AB) = P(\phi) = 0$; 由于 A 与 B 互不相容, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = p + q$; 由于 A 与 B 互不相容, 就有 $A\bar{B} = A$ (从维恩图上可看出), 从而 $P(A\bar{B}) = P(A) = p$; 最后, 利用对偶原则 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, 从而 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (p + q)$.

9 由定理 1.3.6 知 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = p + q - r$;

由事件运算知: $A\bar{B} = A(\Omega - B) = A - AB$, 由于 $A \supset AB$, 故从定理 1.3.4 知 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = p - (p + q - r) = r - q$;

由对偶原理知 $\bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, 故有 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - r$;

由定理 1.3.6 知: $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) = (1 - p) + (1 - q) - (1 - r) = 1 - p - q + r$;

由定理 1.3.6 知: $P(A \cup B) = 1 + p - r$.

10 学生选修统计学、经济学、计算机分别记为 A, B, C , 由题意可知 (用统计方法确定概率),

$$P(A) = 137/200, \quad P(B) = 50/200, \quad P(C) = 124/200,$$

$$P(AB) = 33/200, \quad P(BC) = 29/200, \quad P(AC) = 92/200,$$

$$P(ABC) = 18/200.$$

利用定理 1.3.7 可得: 学生在这三门课中至少选修一门的概率为

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{137}{200} + \frac{50}{200} + \frac{124}{200} - \frac{33}{200} - \frac{29}{200} - \frac{92}{200} + \frac{18}{200} = \frac{175}{200}$$

由此可见, 在 200 名学生中有 175 名学生至少选修一门课。

11 15%

12 由定理 1.3.6 可知: $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, 再由定理

1.3.5 知: $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$, 由此可得

$$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0.6$$

13 记 $A =$ “两颗骰子中至少有一颗小于 3”, 则其对立事件 $\bar{A} =$ “两颗骰子都 ≥ 3 ”。由于独立性, $P(\bar{A}) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$, 从而 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 5/9$ 。

14 $1/27$ 。

15 $19/27$ 。

16 由定理 1.3.6 和定理 1.3.7 知

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= P((A \cup B \cup C) \cup D) \\ &= P(A \cup B \cup C) + P(D) - P((A \cup B \cup C)D) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC) \\ &\quad + P(D) [P(AD) + P(BD) + P(CD) - P(ABD) - P(ACD) \\ &\quad - P(BCD) + P(ABCD)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(AB) - P(AC) - P(AD) - P(BC) \\ &\quad - P(BD) - P(CD) + P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD) \\ &\quad - P(ABCD) \end{aligned}$$

17 由于 $B \cup \bar{B} = \Omega$, 所以 $A = A\Omega = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$ 。因 AB 与 $A\bar{B}$ 不相容, 故由可加性公理知

$$P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

18 由题意知: $A \cup B \cup C \cup D = \Omega$, 再由互不相容性知

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = P(\Omega) = 1$$

在五组概率中只有(1)与(5)是允许的, 其它二组概率是不允许的, 因为(2)与(4)二组概率之和不为 1, 故与正则性公理矛盾, 而(3)与非负性公理矛盾。

§ 1.4 独 立 性

概 要

1. 两个事件 A 与 B (相互) 独立: $P(AB) = P(A)P(B)$

2. 三个事件 A_1, A_2, A_3 相互独立:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

3. 四个事件 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_1A_4) = P(A_1)P(A_4)$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_2A_4) = P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_3A_4) = P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_1A_2A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_4)$$

$$P(A_1A_3A_4) = P(A_1)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_2A_3A_4) = P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

类似可定义五个或更多个事件的相互独立性, 譬如, 定义五个事件相互独立需要 $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 26$ 个概率等式。

判定两个或更多个事件的相互独立性, 可以从定义出发, 但更多地是从客观事实出发, 若任一事件的发生不受其它事件的影响, 就可判定这些事件相互独立。

4. 两个随机试验 E_1 与 E_2 相互独立: 试验 E_1 的任一事件与试验 E_2 的任一事件都相互独立。

5. n 个随机试验 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 相互独立: 试验 E_1 的任一事件, E_2 的任一事件, $\dots, E_n$ 的任一事件都相互独立. 假如这 n 个试验还是相同的, 则称其为 n 重独立重复试验.

6. n 重贝努里试验: 其要点如下,

(1) 只有两个结果(成功与失败, 记为 A 与 $\bar{A}$)的试验称为贝努里试验. 再也没有比贝努里试验更简单的试验了, 最简单的常常是用得最频繁的.

(2) 在一次贝努里试验中, 成功的概率记为 p ($0 < p < 1$), 即 $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p$.

(3) n 个(次)相同的、独立的贝努里试验组成的随机试验称为 n 重贝努里试验.

(4) 在 n 重贝努里试验中成功出现 k 次的事件记为 $B_{n,k}$, 则其概率为

$$P(B_{n,k}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

其中 k 可以为 $0, 1, \dots, n$ 等 $n+1$ 个值中任一个.

习 题

1 某建筑公司投标两个不同的项目, 记 A_1 = “投标第一个项目获得成功”, A_2 = “投标第二个项目获得成功”, 现设 $P(A_1) = 0.4$, $P(A_2) = 0.5$, 且 A_1 与 A_2 是独立事件.

- (1) 该公司投标的二个项目都获得成功的概率是多少?
- (2) 该公司投标的二个项目没有一个获得成功的概率是多少?
- (3) 该公司投标的二个项目中至少有一项获得成功的概率是多少?

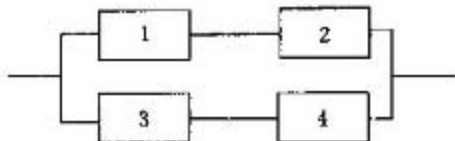
2 有甲、乙两批种子, 发芽率分别是 0.7 和 0.8, 现从两批种子中随机地各取一粒, 求下列事件的概率

- (1) 两粒种子都发芽.
- (2) 至少有一粒种子发芽.
- (3) 恰好有一粒种子发芽.

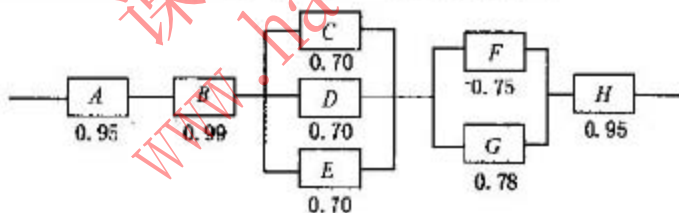
3 设事件 A 与 B 独立, 且 $P(A) = p$, $P(B) = q$. 求下列事件的概率: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

- 4 据 1891 年英格兰和威尔士居民的资料研究父亲与儿子的眼睛是黑色的之间联系, 记事件 A 为父亲眼睛是黑色, 事件 B 为儿子眼睛是黑色, 请验证它们之间是否独立。已有的资料如下:
- 黑眼睛的父亲和黑眼睛的儿子(AB)共占 5%,
 - 黑眼睛的父亲和非黑眼睛的儿子(AB)共占 7.9%,
 - 非黑眼睛的父亲和黑眼睛的儿子($\bar{A}B$)共占 8.9%,
 - 非黑眼睛的父亲和非黑眼睛的儿子($\bar{A}\bar{B}$)共占 78.2%。
- 5 证明: 若三个事件 A, B, C 相互独立, 则 $A \cup B, AB$ 及 $A - B$ 分别都与 C 独立。
- 6 证明: 若事件 A 与 B 都有不为零的概率, 且它们相互独立, 则 A 与 B 为相容事件。
- 7 证明: 若事件 A 与 B 都有不为零的概率, 且它们互不相容, 则 A 与 B 不是相互独立事件。
- 8 证明: 若事件 A 与 B 互不相容, 且相互独立, 则不是 $P(A)=0$, 就是 $P(B)=0$ 。
- 9 常言道: “三个臭皮匠, 顶个诸葛亮”, 如今有三位“臭皮匠”受某公司之请各自独立地去解决某问题, 公司负责人据过去的业绩, 估计他们能解决此问题的概率分别是 0.45, 0.55, 0.60。据此, 该问题能被解决的概率是多少?
- 10 甲、乙、丙三人各自去破译密码, 设他们各自能被破译的概率分别为 $1/5, 1/3, 1/4$ 。求密码能被破译的概率。
- 11 某血库急需 AB 型血, 要从献血者中获得, 根据经验, 每百名献血者中只有 2 名是身体合格的 AB 型血的人, 今对献血者一个接一个地进行血样化验, 求化验到第 20 名献血者的血样时, 才找到身体合格的 AB 型血的人的概率。

- 12 考察由四个部件组成的系统(见下框图). 设 $A_i = \text{"部件 } i \text{ 正常工作"} , i = 1, 2, 3, 4$, 且 A_1, A_2, A_3, A_4 是相互独立事件, 其概率均为 0.9。



- (1) 部件 1 与 2 是用串联组成的子系统, 这个子系统能正常工作仅当两个部件都能正常工作, 这个子系统能正常工作的概率是多少? 由部件 3 和 4 组成的子系统能正常工作的概率是多少?
- (2) 两个子系统都能正常工作的概率是多少?
- (3) 由于两个子系统是用并联组成系统的, 至少有一个子系统能正常工作, 系统就能正常工作, 这个系统能正常工作的概率是多少?
- 13 考察由 8 个元件 (A, B, C, D, E, F, G, H) 组成的串并联电路图(见下框图), 它们下方的小数是它们各自能正常工作的概率, 假如各元件正常工作是相互独立的, 求该电路能正常工作的概率是多少?



- 14 某商店出售两种牌子 (B_1 与 B_2) 的洗碗碟用的洗洁精, 每种牌子都有三种不同规格: 小 (S)、中 (M)、大 (L), 两种牌子和三种规格的洗洁精的销售比例列在如下的列联表边上. 假设任一种牌子与任一规格都是相互独立的, 请把任一牌子与规格下的六种洗洁精的销售比例填写在空白上。

		规格			
		S	M	L	
牌子	B_1				0.40
	B_2				0.60
		0.30	0.50	0.20	

- 15 设有若干架高射炮, 每架击中飞机的概率均是 0.6。现用二架高射炮同时打一架敌机, 其命中敌机的概率是多少? 欲以 99% 的概率把敌机打下, 需要多少架高射炮?
- 16 问至少抛骰子多少次, 才能使都不出现 1 点的概率小于 $1/3$?
- 17 在 4 次独立重复试验中, 事件 A 至少出现一次的概率等于 $65/81$, 求事件 A 在每次试验中发生的概率。
- 18 某产品是经过三道工序加工而成。第一、第二、第三道工序的不合格品率分别是 0.2, 0.15, 0.1。若各道工序互不影响, 试求该产品的不合格品率。
- 19 工人看管 A, B, C 三台机床。在一小时内每台机床不需要照看的概率分别为 0.9, 0.85, 0.8。求下列事件概率。
- (1) 三台机床都不需要工人照看
 - (2) 至少有一台机床需要工人照看
 - (3) 三台机床都需工人照看。
- 20 一辆重型货车去边远山区送货。修理工告诉司机, 由于汽车上 6 个轮胎都是旧的, 前面二个轮胎损坏的概率都是 0.1, 后面四个轮胎损坏的概率都是 0.2, 你能告诉司机, 此车在途中因轮胎损坏而发生故障的概率是多少吗?
- 21 某特效药的临床有效率为 93%, 今有 4 人服用, 记 $B_k = \{4 \text{ 人中有 } k \text{ 人被}$

- 治愈”, 写出概率 $P(B_k)$ 的计算公式, 并计算 4 人中至少有 3 人被治愈的概率是多少?
- 22 连续抛十次硬币, 有 5 次出现正面的概率是多少? 有 4 到 6 次出现正面的概率是多少?
- 23 最近来某房产公司的 100 位顾客中有一位购买了该房产公司的一所房子, 根据这一比例, 在接下去来到的 50 位顾客中恰好有一位购买他的房子的概率是多少?
- 24 掷两颗骰子, 点数之和为 7 或 10 可获奖品, 设 $B_{k,4}$ = “连掷 5 次 (每次两颗骰子) 有 k 次获奖”, 写出 $P(B_{k,4})$ 的计算公式。并计算至少有 3 次获奖的概率是多少?
- 25 有 10 道判别对错的测验题, 一人随意猜答, 他答对不少于 6 道题的概率是多少?
- 26 有 10 道选择型测验题, 要求从每题的 5 种答案中选出一正确的答案, 如果一人随意猜答, 他答对不少于 6 道题的概率是多少?
- 27 比较下列二个事件那个概率大
事件 A : 四颗骰子掷一次, 至少得到一个 1 点。
事件 B : 二颗骰子连掷 24 次, 至少一次得到二个 1 点。
- 28 有一赌徒, 他赢一元钱的机会是 0.3, 输二角五分的机会为 0.7, 他连赌 20 次, 问他至少赢 3 元钱的概率是多少?
- 29 某城市有 1% 色盲者, 问从这个城市里选出多少人, 才能使得里面至少有一位色盲者的概率不小于 0.95。
- 30 在贝努里试验中, 事件 A 出现的概率为 p , 求在 n 次独立的贝努里试验中, 事件 A 出现偶数次 (包括出现 0 次) 的概率。

习题解答

- 1 (1) $P(\text{二项目都投标成功}) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.2$
(2) $P(\text{二项目投标没有一个成功}) = 1 - P(\text{二项目投标至少一个成功})$
 $= 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - (0.4 + 0.5 - 0.2) = 0.3$
(3) $P(\text{二项目投标至少一个成功}) = P(A_1 \cup A_2) = 0.7$

- 2 (1) 0.56; (2) 0.94; (3) 0.38

$$\begin{aligned} 3 \quad P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= p + q - pq \\ P(A \cup \bar{B}) &= P(A) + P(\bar{B}) - P(AB) = p + (1 - q) - p(1 - q) \\ &= 1 - q + pq \\ P(\bar{A} \cup B) &= 1 - pq \end{aligned}$$

- 4 已知 $P(AB) = 0.05$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 0.079$, $P(\bar{A}B) = 0.089$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 0.782$, 为验证事件 A 与 B 的独立性, 需要考察等式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 是否成立, 由于 (见习题 1.3.17)

$$P(A) = P(AB) + P(\bar{A}B) = 0.05 + 0.089 = 0.129$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = 0.05 + 0.089 = 0.139$$

$$P(A)P(B) = 0.129 \times 0.139 = 0.01793 \neq 0.05$$

可见: 英格兰和威尔士的居民中“父亲的眼睛是黑色”与“儿子的眼睛是黑色”不是相互独立事件, 或者说: 这两事件间有一定的联系。

$$\begin{aligned} 5 \quad \text{由于 } P((A \cup B)C) &= P(AC \cup BC) \\ &= P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C) \\ &= [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C) \\ &= P(A \cup B)P(C) \end{aligned}$$

故 $A \cup B$ 与 C 独立。类似证 AB 与 C 独立; $A - B$ 与 C 独立。

- 6 反证法, 倘若事件 A 与 B 互不相容, 则 $P(AB) = P(\phi) = 0$, 而如今由

题意知: $P(AB) = P(A)P(B) > 0$, 故 A 与 B 是相容事件。

7 反证法, 倘若事件 A 与 B 相互独立, 必有 $P(AB) = P(A)P(B)$, 如今 A 与 B 互不相容, 故 $P(AB) = P(\phi) = 0$, 又知 $P(A) > 0$ 和 $P(B) > 0$, 故 $P(A)P(B) > 0$ 。从而 $P(AB) \neq P(A)P(B)$ 。这说明事件 A 与 B 不相互独立。

8 在事件 A 与 B 互不相容, 且相互独立情况下,

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0$$

从而导致 $P(A)$ 与 $P(B)$ 中至少有一个为零。

9 设三位“臭皮匠”分别能解决某问题的事件分别记为 A, B 与 C 。由题意知 $P(A) = 0.45, P(B) = 0.55, P(C) = 0.60$ 。“该问题能被解决”等价于事件 A, B, C 中至少一个发生, 故所求概率为 $P(A \cup B \cup C) = 0.901$ 。

10 0.6。

11 记 E = “身体合格的 AB 型血的献血者”。由题意知, $P(E) = 0.02$ 利用对立事件可求得

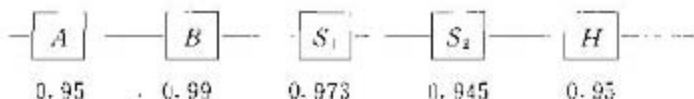
$$\begin{aligned} & P(20 \text{ 名献血者中至少有一人是身体合格的 AB 型血的人}) \\ &= 1 - (20 \text{ 名献血者都不是身体合格的 AB 型血的人}) \\ &= 1 - [P(\bar{E})]^{20} = 1 - (1 - 0.02)^{20} = 0.3324 \end{aligned}$$

12 记 S_1 = “由部件 1 和部件 2 组成的子系统能正常工作”, S_2 = “由部件 3 和部件 4 组成的子系统能正常工作”, 则由串联系统定义可知: $S_1 = A_1 A_2, S_2 = A_3 A_4$ 。于是 $P(S_1) = 0.81, P(S_2) = 0.81$ 。这是 (1) 的答案。

$$(2) P(S_1 S_2) = 0.81 \times 0.81 = 0.6561$$

$$(3) P(S_1 \cup S_2) = 0.9639。$$

13 记 S_1 = “由元件 C, D, E 组成的并联系统能正常工作”, 则 $P(S_1) = P(C \cup D \cup E) = 0.70 \times 3 - (0.70)^2 \times 3 + (0.70)^3 = 0.973$ 。又记 S_2 = “由元件 F, G 组成的并联系统能正常工作”, 则 $P(S_2) = P(F \cup G) = 0.75 + 0.78 - 0.75 \times 0.78 = 0.945$ 。这样我们就得到一个串联系统(见下图), 它与原系统等价。



最后,该系统能正常工作的概率为 0.8215。

14 题目中的“销售比例”就是销售概率的估计值。空白表格周边的概率分别是二种牌子和三种规格的销售概率,即 $P(B_1)=0.4, P(B_2)=0.6, P(S_1)=0.30, P(M)=0.5, P(L)=0.20$ 。空白表格左上角上的空白处就是小号 B_1 品牌的销售概率,它就是 $P(B_1S_1)$,由独立性可知 $P(B_1S_1)=0.12$,类似地可算得另外五个空白处的销售概率分别为 0.20, 0.08, 0.18, 0.30, 0.12。

15 记 A_i = “第 i 架高射炮命中飞机”, $i=1, 2$, 二架高炮同时打敌机,至少有一架高炮命中敌机就算命中敌机,所以

$$\begin{aligned} P(\text{命中敌机}) &= P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84 \end{aligned}$$

若用 n 架高炮打敌机,命中敌机概率为 0.99,则可列出以下方程

$$1 - (1 - 0.6)^n = 0.99$$

简化上式得 $0.4^n = 0.01$,解之可得 $n = 5.0259$,为保证命中敌机的概率不少于 0.99,故取 $n = 5$ 。

16 掷一颗骰子不出现 1 点的概率为 $5/6$,掷 n 颗骰子都不出现 1 点的概率为 $(5/6)^n$,依题意要求,可列出下列不等式: $(5/6)^n < 1/3$,解之 $n > 6.0257$,故取 $n = 7$ 。

17 设 $P(A) = p$,由题意可列出方程 $1 - (1 - p)^4 = 65/81$ 。解之, $p = 1/3$ 。

18 0.388。

19 记“机床 A 在一小时内不需照看”为事件 A,其对立事件 $\bar{A}$ = “机床 A 在一小时内需要照看”,且 $P(A) = 0.9, P(\bar{A}) = 0.1$ 。类似的假设可有 $P(B) = 0.85, P(\bar{B}) = 0.15, P(C) = 0.8, P(\bar{C}) = 0.2$ 。

$$(1) P(ABC) = 0.612;$$

$$(2) P(A \cup B \cup C) = 0.388;$$

$$(3) P(\bar{A} \bar{B} \bar{C}) = 0.003.$$

$$20 \quad P(\text{汽车发生故障}) = 1 - P(\text{汽车不发生故障})$$

$$= 1 - P(\text{六只轮胎都正常工作}) = 1 - (0.9)^2 \times (0.8)^4 = 0.6682.$$

$$21 \quad \text{这是 4 重贝努里试验, } P(B_{4,k}) = \binom{4}{k} 0.95^k 0.05^{4-k}, k=0,1,2,3,4. P$$
$$(\text{4 人中至少有 3 人被治愈}) = P(B_{4,3}) + P(B_{4,4}) = 0.1715 + 0.8145 = 0.9860.$$

$$22 \quad 0.2461; 0.6563.$$

$$23 \quad \text{按题意, 一位顾客来到房产公司决定购买住房的概率 } p=0.01, \text{ 而要求}$$
$$\text{的概率为 } P(B_{50,1}) = 0.3056.$$

$$24 \quad \text{掷两颗骰子, 点数之和为 7 的概率为 } 6/36, \text{ 点数之和为 10 的概率为}$$
$$3/36, \text{ 由此可知 } P(\text{获奖品}) = 6/36 + 3/36 = 1/4.$$

$$P(B_{5,k}) = \binom{5}{k} \left[\frac{1}{4} \right]^k \left[\frac{3}{4} \right]^{5-k}, k=0,1,\dots,5$$

$$P(\text{至少 3 次获奖品}) = P(B_{5,3}) + P(B_{5,4}) + P(B_{5,5}) = 0.1035.$$

$$25 \quad \text{随意猜答是非题时, 对错概率各为 } 1/2, \text{ 而 10 道是非题中有不少于 6}$$
$$\text{道题被随意猜答对的概率为 } P(B_{10,6}) + P(B_{10,7}) + P(B_{10,8}) + P(B_{10,9}) + P$$
$$(B_{10,10}) = 386/1024 = 0.3774.$$

$$26 \quad 0.0064.$$

$$27 \quad \text{一颗骰子出现 1 点的概率为 } p=1/6, \text{ 所以掷四颗骰子}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(B_{4,i}) = 1 - P(B_{4,0}) = 0.5177$$

$$\text{二颗骰子都出现 1 点的概率 } p=1/36, \text{ 二颗骰子连掷 24 次时}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{24} P(B_{24,i}) = 1 - P(B_{24,0}) = 0.4914$$

$$28 \quad \text{该赌徒在一次赌博中赢 1 元的概率是 } p=0.3, \text{ 输 0.25 元的概率是 } 1$$
$$-p=0.7, \text{ 在 20 次赌博中该赌徒赢 } k \text{ 次的概率为}$$

$$P(B_{20,k}) = \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}, k=0,1,\dots,20$$

在 20 次赌博中他至少要赢 3 元, 这要求他在 20 次赌博中至少要赢 7 次, 而他至少赢 7 次的概率为

$$\sum_{k=7}^{20} P(B_{20,k}) = 1 - \sum_{k=0}^6 P(B_{20,k})$$

利用教材中附表 1, 可查得

$$\sum_{k=0}^6 \binom{20}{k} 0.3^k 0.7^{20-k} = 0.6080$$

所以该赌徒在 20 次赌博中至少要赢 3 元的概率为 $1 - 0.6080 = 0.3920$ 。

29 题目给定: 某城市人是色盲者的概率为 $p=0.01$, 若从该城市任选 n 个人, 其中有 k 位色盲者的概率为

$$P(B_{n,k}) = \binom{n}{k} 0.01^k 0.99^{n-k}, k=0,1,\dots,n$$

如今要求这 n 个人中至少有一位色盲者的概率不小于 0.95, 据此可列出如下方程

$$\sum_{k=1}^n P(B_{n,k}) \geq 0.95$$

上式左端 $= 1 - P(B_{n,0}) = 1 - 0.99^n$, 代入上式, 可得

$$1 - 0.99^n \geq 0.95 \text{ 或 } 0.99^n \leq 0.05$$

解之可得 $n \geq 298.072$, 故取 $n=299$ 。即从该城市任选 299 人 (近 300 人) 可以 0.95 的概率保证其中至少有一名色盲者。

30 在 n 重贝努里试验中事件 A 出现偶数次与奇数次的概率分别记为 P 与 Q , 即

$$P = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \dots + \binom{n}{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k} + \dots$$

$$Q = \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} + \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} + \dots + \binom{n}{2k+1} p^{2k+1} (1-p)^{n-2k-1} + \dots$$

容易看出: $-Q$ 有如下表示式

$$-Q = \binom{n}{1} (-p) (1-p)^{n-1} + \binom{n}{3} (-p)^3 (1-p)^{n-3} + \dots$$

$$+ \binom{n}{2k+1} (-p)^{2k+1} (1-p)^{n-2k-1} + \dots$$

于是利用二项式定理,可得

$$P+Q=[p+(1-p)]^n=1$$

$$P-Q=[-p+(1-p)]^n=(1-2p)^n$$

由上二式可解出 $P=[1+(1-2p)^n]/2$, 这就是 A 出现偶数次的概率。

课后答案网
www.hackshp.cn

§ 1.5 条件概率

提要

1. 事件 $B(P(B)>0)$ 已发生下, 事件 A 的条件概率:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

2. 条件概率的性质: 条件概率满足概率的三条公理, 从而条件概率具有概率的一切性质, 此外它还具有一些特殊性质, 这些性质可帮助我们计算更复杂事件的概率和研究更复杂的随机现象, 它们是

$$\begin{aligned} (1) \text{乘法公式: } P(AB) &= P(A|B)P(B) \quad (P(B)>0) \\ &= P(B|A)P(A) \quad (P(A)>0) \end{aligned}$$

$$(2) \text{事件 } A \text{ 与 } B \text{ 独立 } (P(B)>0) \text{ 的充要条件是 } P(A|B) = P(A)$$

- (3) 三个事件的乘法公式:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2)$$

其中要求 $P(A_1) > 0, P(A_1 A_2) > 0$, 这个性质可推广到四个或更多个事件的交事件上去。

(4) 全概率公式: 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是基本空间 Ω 的一个分割, 则对 Ω 中任一事件 A , 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

(5) 贝叶斯公式: 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是基本空间 Ω 的一个分割, 且各自概率 $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ 皆已知且为正; 又设对 Ω 中任一事件 A , 诸条件概率 $P(A|B_1), P(A|B_2), \dots, P(A|B_n)$ 也已知, 则在 $P(A)>0$ 的条件下, 有

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

习题

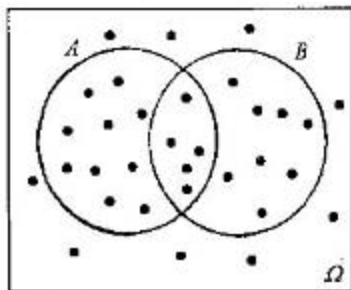
1. 下面维恩图上每一点表示一个等可能的基本结果, 求下列条件概率:

(1) $P(A|B)$

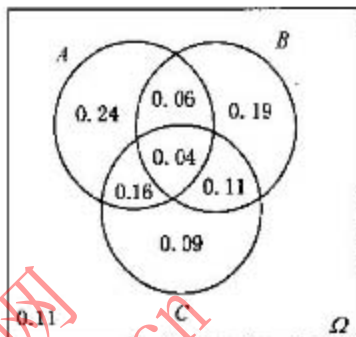
(2) $P(B|A)$

(3) $P(A|\bar{B})$

(4) $P(B|\bar{A})$



习题 1.5.1 的维恩图



习题 1.5.2 的维恩图

- 2 与事件 A, B, C 有关事件的概率标明在上面的维恩图上, 求下列条件概率:

(1) $P(A|B)$

(2) $P(B|\bar{C})$

(3) $P(AB|C)$

(4) $P(B \cup C|A)$

(5) $P(A|B \cup C)$

(6) $P(A|BC)$

(7) $P(ABC|BC)$

(8) $P(ABC|B \cup C)$

- 3 某人有一笔资金, 他投入基金的概率为 0.58, 购买股票的概率为 0.28, 两项投资都做的概率为 0.19.

(1) 已知他已投入基金再购买股票的概率是多少?

(2) 已知他已购买股票, 再投入基金的概率是多少?

- 4 在一所学校里数学不及格的学生占 15%, 语文不及格的学生占 5%, 这两

门都不及格的学生占 4%。

- (1) “数学不及格”与“语文不及格”是两个相互独立事件吗?
- (2) 已知一学生数学不及格, 他语文也不及格的概率是多少?
- (3) 已知一学生语文不及格, 他数学也不及格的概率是多少?

- 5 掷两颗骰子, 其结果用 (x_1, x_2) 表示, 其中 x_1 与 x_2 分别表示第一与第二颗骰子出现的点数。若设事件

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 10\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) : x_1 > x_2\}$$

求条件概率 $P(B|A)$ 和 $P(A|B)$ 。

- 6 设某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.6, 而活到 25 岁的概率为 0.4。问现年为 20 岁的这种动物能活到 25 岁的概率是多少?

- 7 在有三个小孩的家庭中, 已知至少有一个女孩, 求该家庭至少有一个男孩的概率(设男孩与女孩是等可能的)。

- 8 抛三颗骰子, 已知它们的点数全不同, 问其中至少有一个 1 点的概率是多少?

- 9 抛四颗骰子, 已知至少有一个 1 点出现, 问至少出现二个 1 点的概率是多少?

- 10 给定 $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.30$ 和 $P(AB) = 0.15$, 验证下面四个等式

$$P(A|B) = P(A), \quad P(A|\bar{B}) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B), \quad P(B|\bar{A}) = P(B)$$

- 11 12 个乒乓球都是新的。每次比赛时取出 3 个, 用完后放回去, 求第三次比赛时取出的 3 个球都是新球的概率。

- 12 某城市的五月里不是雨天就是晴天, 晴天转雨天的概率是 0.6, 雨天接着雨天的概率是 0.8, 假如该城市五月的天气仅与前一天有关, 在当天是雨天的情况下,

- (1) 未来四天都是雨天的概率是多少?
(2) 未来四天中晴雨天相同的概率是多少?
(3) 未来四天都是晴天的概率是多少?
- 13 已知 $P(A|B)=0.7, P(A|\bar{B})=0.3, P(B|A)=0.6$, 求 $P(A)$ 。
- 14 在 1 到 100 的自然数中任取一数, 已知此数不大于 50, 求此数是 2 或 3 的倍数的概率。
- 15 有甲、乙两罐, 甲罐中有白球二只和黑球一只。乙罐中有白球一只和黑球二只, 若从甲罐中随机取一只放到乙罐中, 然后再从乙罐中取出一球, 求此球为白球的概率。
- 16 播种的小麦种籽中含有 2% 的二等种籽, 1.5% 的三等种籽, 1% 的四等种籽, 其余全是一等种籽。用一等、二等、三等、四等种籽长出的穗含 50 颗以上麦粒的概率分别是 0.5, 0.15, 0.1, 0.05。求这批种籽所结穗含有 50 颗以上麦粒的概率。
- 17 某产品的合格品率是 0.95。有一检查系统, 对合格品进行检查能以 0.98 的概率判为合格品, 对不合格品进行检查时, 仍以 0.05 的概率判为合格品。求该检查系统发生错检的概率。
- 18 一电子器件工厂从过去经验得知, 一位新工人参加培训后能完成生产定额的概率为 0.85, 而不参加培训只能完成生产定额的概率为 0.35, 假如该厂中 80% 的工人参加过培训。
(1) 一位新工人完成生产定额的概率是多少?
(2) 若一位新工人已完成生产定额, 他参加过培训的概率是多少?
- 19 某工厂向三家出租车公司 (D 、 E 和 F) 租用汽车, 20% 汽车来自 D 公司, 20% 来自 E 公司, 60% 来自 F 公司, 而这三家出租公司在运输中发生故障的概率依次为 0.10, 0.12 和 0.04。
(1) 该工厂租用汽车中发生故障的概率是多少?
(2) 若该工厂租用汽车发生故障, 问此汽车是来自 F 公司的概率是多少?

- 20 已知 5% 男人和 0.25% 女人是色盲者。随机选一个色盲者, 求此人是男的
概率是多少? (假设男女人数比为 51 : 49)
- 21 某车间有甲、乙、丙三台机器生产螺丝钉, 它们的产量各占 25%、35%、
40%, 其不合格品率分别为 5%、4%、2%。现发现一只不合格的螺丝钉,
问此不合格品是机器甲、乙、丙生产的概率各为多少?
- 22 一口袋有六个球, 对其中球的颜色有三种看法:
 A_1 : 袋中有四只红球和二只白球;
 A_2 : 袋中有三只红球和三只白球;
 A_3 : 袋中有二只红球和四只白球;
对这三种看法某人认为其发生的可能性分别为

$$P(A_1) = \frac{1}{3}, \quad P(A_2) = \frac{1}{6}, \quad P(A_3) = \frac{1}{2}$$

某人从这口袋中任取一球, 得到了白球, 此时他应如何修正自己的看法呢?

习题解答

$$\begin{aligned} 1 \quad (1) P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{AB \text{ 含基本结果数}/n}{B \text{ 含基本结果数}/n} \\ &= \frac{AB \text{ 含基本结果数}}{B \text{ 含基本结果数}} = \frac{5}{13} \quad (\text{其中 } n \text{ 为 } \Omega \text{ 中基本结果总数}) \end{aligned}$$

$$(2) P(B|A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3};$$

$$(3) P(A|\bar{B}) = \frac{10}{19};$$

$$(4) P(B|\bar{A}) = \frac{8}{17}.$$

$$2 \quad (1) P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.04 + 0.06}{0.19 + 0.11 + 0.04 + 0.06} = \frac{0.10}{0.40} = \frac{1}{4};$$

$$(2) P(B|\bar{C}) = 5/12;$$

$$(3) P(AB|C) = 1/10;$$

$$(4) P(B \cup C|\bar{A}) = 39/50;$$

$$(5) P(A|B \cup C) = 28/65;$$

$$(6) P(A|BC) = 4/15;$$

$$(7) P(ABC|BC) = 4/15;$$

$$(8) P(ABC|B \cup C) = 4/65。$$

3 记事件 A = “该人资金投入基金”, B = “该人资金购买股票”。则由题意知: $P(A) = 0.58$, $P(B) = 0.28$, $P(AB) = 0.19$ 。

$$(1) P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.19}{0.58} = \frac{19}{58} = 0.3276;$$

$$(2) P(A|B) = 0.6786。$$

4 记事件 A = “数学不及格”, B = “语文不及格”, 由题意知 $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.05$, $P(AB) = 0.04$ 。

(1) 由于 $P(A)P(B) = 0.15 \times 0.05 = 0.0075 \neq 0.04 = P(AB)$, 所以事件 A 与 B 不相互独立。

$$(2) P(B|A) = 4/15。$$

$$(3) P(A|B) = 4/5。$$

5 由题意知: $P(A) = 3/36$, $P(B) = 15/36$, $P(AB) = 1/36$ 由此可算得 $P(B|A) = 1/3$, $P(A|B) = 1/15$ 。

$$6 \quad 1/2。$$

7 记事件 A = “在有三个小孩的家庭中至少有一个女孩”, 事件 B = “在有三个小孩的家庭中至少有一个男孩”。则由等可能条件知, $P(A) = 7/8$, $P(B) = 7/8$, $P(AB) = 6/8$, 所求概率为 $P(B|A) = 6/7$ 。

8 记事件 A = “掷三颗骰子, 出现点数全不同”, 事件 B = “掷三颗骰子, 至少有一个 1 点出现”。如今要求条件概率 $P(B|A) = P(AB)/P(A)$, 下面用古典方法求概率 $P(A)$ 与 $P(AB)$ 。

掷三颗骰子, 所有可能的基本事件数为 $6^3 = 216$ 个, 而要事件 A 发生, 可以这样设想, 先从 6 个不同点数中任取 3 个, 共有 $\binom{6}{3}$ 种不同取法, 然后把这 3

个不同点数进行排列, 共有 $3! = 6$ 种情况, 所以 A 含有 $\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \end{Bmatrix} \times 3! = 120$ 个基本结果, 从而 $P(A) = 120/216 = 5/9$, 而事件 $AB =$ “掷三颗骰子, 点数全不同, 但至少有一个 1 点”。这样的事件 AB 只能有一个 1 点出现, 另外二个点数可从另外 5 个点数 (即从 2, 3, 4, 5, 6 点) 任取 2 个, 然后与 1 点放在一起进行排列, 所以事件 AB 含有 $\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} \times 3! = 60$ 个基本结果, 从而 $P(AB) = 60/216 = 5/18$ 。

综合上述, $P(B|A) = (5/18)/(5/9) = 1/2$ 。

9 记事件 $A =$ “掷四颗骰子, 至少出现一个 1 点”, 事件 $B =$ “掷四颗骰子, 至少出现二个 1 点”。显然 $A \supset B$, 故所求条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$ 。以下用古典方法计算概率 $P(A)$ 和 $P(B)$ 。

事件 A 的对立事件 $\bar{A} =$ “掷四颗骰子, 不出现 1 点”, 故 $P(\bar{A}) = 5^4/6^4$, 所以 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 5^4/6^4 = 671/1296$ 。为求 $P(B)$, 我们把 B 分为三个互不相容事件 B_1, B_2, B_3 , 其 $B_i =$ “掷四颗骰子, 仅出现 i 个 1 点”, $i = 2, 3, 4$, 容易看出 $P(B_1) = 1/6^4$, $P(B_3) = \left[\begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \end{Bmatrix} \times 4! / 3! \right] / 6^4 = 20/6^4$, 其中 $\begin{Bmatrix} 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 表示从 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取一个, 然后与三个 1 进行排列, 共有 4! 个, 但三个 1 的排列是重复的, 故应再除以 3!。类似地, $P(B_2) = \left[\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} 4! / (2! \cdot 2!) \right] / 6^4 = 150/6^4$ 。这样一来,

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{150}{6^4} + \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = \frac{171}{6^4}$$

综合上述, $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{171/6^4}{671/6^4} = \frac{171}{671} = 0.2548$ 。

10 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.30} = 0.5 = P(B)$, 另外三个等式可类似进行验证, 这说明事件 A 与 B 相互独立。

11 记事件 $A =$ “第三次比赛取出 3 个球全是新的”。其概率 $P(A)$ 与前二次比赛用球有关, 第一次比赛用球当然全是新的。用完放回后, 12 个球中有 3 个旧的和 9 个新的, 第二次比赛再取出 3 个球就可能有如下四个事件之一

发生

$$B_0 = \text{"3个旧的"}, \text{其概率 } P(B_0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = 1/220,$$

$$B_1 = \text{"2旧1新"}, \text{其概率 } P(B_1) = \frac{\binom{3}{2} \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = 27/220,$$

$$B_2 = \text{"1旧2新"}, \text{其概率 } P(B_2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{9}{2}}{\binom{12}{3}} = 108/220,$$

$$B_3 = \text{"3个新的"}, \text{其概率 } P(B_3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} = 84/220.$$

上述四个事件互不相容, 且其并为必然事件, 即 $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$, 由此可得计算 $P(A)$ 的全概率公式

$$P(A) = P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1) \\ + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

其中四个条件概率可据其意很快求得, 如 $P(A|B_0)$, 其中 B_0 是第二次比赛用的球是“3个旧的”, 返回后, 12个球中仍是3旧9新, 所以 $P(A|B_0) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}}$. 类似可求得另外三个条件概率, 最后可得

$$P(A) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{1}{220} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{27}{220} + \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{108}{220} + \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{84}{220} \\ = \frac{1}{220} (84 \times 1 + 56 \times 27 + 35 \times 108 + 20 \times 84) \\ = 7056/220^2 = 0.1458$$

这就是第三次比赛取出3个球全是新球的概率。

12 我们把题目给定的二个转移概率(实际上是条件概率)分别记为

$$P(\text{雨}|\text{晴}) = 0.6, \quad P(\text{雨}|\text{雨}) = 0.8$$

(1) 我们把未来四天是雨天分别记为雨₁, 雨₂, 雨₃, 雨₄, 当天是雨天记为雨₀, 这样要求的概率为

$$P(\text{雨}_1, \text{雨}_2, \text{雨}_3, \text{雨}_4 | \text{雨}_0) = P(\text{雨}_1 | \text{雨}_0, \text{雨}_2, \text{雨}_3, \text{雨}_4) \times \\ P(\text{雨}_2 | \text{雨}_1, \text{雨}_3, \text{雨}_4) \times P(\text{雨}_3 | \text{雨}_2, \text{雨}_4) \times P(\text{雨}_4 | \text{雨}_3)$$

由于假设: 五月的天气仅与前一天有关, 故上式等价于

$$P(\text{雨}_1, \text{雨}_2, \text{雨}_3, \text{雨}_4 | \text{雨}_0) = P(\text{雨}_1 | \text{雨}_0) P(\text{雨}_2 | \text{雨}_1) P(\text{雨}_3 | \text{雨}_2) P(\text{雨}_4 | \text{雨}_3)$$

$$=(0.8)^4=0.4096$$

(2)据上述分析和使用的符号,有

$$P(\text{雨}_1, \text{晴}_2, \text{雨}_3, \text{晴}_4 | \text{雨}_0) = P(\text{雨}_1 | \text{晴}_0)P(\text{晴}_2 | \text{雨}_1)P(\text{雨}_3 | \text{晴}_2)P(\text{晴}_4 | \text{雨}_3)$$

其中 $P(\text{雨} | \text{晴})=0.6$, 而 $P(\text{晴} | \text{雨})$ 尚未知, 下面先来求此概率。

设雨天的概率为 p , 则晴天概率为 $1-p$, 因为“五月里不是雨天就是晴天”是题目给定的假设, 由全概率公式

$$P(\text{雨})=P(\text{雨} | \text{晴})P(\text{晴})+P(\text{雨} | \text{雨})P(\text{雨})$$

由此可列出关于 p 的方程

$$p=0.6(1-p)+0.8p$$

解之, 得 $p=0.75$ 。这意味着 $P(\text{雨})=0.75, P(\text{晴})=0.25$, 这二个是无条件概率, 然后由乘法公式可知

$$P(\text{晴} | \text{雨})P(\text{雨})=P(\text{雨} | \text{晴})P(\text{晴})$$

由此可得雨天转晴天的概率为

$$P(\text{晴} | \text{雨})=0.8 \times 0.25 / 0.75 = 0.2$$

有了上述准备,

$$P(\text{雨}_1, \text{晴}_2, \text{雨}_3, \text{晴}_4 | \text{雨}_0) = 0.6 \times 0.2 \times 0.6 \times 0.2 = 0.0144$$

(3)未来四天都是晴天的概率为

$$P(\text{晴}_1, \text{晴}_2, \text{晴}_3, \text{晴}_4 | \text{雨}_0) = P(\text{晴}_1 | \text{晴}_0)P(\text{晴}_2 | \text{晴}_1)P(\text{晴}_3 | \text{晴}_2)P(\text{晴}_4 | \text{雨}_0)$$

其中 $P(\text{晴} | \text{雨})=0.2$, 而 $P(\text{晴} | \text{晴})$ 尚不知, 下面用如下全概率公式

$$P(\text{晴})=P(\text{晴} | \text{雨})P(\text{雨})+P(\text{晴} | \text{晴})P(\text{晴})$$

可以列出如下方程

$$0.25=0.2 \times 0.75 + P(\text{晴} | \text{晴}) \times 0.25$$

解之, 可得 $P(\text{晴} | \text{晴})=0.4$, 代回原式即得

$$P(\text{晴}_1, \text{晴}_2, \text{晴}_3, \text{晴}_4 | \text{雨}_0) = (0.4)^3 \times 0.2 = 0.0128$$

最后的概率表明: 在五月份内由雨天转为连续四个晴天的可能性很小, 大约一百年中只有 1.3 次是这种天气。

13 由全概率公式知

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})=0.7P(B)+0.3(1-P(B))$$

欲求 $P(A)$, 先要求 $P(B)$, 这可从乘法公式获得如下等式

$$P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

利用已知条件可得 $P(B)=P(A) \cdot 0.6/0.7$, 把此式代入原式, 又得

$$P(A)=0.7 \times P(A) \times 0.6/0.7 + 0.3(1-P(A)) \times 0.6/0.7$$

这是含 $P(A)$ 的一个方程, 解之, 可得 $P(A) = 21/46 = 0.4565$ 。

14 记事件 $A =$ “在前 100 个自然数中任取一数, 此数 ≤ 50 ”。事件 $B =$ “在前 100 个自然数中任取一数, 此数是 2 或 3 的倍数”。现要求条件概率 $P(B|A)$, 为此要获得 $P(A)$ 与 $P(AB)$, 其中事件 A 含有 50 个基本结果, 所以 $P(A) = 50/100$, 而事件 $AB =$ “前 50 个自然数中能被 2 和 3 整除”含有 $25 + 8 = 33$ 个基本结果, 其中 25 是前 50 个自然数中偶数个数, 另外 8 个是能被 3 整除的奇数, 它们是 3, 9, 15, 21, 33, 39, 45, 所以 $P(AB) = 33/100$ 。由此可得 $P(B|A) = 33/50 = 0.66$ 。

15 从甲罐里取出的球记为“甲白”和“甲黑”, 从乙罐里取出的球记为“乙白”和“乙黑”, 当从甲罐取出一球放入乙罐后, 再从乙罐取出白球的概率 $P(\text{乙白})$, 此概率当然与从甲罐取出又放入乙罐的球的颜色有关, 利用这个关系可写出全概率公式

$$P(\text{乙白}) = P(\text{乙白}|\text{甲白})P(\text{甲白}) + P(\text{乙白}|\text{甲黑})P(\text{甲黑})$$

右端二个概率和二条件概率都容易从题意中获得, 于是

$$P(\text{乙白}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

16 0.4826。

17 在产品检查中可能犯二类错误:

a. 对合格品检查有错(即把合格品判为不合格品), 依题意, 此种概率为 $P(\text{错}|\text{合格品}) = 1 - 0.98 = 0.02$ 。

b. 对不合格品检查有错(即把不合格品判为合格品), 依题意, 此种概率为 $P(\text{错}|\text{不合格品}) = 0.05$ 。

最后, 由全概率公式知, 所求概率

$$\begin{aligned} P(\text{错}) &= P(\text{错}|\text{合格品})P(\text{合格品}) + P(\text{错}|\text{不合格品})P(\text{不合格品}) \\ &= 0.02 \times 0.96 + 0.05 \times 0.04 = 0.0212 \end{aligned}$$

该检查系统发生错检的概率为 0.0212, 在 100 次检查中约有二次左右会发生差错。

18 设事件 $A =$ “工人完成定额”, 事件 $B =$ “工人参加培训”, 而 $\bar{B} =$ “工

人没参加培训”。依题意, 已知

$$P(A|B)=0.86, P(A|\bar{B})=0.35, P(B)=0.8, P(\bar{B})=0.2$$

(1) 利用全概率公式, $P(A)=0.7580$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 利用贝叶斯公式, } P(B|A) &= P(A|B)P(B)/P(A) \\ &= 0.86 \times 0.8 / 0.7580 = 0.9077 \end{aligned}$$

19 (1) 0.068; (2) 0.3529.

20 0.9542.

21 25/69; 28/69; 16/69.

22 某人对袋中红球与白球的比例吃不准, 但根据他的经验, 认为只有三种可能:

$$A_1 = \text{“4红2白”}, A_2 = \text{“3红3白”}, A_3 = \text{“2红4白”}$$

并对这三种可能性的大小给出自己的看法, 即

$$P(A_1)=1/3, P(A_2)=1/6, P(A_3)=1/2$$

这种现象会有的, 为了验证和修正自己的看法, 最好的方法是去做试验, 这里做了一次试验, 该人从袋中任取一球, 一看是白球, 这无疑支持自己看法: 白球多于红球的可能性最大, 贝叶斯公式从数量上对这个看法给予说明。

在 A_1 发生场合, 该人取到白球概率为 $P(\text{白}|A_1)=2/6$

在 A_2 发生场合, 该人取到白球概率为 $P(\text{白}|A_2)=3/6$

在 A_3 发生场合, 该人取到白球概率为 $P(\text{白}|A_3)=4/6$

再按全概率公式, 可以算出取出白球的无条件概率

$$\begin{aligned} P(\text{白}) &= P(\text{白}|A_1)P(A_1) + P(\text{白}|A_2)P(A_2) + P(\text{白}|A_3)P(A_3) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{19}{36} \end{aligned}$$

再按贝叶斯公式, 可得在白球已出情况下, A_1, A_2, A_3 发生的条件概率, 它们分别是

$$P(A_1|\text{白}) = P(\text{白}|A_1)P(A_1)/P(\text{白}) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} \div \frac{19}{36} = \frac{4}{19} = 0.2105$$

$$P(A_2|\text{白}) = P(\text{白}|A_2)P(A_2)/P(\text{白}) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} \div \frac{19}{36} = \frac{3}{19} = 0.1579$$

$$P(A_3|\text{白}) = P(\text{白}|A_3)P(A_3)/P(\text{白}) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} \div \frac{19}{36} = \frac{12}{19} = 0.6316$$

由此可见，该人试验前对白球多于红球发生概率认为是 0.5，如今提高到 0.63，这是用试验信息对自己看法的一种修正。另二种情况发生概率都有所下降，这就是贝叶斯公式的作用。

课后答案网
www.hackshp.cn

第二章

随机变量及其概率分布

§ 2.1 随机变量

概 要

1. 随机变量 X : 取值依赖于(随机现象的)基本结果 ω 的变量, 即 $X = X(\omega)$ 。

离散随机变量: 仅取有限个或可列个孤立点的随机变量。

连续随机变量: 取值充满一个区间 (a, b) 的随机变量, 其中 a 可为 $-\infty$, b 可为 ∞ 。

2. 分布函数: 对任意随机变量 X 及任一实数 x , 事件“ $X \leq x$ ”的概率 $F(x) = P(X \leq x)$ 是 x 的函数, 分布函数是其简称, 全称是 X 的累积概率分布函数。它的定义域为整个实数轴 $(-\infty, \infty)$, 它的值域为 $[0, 1]$ 。

3. 分布函数的基本性质:

(1) $F(x)$ 是非降函数。

$$(2) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$$

$$(3) F(x) \text{ 是右连续函数, 即 } F(x) = F(x+0).$$

4. 在研究随机变量中会涉及无穷多个事件及其并与交, 为使其概率运算通行无阻, 有限可加性(定义 1.2.1)已不够用了, 需要用更强的可列可加性公理代替, 形成如下的公理组。

(1) 非负性公理 对任一事件 A , 必有 $P(A) \geq 0$ 。

(2) 正则性公理 必然事件的概率 $P(\Omega) = 1$ 。

(3) 可列可加性公理 若 $A_1, A_2, \dots$ 是一列互不相容事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

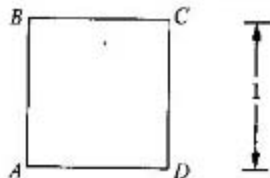
实际情况是: 原苏联数学家柯莫哥洛夫在 1933 年首先提出的公理组就含有可列可加性公理, 为了使我们能更深刻地体会可列可加性公理, 我们分二步叙述。

习 题

1 区分下面的随机变量是离散的还是连续的。

- (1) 小客车上有的轮胎数
- (2) 医院中病人的体温
- (3) 某地区的年降雨量
- (4) 在一小时课上学生提问的次数
- (5) 一个家庭在 7 月份内的用水总量
- (6) 一本书的页数
- (7) 每加仑汽油可使小客车行驶的里程
- (8) 网球拍上绷绳的拉力

2 向一单位正方形(见图)内随机投掷一点, 从正方形左下角 A 点到落点 X 的距离可能取那些值? 它是离散的还是连续的随机变量?



- 3 一人站在正方形的右下角 A (见上图) 并抛一枚硬币, 若出现正面, 则按顺时针方向移动到 B ; 若出现反面, 则按逆时针方向移动到 D , 这个过程一直进行下去, 直到返回 A 处才停止, 设 Y 表示抛硬币的次数, 那末 Y 可能取那些值? Y 是离散的还是连续的随机变量?

- 4 一个盒里有四张纸条, 上面分别写着 1, 2, 3 和 4。随机地从盒中不返回地取出两张纸条, 请写出下面每个随机变量可能的取值。

(1) X = 两个数的和

(2) Y = 第一个数与第二个数之差

(3) Z = 偶数纸条的张数

(4) W = 写着 4 的纸条张数

- 5 随机掷两颗骰子, 以 X 表示其点数之和, 列出 X 可能取的值及其概率, 并求 $P(X \geq 9)$ 。

- 6 从一付扑克牌(52 张) 中有返回地抽一张牌, 这个过程一直进行下去, 直到抽到黑桃为止, 以 Y 表示抽取次数。列出 Y 的可能取值及其概率。

- 7 设 X 表示一位顾客进超市购置商品的件数, X 的概率分布如下

X	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
P	0.01	0.01	0.03	0.09	0.15	0.28	0.26	0.12	0.05

(1) $P(X=4) = ?$

(2) $P(X \leq 4) = ?$

(3) 顾客至少购置 5 件商品的概率是多少? 多于 5 件的概率是多少?

(4) 计算 $P(3 \leq X \leq 6)$ 和 $P(3 < X < 6)$, 请用语言解释, 这两个概率为什么有差别。

- 8 很多工厂都有质量管理程序, 包括对进厂的材料进行检查, 设某计算机制造厂向外厂订购的印刷线路板是 5 块板为一批, 而该厂对每批板都要抽检

2 块, 设 X 为抽检的 2 块板中有缺陷板的块数, 寻求 X 的概率分布. 写出其分布函数, 并画出其图形.

- 9 在打电话中一次通话的时间 X (单位: 分) 是一个随机变量, 经调查认为 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}, & x > 0 \end{cases}$$

当你走进公用电话亭时, 某人恰好在你前面开始打电话. 求你等待时间不超过 3 分钟的概率是多少? 你等待时间超过 5 分钟的概率是多少?

- 10 在非负性公理和正则性公理的基础上, 请用可列可加性公理证明概率的有限可加性. (提示: 先证明 $P(\emptyset) = 0$, 然后证明: 若 $AB = \emptyset$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).

习题解答

- 1 (1), (4), (6) 是离散的, 其它都是连续随机变量.

2 设 A 为原点, AD 为横坐标, AB 为纵坐标, 则落入正方形 $ABCD$ 内的随机点 X 的坐标可记为 (x_1, x_2) , 且 $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, 于是 A 到 X 的距离为 $|AX| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, 它可能在闭区间 $[0, \sqrt{2}]$ 上随机取值, 故它是连续随机变量.

3 Y 只可取 $2, 4, 6, 8, \dots$ 等一切偶数, 若以 “+” 表示顺时针方向走一步, 以 “-” 表示逆时针方向走一步, 即按顺时针方向退一步. 当硬币出现正面, 则 “+” 出现; 当硬币出现反面, 则 “-” 出现. 这样一来, 从 A 点出发又返回 A 点的过程可用 “+” 与 “-” 的一个序列表示, 譬如:

$$“Y=2” = \{(+), (-)\},$$

$$“Y=4” = \{(++), (--), (-+), (+-)\}$$

$$“Y=6” = \{(+++), (---), (+-+), (-+-), (-++)\},$$

$$(-+-), (-++), (-+-), (-++), (-+-), (-++)\}$$

读者可试着写出事件 “ $Y=8$ ” 所包含的一切基本结果, 由此可见, Y 只能取一

切偶数, 不可能取奇数, 譬如“ $Y=1$ ”或“ $Y=3$ ”都不能回到 A 点。故 Y 是离散随机变量。

- 4 (1) X 可能取 3, 4, 5, 6, 7 等五个值。
(2) Y 可能取 -3, -2, -1, 1, 2, 3 等六个值。
(3) Z 可能取 0, 1, 2 等三个值。
(4) W 可能取 0, 1 等二个值。

- 5 X 可能取 2, 3, ..., 12 等 11 个值。它们的概率分别为

$$P(X=i) = \begin{cases} (i-1)/36, & i=2, 3, \dots, 7 \\ (13-i)/36, & i=8, 9, \dots, 12 \end{cases}$$

而 $P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) = 5/18$

- 6 Y 可能取 1, 2, ... 等一切自然数, 取这些值的概率分别为

$$P(Y=x) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{x-1}, \quad x=1, 2, \dots$$

- 7 (1) 0.15; (2) 0.29; (3) 0.71, 0.43; (4) 0.78, 0.43。

- 8 X 只可能取 0, 1, 2 等三个值, X 的分布列为

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = 0.3$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = 0.6$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = 0.1$$

相应的分布函数及其图形如下:

