

## 摘要

在已有的关于时滞系统研究的文献中，一方面，有关减小镇定控制与  $H^\infty$  控制结论保守性的方法有很多，但对于在具体情况下应该如何选择适当的方法还未有分析结果。另一方面，在时滞参数未知情况下对时滞参数进行自适应控制的研究尚少，而且这些自适应控制的方案往往需要对时滞参数估计值进行限制，还要事先求得很难估算的“调整参数”，这些问题使得自适应控制方案的保守性较大、实用性较差。针对现有的时滞系统研究中  $H^\infty$  控制与自适应控制中存在的问题，基于以”Descriptor-form”为基础的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，以线性矩阵不等式（LMI）为主要工具，讨论时滞系统满足  $H^\infty$  控制与自适应控制设计要求的各种反馈控制器的设计方法，全文主要由以下几部分组成：

- 首先介绍时滞系统的发展趋势、研究概况、在时滞系统的研究中所涉及到的一些主要方法和工具。然后提出本文研究的一些主要问题和本文研究所需的一些准备知识。
- 针对带有状态时滞与输入时滞的时滞系统，当时滞参数精确已知时，基于”Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，对已有的保守性较小的带记忆的镇定控制、 $H^\infty$  状态反馈控制的各种求解方法进行分析比较，对有问题的方法进行改进，对在具体情况下基于”Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法该如何选择适当的求解方法以使得保守性较小、实用性较强进行了详细阐述；当时滞参数不能精确已知时，针对已有的时滞相关型的对时滞参数的自适应状态反馈控制器，指出其在保守性、实用性上的缺陷，进行了三步改进：首先使用基于 ”Descriptor-form” 的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，并用适当的放大方法提取时滞参数估计值，使得交叉项放大次数减少，放大额度降低从而减小保守性；再针对已有方法中对时滞参数估计值的限制、必须事先估计很难计算一“调整参数”这两个影响实用性的关键问题，首次提出了一种新型的自适应状态反馈控制方案，通过引入一种新型的带记忆状态反馈控制器，突破以往自适应控制必须让估计值下降的模式，使得对未知时滞参数的自适应律与其当前值相关，从而解决了上述两个问题，大大增强实用性；最后，针对新型自适应控制方案中存在的会引起“无记忆”状态反馈控制的问题，对新型自适应控制器进行了进一步改进，加入两个事先可以确定的参数，使状态反馈控制始终能反映未知时滞参数，这样

在时滞参数对系统影响较大的情况下也能成功的进行新型自适应控制，从而使得新型自适应控制方案的适用范围得到扩展。这些都给时滞系统控制器的设计带来了很大的方便。

- 针对带有多个状态时滞与输入时滞以及上界与各滞后状态的范数相关的非线性环节的时滞系统，在输入时滞参数及非线性环节的上界均未知的情况下，首次对输入时滞参数、未知上界向量同时进行自适应控制。在状态反馈中用带记忆状态反馈控制实现对输入时滞参数的新型自适应控制，而对未知上界向量实现新型自适应控制则是在状态反馈增益中体现，这样就把新型自适应控制从时滞参数推广到了其它参数向量。
- 针对带有状态时滞与输入时滞的线性时滞系统，当滞后常数不能精确已知时，给出基于观测器的对时滞参数的新型自适应控制问题，在观测器中考虑滞后的作用，根据已有的结论虽然从理论上说可以得到状态反馈控制器与观测器的符合分离性原理的解，但在求解中往往正因为分离性原理而给观测器的求解带来保守性。此外，已有的结论不仅有非时滞相关的保守性，而且在自适应律的实现上需要事先确定却又无法确定的参数，对于这些问题，本文在观测器和输出反馈中均考虑滞后的作用，在求解时在采用基于”Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法之后，通过 cone 补线性化算法，可以直接算出控制器与观测器的解，对时滞参数的新型自适应律充分利用了观测器状态，从而真正可以实现。
- 针对带有状态时滞与输入时滞以及分布时滞环节的线性时滞系统，对于符合“有限时滞最普通的线性系统”特性的分布时滞环节，在带记忆状态反馈控制器中包含以分布时滞参数为滞后常数的记忆项和分布时滞记忆项，给出了对该类系统  $H^\infty$  控制的控制器设计问题的解。当分布时滞参数不能精确已知时，在带记忆状态反馈控制器的记忆项和分布时滞记忆项中都包含对未知分布时滞参数的估计项，在此基础上实现对分布时滞参数的新型自适应控制。

本文对主要的设计方案进行了仿真研究。仿真结果表明，本文所给出的控制器设计方案以及关于时滞参数的新型自适应控制方案均可以获得良好的控制效果。

**关键词：**时滞，基于”Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，线性矩阵不等式，渐近稳定， $H^\infty$  控制，新型自适应控制，动态反馈控制，观测器，分布时滞

## Abstract

For the existing research literature of time-delay systems, on the one hand, although there are many methods with regard to reducing conservatism to access the stability of time-delay systems and to achieving the given  $H^\infty$  performance index, there are few analyses about how to choose appropriate approach among these methods under different circumstances. On the other hand, some results have been brought forward about controller design with adaptation to time-delay for time-delay systems with unknown constant time-delays recently, however, some limitation is forced on the estimation value of the unknown time-delay constant and some parameters, which can be obtained by fuzzy steps, are needed calculation to realize adaptive strategy. As a result, much conservatism and many difficulties in realization arise. Aiming at these problems above, using the Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form”, this dissertation devotes on the design of feedback controller for  $H^\infty$  control and adaptive control for time-delay systems by using LMI’s. The main work of this dissertation consists of the following parts:

The development about time-delay systems and general situation about their research are discussed first, and then the main methods and some tools, which will be used in this dissertation, are stated. Furthermore, the major problems, which are studied in this dissertation, are introduced. Finally, some necessary preliminary results in this dissertation are given.

The existing stabilization controller and  $H^\infty$  controller design of time-delay systems, mainly linear systems, with delayed state and input delay, which are derived via memory feedback and “descriptor form” based Lyapunov-Krasovskii functional, are compared and analyzed in calculating if the delay constant can be known exactly. Some improvement has been proposed, and appropriate methods have been summarized to obtain results less conservative and more convenient under different circumstances. If the delay constant is not precisely known, three steps of radical changes have been proposed, which aim at the problems in conservatism and convenience of conventional adaptive control in existence. First, by using the Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form”, the estimation value of the unknown time-delay constant is obtained by appropriate weighting cross products, resulting in less conservatism. Second, aiming at the two important problems of existing results, which are that the estimation value of the unknown time-delay constant is limited to be larger than the true value

of the unknown time-delay constant and that an “adjusting parameter” is forced to be calculated by fussy steps, a new type of adaptive strategy is proposed. By using a new type of memory feedback control, the adaptive strategy is relative to the estimation value, so the estimation value don’t need to always decrease during control course any longer and “adjusting parameter” is unnecessary. Third, considering the new type of memory feedback control can become memoryless feedback control, a furthermore improvement is proposed. By selecting two certain parameters, the unknown delay parameter can always be reflected in the memory state-feedback controller. In this way, the new type of adaptive control can be used successfully when the unknown time-delay constant influences the system greatly, bringing about more convenience about the design of time-delay systems.

For a type of time-delay system with multi delayed states, unknown input delay, and nonlinear uncertainty whose norm is bounded with respect to delayed states but the upper bound is unknown, the new type of adaptive control is first given on the two kinds of unknown parameters. The delay-dependent feedback control, with adaptation to both the input delay constant and the upper bound vector of the nonlinear uncertainty, reflects the estimation of input delay constant in the delayed constant of the memory feedback, and the estimation of the upper bound vector in the matrix of the memory feedback controller. So application of the new type of adaptive strategy has been extended from time-delay constants to vectors.

The design problem about observer-based dynamical output feedback controller for linear time-delay system with state delay and input delay is discussed if the delay constants cannot be known exactly. Although the controller can satisfy the separation principle as the observer has the delay items, much conservatism arises in calculation by using the separation principle. Moreover, other conservatism is inevitable because the delay-independent control was used in existing results, and some parameters can’t be obtained, resulting in the realization of the adaptive control unavailable. So the delayed items are contained both in the observer and in the output controller in this dissertation, after using the Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form”, the matrices of observer and output controller can be calculated directly by means of cone complementarity linearization algorithm. Furthermore, the observer state is made use of in adaptive strategy, so the observer-based dynamical output controller with adaptation to unknown delay constants can be realized in practice.

The  $H^\infty$  controller design of distributed time-delay systems with delayed state, input delay, and the distributed part corresponding to “the most ordinary time-delay systems”, is derived via memory feedback controller. The past distributed information and the PI memory

feedback are all contained in the memory feedback controller. The new type of adaptive control is proposed if the distributed time-delay constant is not known exactly, with the estimation of the distributed time-delay constant in the memory feedback controller.

In this dissertation, simulations are made for major design schemes. Simulation results show the effectiveness of the proposed approaches.

**Key words:** time-delay systems, Lyapunov-Krasovskii functional based on “descriptor form”, linear matrix inequality(LMI), asymptotically stability,  $H^\infty$  control, new type of adaptive control, dynamical control, observer, distributed time-delay systems

## 符 号 表

$R$ :	所有实数的集合
$R^n$ :	$n$ 维实数向量空间
$R^{m \times n}$ :	$m \times n$ 阶实数矩阵空间
$\ \cdot\ $ :	表示向量的范数（在 $R^n$ 中为欧式范数）
$\ \cdot\ _2$ :	表示向量的 $L_2$ 范数（在频域则为 $H_2$ 范数）
$\ \cdot\ _\infty$ :	表示向量的 $L_\infty$ 范数（在频域则为 $H_\infty$ 范数）
$A^T$ :	表示矩阵 $A$ 的转置
$A^{-1}$ :	表示矩阵 $A$ 的逆矩阵
$I_n$ :	表示 $n$ 维单位矩阵
$0_i$ :	表示第 $i$ 个零矩阵
$A < 0$ :	表示矩阵 $A$ 是一个对称负定矩阵
$A \leq 0$ :	表示矩阵 $A$ 是一个对称半负定矩阵
$A < B$ :	表示矩阵 $A - B$ 是一个对称负定矩阵
$A \leq B$ :	表示矩阵 $A - B$ 是一个对称半负定矩阵
$\forall$ :	表示“对所有的”或“对任意给定的”
$\in$ :	表示“元素属于”
$\stackrel{\Delta}{=}$ :	表示“定义为”或“定义等于”
$rank(\bullet)$ :	表示矩阵的秩
$\lambda(\bullet)$ :	表示矩阵的特征值
$C[-\tau, 0]$ :	表示 $[-\tau, 0]$ 上的连续向量函数
$diag(\ )$ :	表示对角矩阵

## 东南大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名: 毕琳 日 期: 2007.7.18

## 东南大学学位论文使用授权声明

东南大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权东南大学研究生院办理。

研究生签名: 毕琳 导师签名: 黄晓峰 日 期: 2007.7.19

# 第一章 绪论

## 1.1 研究背景和意义

在各类工业系统中，时滞现象是极其普遍的，如长管道进料或皮带传输、极缓慢的过程或复杂的在线分析仪等均存在时滞现象。此外，在许多大时间常数的系统，也常用适当的小时间常数加纯滞后环节来近似，这些由于系统本身产生或者由于某种控制目的故意引入的滞后系统都可以归结为时滞系统（time-delay systems）模型。一般地，一个系统中原料或信息的传输也往往导致时滞现象的产生。因此，通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系统、电力系统等都是典型的时滞系统。根据系统本身的特性，时滞通常可分为定常的与时变的、已知的与未知的、确定性的与随机的等几种类型。

时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难，同时时滞的存在也往往是系统不稳定和系统性能变差的根源。但另一方面，由于某些控制目的的需要，人们会在控制中故意引入滞后的作用，使得最终能够达到更加理想的控制效果。正是由于时滞系统在实际中的大量存在，以及时滞系统分析和控制的困难性，使得时滞系统的分析和综合一直是控制理论和控制工程领域中研究的一个热点问题。

在对时滞系统研究的早期，为了能比较清晰地研究，人们通常把实际的时滞系统用简单的数学模型来表示，这样的数学模型通常为一个滞后型微分方程即泛函微分方程。上世纪初一种特殊类型的滞后方程——积分微分方程，在不同的系统中被发现，并随之引入了一套理论<sup>[1-3]</sup>。之后，另一种特殊类型的滞后微分方程——差分微分方程，也得到了关注和发展<sup>[6-15]</sup>。而带有滞后的控制过程首次在文献[17]中得到研究，从那以后，有关时滞系统方面的研究报告不断涌现。其中 1959 年以前有关实时滞系统方面研究的贡献主要集中在文献[18-20]中，其中的相关型控制的理论对后来的研究具有历史意义。随着对系统  $H^\infty$  控制问题研究的日臻完善，人们对时滞系统  $H^\infty$  控制问题也越来越感兴趣，参见文献[21-23]等，这主要是由于在工业控制中一般的系统都或多或少的含有时滞，并且其研究方法与无时滞时不完全相同，因此同时是  $H^\infty$  控制问题研究时滞系统更具有实用价值。文献[24-26]通过早期一般的Lyapunov泛函方法，利用Riccati方程或线性矩阵不等式LMI设计了时滞系统的  $H^\infty$  控制器。Vladimir B. Kolmanovskii在[27]中探讨了线性

时滞系统如何制定Lyapunov-Krasovskii泛函来使系统稳定。而E. Fridman在文献[28]中提出的新型的基于”Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法可以说是为时滞系统的研究开辟了一条新路，由于该种泛函方法所的结论的保守性较小、求解结果一般是线性矩阵不等式的解，因此在此后短短五、六年间，大量的文献[29-41]等通过使用基于”Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法，利用线性矩阵不等式分别讨论了一般线性时滞系统<sup>[29-31]</sup>、分布时滞系统<sup>[36,42,44-46]</sup>、非线性时滞系统<sup>[37,43]</sup>的镇定问题、 $H^\infty$ 控制问题<sup>[29,34]</sup>，以及自适应控制问题<sup>[35]</sup>等。此外，从频域的角度和泛函微分方程的解的角度研究时滞系统也有一些成果<sup>[50-54]</sup>，但是从这两个角度研究没有从时域角度直观，推导较为繁琐，因此目前对时滞系统的研究还是以时域为主。

时滞系统的广泛存在，特别是在工程背景下对时滞的考虑是必不可少的，因此，随着现代工业化程度的不断发展，对时滞系统的研究越来越受到国内外学者、工程实践人员的关注，并被广泛地应用于航空航天、化学工程、机器人、医疗卫生、汽车工业等控制中，在实践中积累了许多成功的经验。下面给出一些时滞系统控制应用的实例，具体说明时滞系统研究的理论意义和实际应用价值。

从来源上分析，在实际系统中主要存在着两种时滞现象：一种是系统本身固有的时间滞后现象即系统的状态滞后，例如大型退火炉的炉温控制，从炉膛温度达到所要求的设定值需要一定的滞后时间，这种滞后使系统本身所具有的。另一种是由构成实际系统的装置（如控制器、执行器和测量元件等）引起的时滞即控制器、测量元件等执行时产生的滞后。此外，有时为了达到某种控制目的而在实际系统中故意引入滞后的作用，如室内温度控制就是这样一种类型的系统，如果不把滞后引入到这样的系统，恒温控制装置就会连续不断的颤动。以下是一种属于第一种类型的简单时滞系统：

**例 1：**考虑某种生物数量的变化情况，假设该生物分成年与非成年两种类型。用  $N(t)$  表示某一时刻的成年生物的密度，假设每一生物从出生到成年需  $h$  个单位时间，每一个成年生物又以固定的速度  $\alpha$  产生后代，并以固定的速率  $\mu$  死亡，每一新生生物的存活率为  $\rho$ ，记  $r = \alpha\rho$ 。那么关于  $N(t)$  数学模型可用如下动态方程来描述<sup>[55]</sup>

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + rN(t-h) \quad (1.1)$$

$N(t)$  的变化率不仅与当前状态有关，还与  $N(t)$  的过去状态有关。(1.1)显然是一个非常简单的线性时滞系统。

而如下的例子可以说是第一类和第二类（有时为了控制效果也会含有第三类）的混

合类型的时滞系统:

**例 2:** 由[56]中可知在液体推进火箭压力发动机中, 关于推进系统到爆炸腔的线性化模型是一个分布时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}_0 x(t) + \bar{A}_1 x(t-h_1) + \int_{-d}^0 A_d(s)x(t+s)ds + B_1 w(t) + B_2 u(t-h_2) \\ z = \text{col}\{\bar{C}_1 x, D_{12} u\} \\ x(t) = 0, \forall t \in [-\max\{h_1, h_2, d\}, 0] \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $x(t) = \text{col}\{x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)\}$ ,  $x_i(t)$ ,  $i=1,2,3$  分别是即时爆炸腔压力的相对偏移量、电容逆流即时块和以稳定值发射推进的即时块比率,  $x_4(t)$  是从稳定值供力的特殊点上的即时压力偏移量和从稳定值发射力的两倍值之间的比率。其中的模型矩阵为

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \rho - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\zeta J} \\ -0.5 \frac{p}{(1-\zeta)J} & 0 & -\frac{1}{(1-\zeta)J} & \frac{1}{(1-\zeta)J} \\ 0 & \frac{1}{E_e} & -\frac{1}{E_e} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = 0, \quad A_d = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{d} & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\zeta J} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{12} = 1.$$

其中的  $\zeta$  是压力供给的分片长度,  $J$  是航线惯量,  $E_e$  是航线弹性参数,  $p$  是稳态压力和稳态发射压力下降值之间的比率,  $\rho$  是爆炸过程的压力指数。 $h_1$ 、 $d$  表示系统各装置的响应滞后,  $h_2$  表示各控制器、执行器、检测装置在线辨识各数据并通过计算最后作用于该系统所造成的滞后。同理,

**例 3:** 在火箭燃烧的控制理论中, 得到方程<sup>[57]</sup>

$$\dot{u}(t) + (1-n)u(t) + nu(t-\tau) = 0 \quad (1.3)$$

**例 4:** 在数理统计中, 关于资本主义经济的周期性危机有过下述形式的方程<sup>[58]</sup>

$$\dot{u}(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(t) \quad (1.4)$$

显然, 经济规律起作用是需要一定时间的, 而经济社会做出相应的反应产生经济现象也是需要时间的。

化学反应中的例子:

**例 5:** 在适当的假定之下, 下述方程(1.5)可以作为: (1)放射性同位素和示踪蛋白在生物体内的分布问题<sup>[59]</sup> (属于第一类型), (2)化学工程中染色水通过若干管子循环时来自中

央贮槽的染料混合问题<sup>[60]</sup>, (3)一类运输调度问题<sup>[61]</sup>等的数学模型

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i) \quad (1.5)$$

其中  $x \in R^n$  为  $n$  维向量函数,  $A_i$  都是  $n \times n$  矩阵,  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , 假设  $\tau_0 = 0$ .

由以上例子可以看出时滞系统在实际中是普遍存在的, 因而对时滞系统的研究有着非常广泛的意义。使系统稳定是控制系统中普遍的要求, 而  $H^\infty$  控制则反映了系统在系统含有不确定性因素或在外界干扰影响下仍能保持闭环系统稳定的特性, 因此时滞系统的  $H^\infty$  控制研究更具有实用意义。另一方面, 在实际中, 时滞系统的时滞参数并不能确切测量到的, 而现有的大部分针对时滞参数不确切已知的情况多是找到时滞参数的稳定界, 而对时滞参数进行自适应控制的研究尚少, 已有的自适应控制存在着保守性较大、要事先确定的参数较难估算、对时滞参数估计值限制较强的缺点, 因此怎样在时滞系统的自适应控制、自适应  $H^\infty$  控制上有所突破, 会给理论与实践带来重大而深远的意义。

## 1.2 时滞系统的研究概况

有关时滞系统的研究问题一直受到控制界的广泛关注, 并取得了丰硕的成果。无论在工程实践还是理论研究上, 处理时滞系统控制问题的方法也是多种多样的。目前关于时滞系统的研究从分析的角度可分为两类: 依赖于时滞的 (delay-dependent) 和不依赖于时滞的 (delay-independent)。有关不依赖于时滞的研究早在二十世纪初就已经开始, 有关这方面的研究成果已较为成熟, 而关于依赖于时滞的研究直到二十世纪九十年代才开始起步, 现在正是广大学者关注的热点之一。对于有关时滞系统控制器设计方面的研究同样也分为依赖于时滞和不依赖于时滞两种类型, 对于依赖于时滞的控制器设计方案, 当滞后较小时具有较小的保守性, 同样也是广大学者研究的热点之一。目前大家对时滞系统的研究主要集中在有关稳定性、鲁棒性、 $H^\infty$  特性、无记忆与带记忆的控制器设计等方面, 使用的工具主要有 Riccati 矩阵方程 (或不等式) 与线性矩阵不等式 (LMI)。特别是线性矩阵不等式的广泛应用, 由于很多问题的求解都能化简为一个线性矩阵不等式及软件 matlab 中的 LMI 工具箱的方便使用, 使得有关时滞系统的控制问题的研究得到了飞速发展。

### 1.2.1 时滞系统的稳定性<sup>[62]</sup>

稳定性最早起源于力学。一个刚体或一个力学系统具有某一平衡状态，在有微小的干扰力作用下，这种平衡状态或者几乎保持，或者受到破坏，这就是稳定与不稳定的雏形。稳定性的最早的一个原理是以Torricelli命名的：物体的重心处于最低位置的平衡是稳定的。后来逐步发展到研究运动的稳定性。所谓运动，不仅仅局限于物体的运动，任何事物的变化都是一种运动，都存在是否稳定的问题。因此运动稳定性的研究逐渐从力学进入到更为广泛的各种实用的领域。

运动稳定性理论的奠基人是俄国学者李雅普诺夫（А. М. Ляпунов 1857–1918）。是他首次给出了运动稳定性的精确定义，建立了运动稳定性一套严密的理论。他创立了两个方法（李雅普诺夫第一、第二方法），其中第二个价值最大、发展最快，因为第二方法无需求出运动微分方程的通解——精确的或者近似的，而只要利用一个函数（李雅普诺夫函数），即可直接判定运动的稳定性。这一方法叫直接方法，我们通常说的运动稳定性的理论，主要就是指的这种方法的理论。

在李雅普诺夫逝世以后，直接法的理论经过苏联等国学者的相继研究，到现在已有了很大的发展。在理论上已经从原来的常微分方程发展到泛函微分方程、随机微分方程，从有限维空间发展到无限维空间；在应用上，已经从离散系统发展到连续介质系统，从力学领域发展到自控、机械、航空、航天、电力、化工、生态、经济、管理和系统工程等多个领域。我国的运动稳定性研究是在50年代由秦元勋以及张学铭、徐淞庆等倡导下开展起来的。自三十年代以来许多研究者在力学系统的稳定性、控制系统的稳定性、大系统的稳定性以及基本理论等多个方面取得了突出的成绩。

迄今为止，关于滞后系统的稳定性判据根据与滞后信息的关系而大致分为两类：一类是滞后无关型（delay-independent）稳定性判据，此结果在表述上不含有滞后参数，即所获条件对于任意大小的时滞都适用，其形式比较简单，但对滞后参数较小的系统结果比较保守；另一类是滞后相关型（delay-dependent）稳定性判据，此种方法的结果在表述形式上明显含有滞后参数，即控制器的存在性依赖于时滞参数的约束，因而降低了保守性，结果也比较精确，尤其当滞后参数较小时，它能给出较优的结果，缺点是结果的形式比较复杂，计算也比较繁琐。

时滞系统的控制器根据控制器中是否含有滞后信息可以分为两类：一类是无记忆反馈控制器，这类控制器是目前众多学者研究的重点，它在滞后对系统影响较小的情况下

尤为有效，但对于滞后影响较大的系统有时就显得无能为力；另一类是带记忆状态反馈控制器，有关这类控制器的研究目前问津者较少，这类控制器可以控制一些无记忆控制器无法控制的滞后对系统影响较大的系统，有关这方面的详细情况请参阅第三、五章。

对动态系统既可用输入输出关系描述，也可用状态空间描述，由此而定义系统的外部稳定性与内部稳定性。内部稳定性通常是指在外部输入为零时系统状态的李雅普诺夫稳定性。外部稳定性通常是指有界输入导致有界输出，即BIBO稳定性。对于线性系统而言，内部稳定性可推出外部稳定性，但外部稳定性只有系统可控可观时可推出内部稳定性，即当系统可控可观时内部稳定性与外部稳定性是等价的。本文所研究的稳定性问题都是内部稳定性，而  $H^\infty$  控制则与外部稳定性问题有关（但本文仅限于系统满足  $H^\infty$  性能指标的研究）。

### 1.2.2 基于“Descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法

由上节可知，李雅普诺夫第二方法所使用的 Lyapunov 泛函对于判定系统稳定起着重要的作用。实际上，泛函的选取也决定了结论的保守性，因为根据李雅普诺夫第二方法，在对泛函求导以后要使其为非正并且在除原点  $O$  之外在所有的轨线上等于零不成立来判断系统是否稳定。在研究时滞系统稳定性时，泛函的求导会带来一些交叉项，要放大这些交叉项来得到时滞相关型稳定判据，显然放大交叉项会带来结论的保守性，如何使交叉项放大次数少、放大界小是近年来研究时滞系统的学者关注的热点。在此基础上，以 E. Fridman 提出的基于“Descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法开始吸引众多学者关注。

E. Fridman 在文献[28]中提出的基于“Descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，通过“Descriptor form”在泛函求导时完全反映系统结构，并“集中”的放大了原本分散的交叉项，放大的次数、放大的上界都大大降低，这就使结论的保守性有了本质的突破。此后，不少专家开始关注在使用基于“Descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法后，该怎样计算控制矩阵而不影响保守性。首先，是对放大交叉项的方式的改进，文献[63]和[64]都相继对常用[24]中的放大方式进行了缩小上界的改进，但由此引出的控制矩阵的求解也增加了难度。已有的解决方法可分为两种：一种是文献[29,32]中所使用的调整参数法，[29]中的方法是让放大过程中产生的矩阵与泛函原有的二次型矩阵之间呈线性关系，而[32]则是让体现“Descriptor form”的附加矩阵与泛函原有的二次型

矩阵之间呈线性关系，这些线性关系都通过在仿真中调整参数来确定，给计算带来了简便但有一定保守性；另一种是文献[34]和[33]中所使用的通过 cone 补线性化算法来计算控制矩阵的方法，这种方法避免了前一种方法要设定线性关系带来的保守性，但要通过一定次数的迭代来得到一个 LMI 的优化问题的解，迭代次数并不能很快确定，有可能会造成在相当长一段时间内找不到解的结果（参阅第三章）。

为了避免放大交叉项，从根本上解决保守性问题，文献[65]提出了一种通过在泛函求导时附加两个矩阵来反映系统结构、同时不放大任何交叉项的方法，这种方法在单时滞系统的稳定界问题上可达到最小的保守性，但要求解控制矩阵时同样面临着上面使用“Descriptor form”的Lyapunov-Krasovskii 泛函方法基础上的两种求解方式的选择。对于多时滞系统，文本的研究将表明这种在处理单时滞系统时能取得最小保守性的方法在遇到多时滞参数时求解控制器时计算将会更加复杂繁琐（参见第三章）。

### 1.2.3 时滞系统的 $H^\infty$ 控制问题<sup>[62]</sup>

在控制工程中人们最感兴趣的主要问题之一就是如何设计一个反馈控制律使得系统是渐近稳定的，且尽可能减少干扰输入、系统参数不确定性等对闭环系统的影响，解决这一问题的行之有效办法之一就是  $H^\infty$  控制方法。

$H^\infty$  控制理论起源于文献[66]（1981），Zames 在[66]中利用频域方法研究了线性系统的  $H^\infty$  控制问题，他首次用明确的数学语言描述了基于经典设计理论的优化设计问题。他提出了用传递函数阵的  $H^\infty$  范数来记述这种优化指标。假设传递函数阵  $G(s)$  为  $s$  右半平面上解析的有理函数阵。定义

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)]$$

其中  $\bar{\sigma}(\bullet)$  表示矩阵的最大奇异值，即  $\bar{\sigma}(G) = \{\lambda_{\max}(G^*G)\}^{1/2}$ ， $G^*$  为  $G$  的转置共轭阵， $\lambda_{\max}$  为最大特征值。性能指标定义为

$$J = \inf_k \|G(s)\|_\infty$$

Zames 提出了使上式定义的性能指标  $J$  最小的问题，但是没有能给出行之有效的解法。

从那以后，众多学者投身于有关  $H^\infty$  优化设计理论的研究。十多年前人们曾怀疑能否求得这种设计的一般解，而今天，研究者们不仅已经提出了多种求解方法，而且已形成了较为完整的理论体系<sup>[72]</sup>，使得  $H^\infty$  控制理论得到了迅猛发展。从 1981 年 Zames 提出

$H^\infty$  控制思想至今,  $H^\infty$  控制理论的研究主流大致可分为三大阶段从 1981 年到 1984 年为止为第一阶段。在此阶段, 人们把在控制系统内部稳定的控制器集合中寻求一个使传递函数矩阵的  $H^\infty$  范数最小的解的问题<sup>[67-70]</sup>, 通过稳定化控制器的 Youla 参数化变换成为模型匹配或一般距离问题, 然后再将其变换为 Nehari 问题来求解。设计是基于传递函数矩阵的 (虽然计算时也采用状态空间描述), 其中代表性工作是 1984 年 Golver 等人提出的所谓“1984 方法”<sup>[73]</sup>; 到 1988 年为止为第二阶段, 在此期间  $H^\infty$  控制产生了突破。此时人们不是采用输入输出传递函数矩阵的描述, 而是直接在状态空间描述上进行(虽然  $H^\infty$  优化设计指标本身是基于输入输出描述的)。此类方法不仅设计过程简单, 计算量小, 而且所求得的控制器的阶次较低、有明显结构特性。Doyle 等人在[71] (1989 年) 中利用状态空间方法研究了准优化  $H^\infty$  控制问题, 这可以认为是线性系统  $H^\infty$  控制问题研究中的一个重要里程碑, 他们证明了  $H^\infty$  设计问题的解可以通过解两个适当的代数 Riccati 方程得到, 该论文的发表标志着  $H^\infty$  控制理论的成熟——这种解法的证明是建立在状态空间理论之上的, 迄今为止,  $H^\infty$  设计方法主要依赖于这种解法; 从 1989 年至今为第三阶段, 是  $H^\infty$  控制理论的完善与推广时期。当时 Doyle 等人只给出了  $H^\infty$  控制的“2-Riccati”方程的解, 而没有给出具体的推导过程。1988 年之后的几年中出现了系统的推导方法。其中之一就是  $H^\infty$  控制的纯时域的解法出现, 包括微分对策方法<sup>[74]</sup>和极大值原理方程<sup>[75]</sup>。这两种方法不仅可以解决线性时不变系统的  $H^\infty$  控制问题, 还可以用来处理时变系统、分布参数系统、非线性系统、奇异摄动系统等。从  $H^\infty$  控制思想来看, 应用微分对策方法非常自然。日本学者木村英纪基于网络共轭化 (Conjugation) 的概念, 提出了证明更为简洁的解法<sup>[76]</sup>, 这个解法后来被进一步完善和发展。不仅如此, 这些设计理论的开发者们还积极同美国 The Math Works 公司合作, 开发了 MATLAB 控制软件包 (Control Tool), 使  $H^\infty$  控制理论真正成为实用的工程设计理论。

$H^\infty$  理论最初是针对设计控制器在保证闭环系统各回路稳定的条件下使相对于噪声干扰的输出取极小的问题而建立起来的一种优化方法<sup>[66]</sup>。进一步研究表明, 含一个未建模动态的鲁棒控制问题、模型匹配问题、跟踪问题以及加权灵敏度问题等都可以转化为标准  $H^\infty$  控制问题<sup>[73]</sup>, 因而  $H^\infty$  问题提出后引起了控制界的极大兴趣。经过研究人员十多年的努力,  $H^\infty$  控制理论获得了令人瞩目的发展, 逐步形成了自己完整的一套理论体系, 成为分析和设计不确定系统的强有力的工具和控制理论的重要组成部分, 已经对并且还将对控制理论和应用的发展产生举足轻重的影响。

$H^\infty$  方法有几个特点：1) 尽管它回到了输入输出模型，但仍保留了状态空间方法中某些计算上的优点；2) 设计者可以在很大程度上控制由系统产生的频率响应的形状，这使该方法对工程界很有吸引力；3) 许多控制问题都可以统一于标准  $H^\infty$  控制问题，如灵敏度极小化问题、鲁棒镇定问题、混合灵敏度优化问题、跟踪问题、模型匹配问题等均可归于标准  $H^\infty$  问题<sup>[77]</sup>。  $H^\infty$  控制理论已被尝试应用于交流调整系统、倒立摆以及空间飞行器的姿态控制中，其有效性已得到越来越多的证实。因此，理论较好的解决了具有非结构式未建模动态系统的鲁棒分析及综合等问题。

$H^\infty$  控制目前的研究热点主要有如下几方面：(1) 离散系统  $H^\infty$  控制理论的研究；(2) 非线性系统的  $H^\infty$  控制；(3)  $H^\infty$  控制各种算法之间的关系及进一步发展；(4)  $H^\infty$  控制理论的应用。

#### 1.2.4 时滞系统的自适应控制问题

由 1.2.1 节可知，时滞相关型控制在时滞参数较小时能取得保守性较小的结论，而带记忆控制又能在时滞对系统影响较大的情况下能比无记忆控制更能保证系统稳定。因此，在实践中，时滞参数已知会给控制带来很大便利，但事实上，在很多实际情况下时滞参数往往不能精确已知或测量（有时仅知道时滞参数的上下界），这就给实现带记忆控制、时滞相关型判据造成了困难。目前很多针对时滞参数不确定的时滞系统的研究只是找出稳定界，而没有进行自适应控制<sup>[47]</sup>，因此只能进行无记忆控制。而对于带记忆控制器的设计，一般地，如果时滞参数的上界已知，在泛函求导过程中，可通过放大得到与时滞参数上界相关的判据。比如文献[48]中就充分利用不确定时滞参数本身及其导数的上界，对泛函求导后得到的 LMI 进行了放大，得到的结果比非时滞相关型具有较小的保守性，但其采用的基于“削减方法”的带记忆控制需要对系统矩阵与时滞之间的关系进行限制，适用范围较小。

1998 年文献[78]中通过用时滞参数的一个估计值来代替原来的未知时滞量，实现了一种对具有未知时滞参数的系统的带记忆控制，然而这种控制器的存在性与滞后常数估计的准确程度有关，同样也具有一定的局限性。之后，2001 年在文献[79]中首次中提出了一种对时滞参数的自适应控制方案，基于 LMI 方法，采用无记忆与带记忆的时滞相关型复合状态反馈控制，其中记忆反馈中的时滞量为实际量的实时估计值，这就使得对时滞系统设计带记忆反馈控制时不必已知时滞常数的精确值。但是，这种自适应控制还

不完善，有时甚至难以实现。这是因为如下的原因：第一，在泛函求导后过程中，为保证系统稳定，不得不限制时滞参数的实时估计值要保持不小于其真实值；第二，为了保证这一限制能在控制过程中一直成立，必须事先估算一个很难计算的“调整常数”，从[79]中可以看出估算这个“调整常数”的过程虽然写的比较清楚但其中还是有不能事先知道的参数；第三，从推导过程中可以看出为得到自适应律，必须把含有时滞参数估计值的二次型项全部放大转换为以时滞参数实时估计值与其真实值之差为系数的二次型项，在这个过程中放大了多次不等式，这影响了最终结果的保守性；第四，在所要求的LMI中，存在若干个需要事先确定的正定矩阵，在所提供的实例中并没有说明这些矩阵是怎样得到的。因此这种对时滞参数的自适应控制虽然对在时滞参数未知的情况下引入带记忆控制作了本质上的突破，但是还不成熟，实用性较差。

2002年，文献[80]对一类不确定多时滞非线性系统进行了自适应 $H^\infty$ 鲁棒控制，这类系统的非线性不确定项满足范数有界，而且某一不确定项的范数上界与以和该不确定项相关的时滞参数为时滞量的状态的范数成线性关系，但这个线性常数未知，由于是多时滞系统，因此各不确定项的上界系数组成一个未知向量，要对这个向量进行自适应 $H^\infty$ 鲁棒控制还属首次。虽然在这篇文献中，没有限制未知向量的实时估计值必须不小于其真实值，也不用估算“调整常数”，但仍存在需要事先确定某些未知矩阵、参数，及所的结论为非时滞相关型等问题影响到了保守性、实用性。

当系统状态不可测且时滞参数未知时，就要进行基于观测器的对时滞参数自适应控制，文献[81]及[82]中分别给出了时滞相关型、非时滞相关型的自适应控制，但都存在和[79]中相同的问题。而文献[83]中实现的对未知时滞参数的自适应控制虽然不存在[19-82]中的问题，但却对控制输入却有着严格的限制——必须是关于输入时滞参数的已知函数，而且必须在线得到滞后的输入，这在输入时滞量未知的情况下是不能实现的。

因此对时滞系统的自适应控制的研究热点有以下几个方面：(1) 如何突破对未知时滞参数估计值的限制，当然也不需要估算保证这一限制一直成立的“调整常数”；(2) 如何不出现需要事先确定的未知矩阵、参数；(3) 如何对除时滞参数以外的未知量也能进行自适应控制，像[80]中的对非线性不确定项上界的自适应控制，如果同时出现未知时滞参数和未知不确定项，该怎样同时对两种未知量进行自适应控制；(4) 对于[81,82]等文献中的复杂情况：系统状态不可测且时滞参数未知，此时该如何进行基于观测器的自适应控制。

### 1.2.5 线性矩阵不等式

用Riccati方程方法研究线性时滞系统的文献很多<sup>[84-86]</sup>，但应用时普遍都遇到了参数调整的困难，而线性矩阵不等式（LMI）方法完全可以避免这一困难<sup>[87-89]</sup>，这正是应用线性矩阵不等式的优点之一。

所谓 LMI 方法是指：把系统镇定、 $H^\infty$  控制等问题的可解性归结为 LMI 的可解性，并利用 LMI 的解构造出控制器。LMI 方法具有如下优势：

- (1) 具有有效的有限维凸优化算法，如内点算法，其良好的数值特性与 Riccati 方程方法相当<sup>[90,91]</sup>；
- (2) 可以统一处理若干不同的控制问题，如它把镇定、 $L_\infty$  控制、 $H^\infty$  控制、协方差上界控制、LQG 控制等问题归入统一的框架<sup>[92]</sup>；
- (3) 对一些控制问题、可以设计出所有满足稳定性和其他性能要求的控制器，为多目标混合控制问题的研究提供了便利<sup>[93,94]</sup>；
- (4) 便于设计出固定的阶次和固定结构的控制器，有利于控制器的降阶和结构简化<sup>[90,95]</sup>。

这些特点使 LMI 方法处理包括  $H^\infty$  控制问题在内的一些控制问题的能力超过了人们熟知的其它方法。更重要的是，LMI 方法可以统一处理奇异和非奇异  $H^\infty$  控制问题。自九十年代以来，LMI 理论已成为现代控制理论中最为活跃和最被关注的方向之一<sup>[90,96]</sup>。

大约在 100 多年前，线性矩阵不等式就已经用来分析动态系统的稳定性。Lyapunov 在他的代表作中发表了著名的 Lyapunov 理论，指出微分方程：

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (1.6)$$

稳定（即所有的轨线都趋于零）的充分条件为存在正定矩阵  $P$  满足：

$$A^T P + PA < 0 \quad (1.7)$$

我们称(1.6)为关于  $P$  的 Lyapunov 不等式，这实际上就是线性矩阵不等式的一种特殊情况，而且可以看成是线性矩阵不等式的一个重要的里程碑。

第二个重要的里程碑发生在上世纪 40 年代。Lur'e, Postnikov 以及苏联其他的一些科学家们首次把 Lyapunov 方法运用到了实际问题中，如控制工程中，尤其是在控制器含有非线性的控制稳定性分析中。尽管他们没有明确提出 LMI，但在他们的稳定性准则中实际上已经含有 LMI 的形式。

第三个重大突破发生在 60 年代初期，Yakubovich, Popov, Kalam 以及其他的一些

研究者们，利用我们现在称之为正实性引理成功简化了LMIs的解，导出了Popov准则，Tsyplkin准则以及其他准则。其中Yakubovich在这一方面做了很大的贡献<sup>[97,98]</sup>。

近年来，由于控制问题求解的复杂性，往往只能得到一个非线性的矩阵不等式，为了能得到可以求解的LMI会不得不对某些矩阵进行限制，从而给结论带来了保守性，对此L. E. Ghaoui等研究者提出了一种“圆锥补线性化”算法<sup>[99]</sup>，它能将非凸可行解问题转换成一个线性的求最小值的问题。虽然求解过程复杂了一些，但保守性可以得到保证，因此也逐步被一些研究者所运用<sup>[33,34]</sup>。因此，现在线性矩阵不等式已经成为了控制界的热点和难点之一。

### 1.3 主要工作

本文的主要工作是研究时滞系统的稳定性与镇定问题、 $H^\infty$ 控制问题、滞后常数的自适应控制问题、线性时滞系统基于观测器的动态输出反馈控制器的设计问题以及分布时滞系统的 $H^\infty$ 控制问题。安排如下：

第一章概述了研究的背景、时滞系统的研究意义、问题的提出以及有关时滞系统的研究概况；

第二章主要介绍了本文研究所需的一些准备知识以及后面各章在证明过程中需要用到的一些引理；

第三章讨论了带有状态时滞与输入时滞的时滞系统，当时滞参数精确已知时，基于“Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法，对已有的保守性较小的带记忆的镇定控制、 $H^\infty$ 状态反馈控制的各种求解方法进行分析比较，对有问题的方法进行改进，对在具体情况下基于“Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法该如何选择适当的求解方法以使得保守性较小、实用性较强进行了详细阐述；

第四章当时滞参数不能精确已知时，针对已有的时滞相关型的对时滞参数的自适应状态反馈控制器，指出其在保守性、实用性上的缺陷，进行了第一步改进：使用基于“Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法，并用适当的放大方法提取时滞参数估计值，使得交叉项放大次数减少，放大额度降低从而减小保守性；

第五章对时滞参数的自适应控制进行第二步改进：针对已有方法中对时滞参数估计值的限制、必须事先估计很难计算一“调整参数”这两个影响实用性的关键问题，首次提出了一种新型的自适应状态反馈控制方案，通过引入一种新型的带记忆状态反馈控制

器，突破以往自适应控制必须让估计值下降的模式，使得对未知时滞参数的自适应律与其当前值相关，从而解决了上述两个问题，大大增强实用性。接着进一步改进：针对新型自适应控制方案中存在的会引起“无记忆”状态反馈控制的问题，对新型自适应控制器进行了进一步改进，加入两个事先可以确定的参数，使状态反馈控制始终能反映未知时滞参数，这样在时滞参数对系统影响较大的情况下也能成功的进行新型自适应控制，从而使得新型自适应控制方案的适用范围得到扩展。这些都给时滞系统控制器的设计带来了很大的方便。

第六章针对带有多个状态时滞与输入时滞以及上界与状态时滞相关的非线性环节的时滞系统，在输入时滞参数及非线性环节的上界均未知的情况下，首次对输入时滞参数、未知上界向量同时进行自适应控制。在状态反馈中用带记忆状态反馈控制实现对输入时滞参数的新型自适应控制，而对未知上界向量实现新型自适应控制则是在状态反馈增益中体现，这样就把新型自适应控制从时滞参数推广到了其它参数向量。

第七章针对带有状态时滞与输入时滞的线性时滞系统，当滞后常数不能精确已知时，给出基于观测器的对时滞参数的新型自适应控制问题，在观测器中考虑滞后的作用，根据已有的结论虽然从理论上说可以得到状态反馈控制器与观测器的符合分离性原理的解，但在求解中往往正因为分离性原理而给观测器的求解带来保守性。此外，已有的结论不仅有非时滞相关的保守性，而且在自适应律的实现上需要事先确定却又无法确定的参数，对于这些问题，本文在观测器和输出反馈中均考虑滞后的作用，在求解时在采用基于“Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法之后，通过 cone 补线性化算法，可以直接算出控制器与观测器的解，对时滞参数的新型自适应律充分利用了观测器状态，从而真正可以实现。

第八章针对带有状态时滞与输入时滞以及分布时滞环节的线性时滞系统，对于符合“有限时滞最普通的线性系统”特性的分布时滞环节，在带记忆状态反馈控制器中包含以分布时滞参数为滞后参数的记忆项和分布时滞记忆项，给出了对该类系统  $H^\infty$  控制的控制器设计问题的解。当分布时滞参数不能精确已知时，在带记忆状态反馈控制器的记忆项和分布时滞记忆项中都包含对未知分布时滞参数的估计项，在此基础上实现对分布时滞参数的新型自适应控制。

第九章为全文总结，并提出了一些有待解决的问题。

本文的大部分结果已发表于国内的一些有关刊物与会议论文集或已被录用待发表。

## 第二章 预备知识

本章将介绍  $H^\infty$  范数及控制以及 Lyapunov 稳定性的一些基本概念和后面几章要用到的一些引理，其目的是为以后的讨论作准备。

### 2.1 $H^\infty$ 范数的基本概念

#### 2.1.1 范数

设  $X$  是复数域  $C$  上线性空间，若在  $X$  上定义实值函数  $f(x):x \rightarrow R$  满足下列条件：

- (1)  $f(x) \geq 0, \forall x \in X$  (正性);
- (2)  $f(\alpha x) = |\alpha| f(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in R$  (齐次性);
- (3)  $f(x+y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in X$  (三角不等式);
- (4)  $f(x) = 0$  当且仅当  $x=0$  (正性),

则称  $f(x)$  为  $x$  的范数，记为  $\|x\|$ 。

#### 2.1.2 奇异值

设  $A \in C^{m \times m}$ 。根据线性代数基本知识可知， $m \times m$  方阵  $A^*A$  和  $n \times n$  方阵  $AA^*$  均为非负定阵。且有：

$$\text{rank}(A^*A) = \text{rank}(AA^*) = \text{rank}A$$

设  $\text{rank}A = r$ ，则  $A^*A$  和  $AA^*$  有个  $r$  相同的正特征值，即：

$$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(AA^*) > 0, \quad i=1, 2, \dots, r$$

而  $A^*A$  的其余  $m-r$  个特征值和  $AA^*$  的  $n-r$  个特征值均为零。

定义：称  $\sqrt{\lambda_i}$  为  $A$  的非零奇异值(singular value)，其中  $\lambda_i$  为  $A^*A$  的特征值，记为  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i=1, 2, \dots, r$ 。

在不至于引起混淆的前提下，称  $\sigma_i$  为  $A$  的奇异值。

### 2.1.3 $H^\infty$ 范数

$H^\infty$  空间由  $C \rightarrow C^{mn}$ , 且满足:

$$\sup\{\bar{\sigma}[G(s)] | \operatorname{Re} s > 0\} < \infty \quad (2.1)$$

的函数矩阵  $G(s)$  全体所构成的空间<sup>[1]</sup>。定义上式左端的值为  $G(s)$  的范数, 也记为  $\|G(s)\|_\infty$ 。

这里  $\bar{\sigma}(A)$  表示  $A$  的最大奇异值:

$$\bar{\sigma}(A) = \max_i \{\lambda_i[A^* A]\}^{1/2} \quad (2.2)$$

由复变函数极大模原理, (2.1)实际上等价于

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}\{G(j\omega)\} \quad (2.3)$$

对于标量系统, 上式右端等价于幅频特性的极大值。

考虑如下线性定常系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), x(0) = 0 \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $x(t) \in R^n$  为状态向量,  $w(t) \in R^m$  为干扰输入向量,  $z(t) \in R^m$  为系统受控输出向量,  $A, B, C$  为具有适当维数的矩阵。令  $G(s) = C(SI - A)^{-1}B$  为线性系统(2.4)的传递函数矩阵。若  $A$  稳定, 我们可以用两种方法给出  $G(s)$  的  $H^\infty$  范数的定义。

① 频域法:  $G(s)$  的  $H^\infty$  范数  $\|G(s)\|_\infty$  可定义为:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} s > 0} \bar{\sigma}[G(s)] = \sup_{\omega \in R} \bar{\sigma}[G(j\omega)]$$

其中  $\bar{\sigma}(\bullet)$  表示矩阵的最大奇异值。

② 时域法: 用零初始条件时输出能量与输入能量之比来表示  $G(s)$  的  $H^\infty$  范数, 即:

$$\|G(s)\|_\infty = \left( \max_{w \neq 0} \frac{\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt}{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt} \right)^{1/2}$$

可以证明, 对于线性时不变系统而言, 上述两种关于  $G(s)$  的  $H^\infty$  范数是等价的。

由于上述第二种定义仅与  $L_2$  诱导范数有关, 所以它容易推广到时滞系统与非线性系统的情形。

## 2.2 $H^\infty$ 控制问题

各种  $H^\infty$  控制问题都可以化成如图 2.1 所示的标准问题，图中  $w$ 、 $z$ 、 $u$  和  $y$  均为向量值信号：

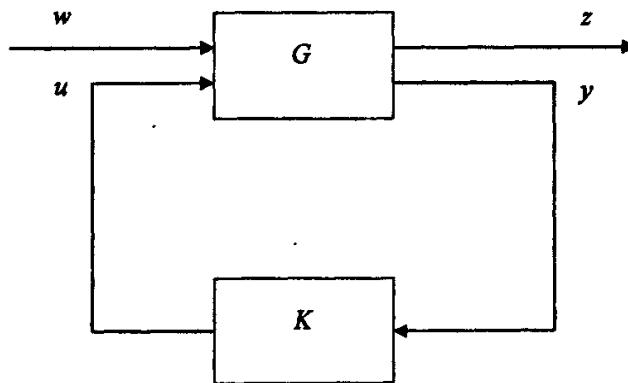


图 2.1

$w$  是  $n_1$  维外部输入信号，一般包括指令（参考信号），干扰或传感器噪声。 $z$  是  $n_2$  维受控输出，通常包括跟踪误差，调节误差，执行机构输出。 $u$  是  $m$  维控制输入信号。 $y$  是  $p$  维量测输出信号，通常指传感器输出及指令信号等。

图中  $G$  和  $K$  分别表示广义受控装置和控制器。前者是系统的给定部分，而控制器  $K$  有待设计。假设  $G(s)$  为系统的传递函数矩阵，则系统的  $H^\infty$  控制的标准框架或标准问题是：求一真有理的矩阵  $K$ ，使得闭环系统稳定，且闭环系统的  $H^\infty$  范数极小。

对于如下线性时不变系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), x(0) = 0 \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

它的  $H^\infty$  控制问题等价于寻找控制器：

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.6)$$

使得(2.5)的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2K)x(t) + B_1w(t) \\ z(t) = (C + DK)x(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

的  $A + B_2F$  稳定且  $w - z$  的  $H^\infty$  范数（或  $L_2$  诱导范数）极小。

## 2.3 Lyapunov-Krasovskii 稳定性

### 2.3.1 时滞系统稳定性定义

考虑一个不受外力作用的系统。系统的描述方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), t > t_0 \\ x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \theta \in [-r, 0] \end{cases} \quad (2.8)$$

其中  $f(x, t) \in R^n$ 、 $\phi(\theta) \in R^n$ ， $\theta \in [-r, 0]$  为有界连续的向量函数。方程(2.8)的解可表示为

$$y(t) = x(t_0, \phi, f) = x_i(t_0, \phi) \quad (2.9)$$

它是一个关于  $\theta \in [-r, 0]$  的函数，依赖于初始时刻  $t_0$  及  $t_0$  时刻的函数  $\phi$ ，其中  $x_i = x(t + \theta), \theta \in [-r, 0]$ 。假定  $f(0, t) = 0$  对  $t \in R$  都成立，如果对每个  $t_0 \in R$ ， $\varepsilon > 0$ ，都存在一个实数  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ，使由  $\phi \in \beta(0, \delta)$  的任意初态函数  $\phi$  出发的运动对所有时间  $t \in R$  满足  $x_i(t_0, \phi) \in \beta(0, \varepsilon)$ ，那么则称系统(2.8)的解函数  $x=0$  是稳定的。其中  $\beta(0, \varepsilon) = \{x | dist(x, 0) \leq \varepsilon\}$ ，而  $dist(x_1, x_2)$ ， $x_1, x_2 \in C$ ，表示函数  $x_1, x_2$  之间最小的距离。

上述定义中，如果  $\delta(\varepsilon, t_0)$  与初始时刻  $t_0$  的选择无关，即为  $\delta(\varepsilon)$ ，则称(2.8)的零解是一致稳定的。若对  $\forall \varepsilon > 0$  存在  $b(t_0)$ ，且存在  $T(t_0, \varepsilon, \phi)$  使当  $\|\phi\| \leq b(t_0)$  时对  $\forall t \geq t_0 + T(t_0, \varepsilon, \phi)$  满足  $x_i(t_0, \phi) \in \beta(0, \varepsilon)$ ，则(2.8)的零解是吸引的。进一步说，如果零解是稳定的、吸引的，则称(2.8)的零解是渐近稳定的，其中  $\|\phi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|$ 。

### 2.3.2 Lyapunov-Krasovskii 稳定性基本原理

对于不受外力作用的动态系统(2.8)，设  $u(s)$ 、 $v(s)$ ， $s \in R^+$  为严格单调增加的  $k$  类函数， $W: R^+ \rightarrow R^+$ ，若存在一个  $R \times C \rightarrow R$  的连续泛函  $V(t, \phi)$  使得

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(|\phi(0)|) \quad (2.10)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -W(\|\phi(0)\|) \quad (2.11)$$

则系统(2.8)的零解是一致稳定的，若当  $s > 0$  时  $W(s) > 0$ ，则(2.8)的零解是一致渐近稳定的。关于泛函的构造，对于最简单的例子——单时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_t x(t-\tau) \quad (2.12)$$

最简单的 Lyapunov 泛函通常为

$$V(x_i) = x(t)^T P x(t) + \int_{-\tau}^0 x(t+\theta)^T S x(t+\theta) d\theta \quad (2.13)$$

现有结论证明, 用(2.13)方式构造的Lyapunov泛函最后通常得到的是时滞无关型的解<sup>[122]</sup>, 而上世纪 50 年代Krasovskii提出并由Hale发展的Lyapunov-Krasovskii泛函方法则会得到时滞相关型的解<sup>[123]</sup>。对于单时滞系统(2.12), Lyapunov-Krasovskii泛函可构造为

$$V(x_i) = x(t)^T P x(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\theta}^0 x(\xi)^T S x(\xi) d\xi d\theta \quad (2.14)$$

## 2.4 基本引理

引理 2.1<sup>[24]</sup>: 对于任意适当维数的矩阵  $X, Y$ , 有

$$X^T Y + Y^T X \leq \alpha X^T X + \frac{1}{\alpha} Y^T Y, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.16)$$

与

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T P X + Y^T P^{-1} Y, \quad \forall \alpha > 0 \quad (2.17)$$

引理 2.2<sup>[63]</sup>: 对于任意适当维数的向量  $a, b$ , 正定矩阵  $X$ , 及矩阵  $M$ , 有

$$-2a^T b \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & XM \\ M^T X & (M^T X + I)X^{-1}(XM + I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

引理 2.3<sup>[64]</sup>: 对任意  $a \in R^n$ ,  $b \in R^{2n}$ ,  $N \in R^{2m \times n}$ ,  $T \in R^{mn}$ ,  $Y \in R^{m \times 2n}$ ,  $Z \in R^{2m \times 2n}$ , 有

$$-2b^T N a \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T & Y - N^T \\ Y^T - N & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$\begin{bmatrix} T & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.19b)$$

引理 2.4<sup>[100]</sup> (Schur 补引理): 对于定义在  $R^m$  上的矩阵  $Q(x) = Q^T(x)$ ,  $R(x) = R^T(x)$  以及  $S(x)$ , 现行矩阵不等式 (LMI):

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

等价于:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \quad (2.20a)$$

或

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0 \quad (2.20b)$$

引理 2.5 对于任意给定的常数  $\beta \geq \alpha$ ,  $\forall R^n$  上的矩阵  $x(t)$  及正定矩阵  $Q > 0$ , 有

$$\left( \int_a^\beta x(t)dt \right)^T Q \left( \int_a^\beta x(t)dt \right) \leq (\beta - \alpha) \int_a^\beta x(t)^T Q x(t) dt \quad (2.21)$$

证明 根据引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} \left( \int_a^\beta x(t)dt \right)^T Q \left( \int_a^\beta x(t)dt \right) &= \int_a^\beta \int_a^\beta x^T(s) Q x(t) dt ds \\ &\leq \int_a^\beta \int_a^\beta \frac{1}{2} [x^T(s) Q x(s) + x^T(t) Q x(t)] ds dt = \\ &\frac{\beta - \alpha}{2} \left[ \int_a^\beta x^T(s) Q x(s) ds + \int_a^\beta x^T(t) Q x(t) dt \right] = \\ &(\beta - \alpha) \int_a^\beta x^T(t) Q x(t) dt \end{aligned}$$

证毕

引理 2.6<sup>[101]</sup>: 对一时滞参数  $\tau_1$ , 假定其自适应律为  $\hat{\tau}_1(t) = -[2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]m$ , 其中  $m$ 、 $h_1$ 、 $a_1$  为非负常数, 如取

$$h_1 = \sqrt{h_1 + \bar{h}_1^2}, \quad a_1 = 2(\sqrt{h_1 + \bar{h}_1^2} - \bar{h}_1) \quad (2.22)$$

其中  $\bar{h}_1$  为  $\tau_1$  上下界之间的某一值, 则当  $\hat{\tau}_1$  趋于稳定时, 其稳态值

$$\hat{\tau}_1(\infty) = a_1 \hat{\tau}_1 + (\hat{\tau}_1 - h_1)^2 = \bar{h}_1.$$

证明 由于对  $\tau_1$  的自适应律为  $\hat{\tau}_1(t) = -[2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]m$ , 显然  $\hat{\tau}_{1+1}(t)$  与  $\frac{2h_1 - a_1}{2}$  的差值会

越来越小,  $\hat{\tau}_1(\infty) = \frac{2h_1 - a_1}{2}$ , 可得

$$a_1 \hat{\tau}_1(\infty) + (\hat{\tau}_1(\infty) - h_1)^2 = a_1 \frac{2h_1 - a_1}{2} + \left( \frac{2h_1 - a_1}{2} - h_1 \right)^2 = \frac{4a_1 h_1 - a_1^2}{4}。 \text{ 如取}$$

$$h_1 = \sqrt{h_1 + \bar{h}_1^2}, \quad a_1 = 2(\sqrt{h_1 + \bar{h}_1^2} - \bar{h}_1) \text{ 即 } 2(h_1 - \bar{h}_1), \text{ 则 } \hat{\tau}_1(\infty) = \frac{2h_1 - a_1}{2} = \bar{h}_1, \text{ 而}$$

$$\begin{aligned} a_1 \hat{\tau}_1(\infty) + (\hat{\tau}_1(\infty) - h_1)^2 &= \frac{4a_1 h_1 - a_1^2}{4} \\ &= \frac{a_1(4h_1 - a_1)}{4} = h_1^2 - \bar{h}_1^2 = \bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 - \bar{h}_1^2 = \bar{h}_1 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \hat{\tau}_1(\infty) = a_1 \hat{\tau}_1(\infty) + (\hat{\tau}_1(\infty) - h_1)^2 = h_1.$$

证毕

下面我们给出线性时滞系统滞后相关型与滞后无关型稳定性判据之间的关系。对于如下线性时滞系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) \quad (2.23)$$

这里  $x(t) \in R^n$  是系统的状态,  $A, A_d \in R^{n \times n}$  为具有适当维数的常数矩阵。为了求得系统(2.23)的滞后相关型控制器, 人们通常都是通过等式

$$\begin{aligned} x(t-\tau) &= x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(t+s) ds \\ &= x(t) - \int_{t-\tau}^t [Ax(t+s) + A_d x(t+s-\tau)] ds \end{aligned} \quad (2.24)$$

把系统(2.23)变换为如下形式

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t [Ax(t+s) + A_d x(t+s-\tau)] ds \quad (2.25)$$

式(2.24)把具有离散滞后的时滞系统(2.23)变换为具有分布滞后的时滞系统(2.25)。根据文献[104]可知时滞系统(2.25)与原系统(2.23)相比, 除了具有原时滞系统的所有特征值外, 对应于  $A_d$  的每一个特征值  $\lambda_i$  都有一些附加的特征值, 附加特征值满足如下结论

**引理 2.7<sup>[104]</sup>:** (1) 如果  $A_d$  的特征值为  $\lambda_i$  且  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 。则对应于  $\lambda_i$  的附加特征值出现在虚轴上的充要条件是滞后常数满足

$$\tau = \frac{k\pi + \angle(\lambda_i)}{\text{Im}(\lambda_i)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中  $\angle(\lambda_i)$  表示  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的辐角。

(2) 如果  $A_d$  的实特征值为  $\lambda_i > 0$ 。则对应于  $\lambda_i$  的附加值出现在虚轴上的充要条件是滞后常数满足

$$\tau = \frac{1}{\lambda_i}$$

但如果  $A_d$  的实特征值为  $\lambda_i < 0$ , 则无论滞后常数为何值, 对应于  $\lambda_i$  的所有附加特征值都不可能出现在虚轴上。

有引理 2.7 我们可以看出, 时滞系统(2.16)与其变换后的系统(2.18)之间并不是等价的, 它们的稳定性只有当滞后常数充分小时才完全相同。

**引理 2.8<sup>[111]</sup>:** 假设  $Q(M)$  为对称矩阵,  $M, N$  是互不依赖的矩阵, 则存在一对称矩阵  $N > 0$  使得如下矩阵不等式成立

$$J(M)'NU + U'NJ(M) + Q(M) < 0 \quad (2.26)$$

当且仅当存在对称矩阵  $X, Y$ , 及一正常数使得  $X = \alpha^2 Y^{-1}$  及下式成立

$$\begin{bmatrix} U'XU - Q(M) & J(M)' + \alpha U' \\ * & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (2.27)$$

引理 2.9 对于积分式  $\int_a^b V_1(\alpha) d\alpha$ 、 $\int_c^d V_2(\alpha) d\alpha$  有

$$\int_a^b V_1(\alpha) d\alpha + \int_c^d V_2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d [(b-\alpha)V_1(\alpha) + (d-\alpha)V_2(\beta)] d\beta d\alpha \quad (2.8)$$

证明 由于左边  $\int_a^b V_1(\alpha) d\alpha + \int_c^d V_2(\alpha) d\alpha = \int_a^b V_1(\alpha) d\alpha + \int_c^d V_2(\beta) d\beta$

右边

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d [(b-\alpha)V_1(\alpha) + (d-\alpha)V_2(\beta)] d\beta d\alpha \\ &= \int_a^b \int_c^d [\frac{1}{d-c} V_1(\alpha) + \frac{1}{b-a} V_2(\beta)] d\beta d\alpha \\ &= \int_a^b [V_1(\alpha) + \frac{1}{b-a} \int_c^d V_2(\beta) d\beta] d\alpha = \int_a^b V_1(\alpha) d\alpha + \int_c^d V_2(\beta) d\beta \end{aligned}$$

因此(2.8)成立。

### 第三章 时滞系统的时滞参数稳定界与 $H^\infty$ 控制的具体方法选择

#### 摘要

对于存在状态时滞与输入时滞的时滞系统，本章对已有的各种保守性较小的镇定方法进行比较，对有问题的方法进行改进，主要通过基于“Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和线性矩阵不等式方法（LMI），在具体情况下分别就时滞参数稳定界与  $H^\infty$  带记忆状态反馈控制器的设计这两个问题，对如何选择适当的求解方法以使得结论的保守性较小、实用性较强进行了详细阐述。最后给出一些例子加以说明如何达到“具体问题具体分析”。

#### 3.1 引言

众所周知，时滞现象普遍存在于实际的控制问题中，这往往是使系统的性能变差甚至是造成系统不稳定的主要原因之一，因而对时滞系统的时滞参数稳定界的确定问题、控制问题（包括镇定控制、 $H^\infty$  控制等）已引起了众多学者的关注 [24-29,32-34,42-46,63,64,65,102,103]。

目前，线性矩阵不等式方法已成为研究控制问题的有效方法之一。从众多文献中可以看出，Lyapunov 泛函的选取不仅决定着时滞系统的稳定性，而且对结论的保守性也起着至关重要的作用，Lyapunov 泛函从最初的最一般的二次型泛函或加了积分项的 Lyapunov-Krasovskii 泛函<sup>[24-27,63,64,102]</sup>，到 2001 年开始兴起的基于“Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法<sup>[28,29,32-34]</sup>及与其类似的方法<sup>[44-46,103]</sup>，到 2005 年提出的不用放大任何不等式的 Lyapunov 泛函<sup>[65]</sup>，广大学者都在尝试如何选取适当的泛函使得在推导过程中交叉项放大的次数少、放大的上界小以达到结论的保守性较小。对于最初的 Lyapunov 泛函，要得到在小时滞情况下保守性较小的时滞相关型判据，就必须在推导过程中对交叉项进行最高次数的放大（次数为系统状态方程中滞后状态的个数与状态导数包含的项数之积，如果系统为输入时滞的且采用带记忆状态反馈控制则放大的次数更高），因此，该种方法得到的结论的保守性是最大的，已经逐步被淘汰。自从 2001 年 E.Fridman 在 [28] 中提出了能够“一次集中放大交叉项”的基于“Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，

大量使用该种泛函的关于时滞系统的各种研究结果就不断涌现，就上文所述的时滞参数稳定界的确定问题、镇定控制、 $H^\infty$  控制的问题，各学者并没有停滞不前，而是在此基础上进一步探讨如何在计算过程中不添加保守性，充分发挥这种泛函的优越性。首先，是对放大交叉项的方式的改进，P. Park<sup>[63]</sup>和Y. S. Moon<sup>[64]</sup>都相继对常用的Petersen I. R.<sup>[24]</sup>的放大方式进行了缩小上界的改进，但由此引出的控制矩阵的求解也增加了难度。已有的解决方法可分为两种：一种是E. Fridman<sup>[29]</sup>、Shin KANNO<sup>[32]</sup>等人使用的调整参数法，前者是让放大过程中产生的矩阵与泛函原有的二次型矩阵之间呈线性关系，后者是让体现“Descriptor form”的附加矩阵与泛函原有的二次型矩阵之间呈线性关系，这些线性关系都通过在仿真中调整参数来确定，给计算带来了简便但有一定保守性；另一种是高惠军和Payam Naghshtabrizi分别在文献[34]和[33]中所使用的通过cone补线性化算法来计算控制矩阵的方法，这种方法避免了前一种方法要设定线性关系带来的保守性，但要通过一定次数的迭代来得到一个LMI的优化问题的解，迭代次数并不能很快确定，有可能会造成在相当长一段时间内找不到解的结果。就是对于徐胜元在2005年提出的不需要放大任何交叉项的泛函方法<sup>[65]</sup>，也只是在单时滞系统的稳定界确定上显示出了优越性，对于多时滞系统是否还能做到不需要放大任何交叉项，对于时滞系统镇定控制、 $H^\infty$  控制的控制器的求解则在文献[121]中通过积分变换及cone补线性化算法得到了相应解。可以说，现有的关于时滞系统稳定界的确定问题、镇定控制、 $H^\infty$  控制的问题的求解方法有很多，各有其优点与缺点，如何改进这些方法的缺点，并在不同的情况下选择适当的方法以使该种情况下的结论保守性较小、实用性较强是一个值得探讨的问题。

本章主要使用基于“Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法，及线性矩阵不等式方法，分别就时滞系统稳定界的确定、 $H^\infty$  控制这两个问题的求解，对已有的方法进行改进（主要是E. Fridman对于带记忆控制的“等价子系统”方法<sup>[29]</sup>），对在单（多）时滞、系统维数高（低）、保守性要求强（弱）等不同情况下根据各种求解方法的优缺点进行具体问题具体分析，从而克服了以往泛函方法选取的盲目性。最后给出若干个仿真实例，说明本章给出的各种情况下相应适当方法的实用性。

### 3.2 问题的描述

本章研究如下两类时滞系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i(x - \tau_i) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max_{i=1, \dots, l} \{\tau_i\} \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, l$  为未知的正常数,  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  为已知的具有适当维数的矩阵。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + B_1w(t) + B_2u(t - \tau_2) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max\{\tau_1, \tau_2\} \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $x(t) \in R^n$  是状态向量,  $u(t) \in R^m$  为控制输入向量,  $w(t) \in R^{n_2}$  为干扰输入向量,  $z(t) \in R^{n_2}$  为系统受控向量,  $A$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C$ 、 $D$  为具有适当维数的矩阵,  $\tau_1 > 0$  为系统状态时滞常数,  $\tau_2 > 0$  为系统输入时滞常数,  $\phi$  为系统初始状态函数。

针对(3.1)研究的目的是: 假定系统是状态可测的, 求系统稳定的条件及时滞参数  $\tau_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, l$  的稳定界。

针对(3.2)研究的目的是: 如何设计一个时滞相关型状态反馈控制

$$u(t) = K_1x(t) + K_2x(t - \tau_1) \quad (3.3)$$

其中  $K_1$ 、 $K_2$  为待求的控制器增益矩阵, 使得系统(3.1)是渐近稳定的, 且满足  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$  (其中  $\|\cdot\|_2$  为  $L_2$  范数)。

### 3.3 主要结论

#### 3.3.1 单(多)时滞系统的稳定界问题——两种方案的比较与选择

对于问题一, 首先考虑用[56]中不需要放大任何交叉项的泛函方法, 在文献[121]中, 该问题已通过引理2.9及[65]中结论推导得到了如下结论(文献[121]中没有提到引理2.9, 不容易被理解):

**引理3.1** 对于线性时滞系统(3.1), 如果存在正定矩阵  $P$ 、 $Q_i$ 、 $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , 及矩阵  $Y_i$ 、 $W_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , 使现行矩阵不等式 LMI (3.4)成立, 则系统(3.1)是渐近稳定的。

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ * & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \\ * & * & \Pi_{33} & 0 \\ * & * & * & \Pi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.4)$$

其中

$$\Pi_{11} = PA + A^T P + \sum_{i=1}^l Y_i + \sum_{i=1}^l Y_i^T + \sum_{i=1}^l Q_i,$$

$$\Pi_{33} = \text{diag}\{-\tau_1 Z_1 \cdots -\tau_l Z_l\},$$

$$\Pi_{12} = [PA_1 - Y_1 + W_1^T \cdots PA_l - Y_l + W_l^T], \quad \Pi_{13} = [-\tau_1 Y_1 \cdots -\tau_l Y_l],$$

$$\Pi_{14} = [\tau_1 A^T Z_1 \cdots \tau_l A^T Z_l], \quad \Pi_{22} = \text{diag}\{-Q_1 - W_1 - W_1^T \cdots -Q_l - W_l - W_l^T\},$$

$$\Pi_{23} = \text{diag}\{-\tau_1 W_1 \cdots -\tau_l W_l\}, \quad \Pi_{24} = \begin{bmatrix} \tau_1 A_1^T Z_1 & \cdots & \tau_l A_l^T Z_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1 A_1^T Z_1 & \cdots & \tau_l A_l^T Z_l \end{bmatrix}.$$

引理 3.1 要求解 1 个维数为  $(3l+1)n$  的线性矩阵不等式 (LMI)，共要求解  $4l+1$  个未知矩阵的可行解和  $l$  个未知参数  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, l$ ，这在系统时滞参数  $l$  个数较多时对求解的实时性有很大的影响。其实，虽然引理 3.1 在推导的过程中没有放大交叉项，但是由于有这么多未知变量要求解使得在它们适当的组合之下线性矩阵不等式(3.4)有可行解，因此不一定对任何系统都是保守性最小的（有可能找不到适当的未知矩阵可行解的组合）。而在[28]中的结论虽然有一次集中放大不等式所带来的保守性，但它只要求解一个个维数为  $l+2$  的 LMI，所要求的未知矩阵数目仅为  $l+3$ 。由此对于线性时滞系统(3.1)的时滞参数稳定界问题，我们有如下结论：

- ①  $l=1$  即系统单时滞的情况，采用引理 3.1；
- ②  $l>1$  即系统多时滞的情况，如要求所有时滞参数最大的稳定界， $l$  数目较小且对实时性要求不高，则采用引理 3.1 及[28]中的推论 1，对两种结果进行比较后得到最大的时滞稳定界；
- ③  $l>1$ ,  $l$  数目较大或对实时性要求较高，尽量求解[28]中的推论 1 来得到  $\tau = \max_{i=1, \dots, l} \{\tau_i\}$ 。

### 3.3.2 单(多)时滞系统的 $H^\infty$ 控制问题——四种方案的比较与选择

对于单时滞的情况，由于(3.1)中  $\tau_2 = 0$ ，因此(3.2)可变为  $u = B_2 K_1 x(t-\tau_1)$ ，取系统(3.1)的泛函

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t)$$

其中  $V_1(x_t) = x(t)^T P x(t)$ ,  $V_2(x_t) = \int_{-\tau_1}^0 \int_{\alpha+\beta} \dot{x}(\alpha)^T Z_1 \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta$ ,  $V_3(x_t) = \int_{-\tau_1}^0 x(\alpha)^T Q_1 x(\alpha) d\alpha$ ，而要研究系统的  $H^\infty$  特性，令初始值  $\phi(t) = 0$ ，则有

$$\begin{aligned}
J_T &= \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt = \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(x_t)) dt - V(x_T) \\
&\leq \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(x_t)) dt \\
&= \int_0^T ((Cx + DK_1 x(t - \tau_1))^T (Cx + DK_1 x(t - \tau_1)) - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(x_t)) dt
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$J_T < 0$  则能满足系统的  $H^\infty$  特性要求，先考虑(3.4)的求导仍用[56]及[121]中的不放大交叉项的方法，再代入(3.5)可得

$$J_T \leq \int_{\tau_1}^T \frac{1}{\tau_1} \int_{-\tau_1}^0 \bar{\zeta}(t, s)^T \Gamma(\tau_1) \bar{\zeta}(t, s) ds dt < 0 \tag{3.6}$$

其中  $\bar{\zeta}(t, s)^T = [x(t)^T \quad x(t - \tau_1)^T \quad \dot{x}(s)^T \quad w(t)^T]$ ，而  $\Gamma(\tau_1) < 0$  经过引理 2.4 化简可得一维数为  $6n$  的不等式  $\bar{\Gamma}(\tau_1) < 0$ ，再对  $\bar{\Gamma}(\tau_1) < 0$  两边同乘以矩阵  $diag\{X \quad X \quad X \quad I \quad I \quad I\}$ ，其中  $X = P^{-1}$ ，可得  $\bar{\Gamma}(\tau_1) < 0$  等价于如下不等式：

$$\begin{bmatrix}
AX + XA^T + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_1^T + \bar{Q}_1 & (A_1 X + B_2 U_1) - \bar{Y}_1 + \bar{W}_1^T & -\tau_1 \bar{Y}_1 & B_1 & \tau_1 X A^T & X C^T \\
* & -\bar{Q}_1 - \bar{W}_1 - \bar{W}_1^T & -\tau_1 \bar{W}_1 & 0 & \tau_1 (A_1 X + B_2 U_1)^T & (D U_1)^T \\
* & * & -\tau_1 \bar{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & -\gamma^2 I & \tau_1 B_1^T & 0 \\
* & * & * & * & -\tau_1 X \bar{Z}_1^{-1} X & 0 \\
* & * & * & * & * & -I
\end{bmatrix} < 0 \tag{3.7}$$

其中  $\bar{Y}_1 = X Y_1 X$ ， $\bar{Q}_1 = X Q_1 X$ ， $\bar{W}_1 = X W_1 X$ ， $\bar{Z}_1 = X Z_1 X$ ， $U_1 = K_1 X$ 。由引理 2.4 可知(3.7)成立包含了  $\dot{V}(x_t) < 0$  即系统闭环渐近稳定的解，因此可得如下定理：

**定理 3.1** 对于带输入的线性时滞系统(3.2)，且  $\tau_2 = 0$ ，如存在正定矩阵  $X$ 、 $\bar{Q}_1$ 、 $\bar{Z}_1$ ，及矩阵  $\bar{Y}_1$ 、 $\bar{W}_1$ 、 $U_1$ ，满足 LMI(3.7)成立，则在控制器(3.3)作用下，闭环系统(3.2)是渐近稳定的，且系统的  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ ，其中的控制器增益为  $K_1 = U_1 X^{-1}$ 。

由于(3.7)同时出现了  $\bar{Z}_1$  与  $X \bar{Z}_1^{-1} X$ ，要让(3.7)成为一个可解的 LMI，有三种方法：一种是令  $\bar{Z}_1 = \varepsilon X$ ，其中  $\varepsilon$  为正常数可以在仿真过程中不断调整获得，但这会带来一定保守性；第二种方法就是文献[121]中的一种非凸约束下的线性化方法（后面多时滞中会进行讨论），虽然能把原来的非线性矩阵不等式化为线性不等式并可以在一定时间内计算出可行解，但也需要事先确定一非凸约束的常数，再加上还要事先确定算法的步数，这就影响了实用性；第三种方法就是和[34]中一样，定义一个新的正定矩阵  $X \bar{Z}_1^{-1} X \geq M_1$ ，之后可以不需要事先确定第二种方法中的非凸约束的常数，因此比第二种方法实用性强一

些, 这样矩阵不等式(3.7)就变为求解如下 LMIs:

$$\tilde{\Gamma}(\tau_1) = \begin{bmatrix} AX + XA^T + \bar{Y}_1 + \bar{Y}_1^T + \bar{Q}_1 & (A_1X + B_1U_1) - \bar{Y}_1 + \bar{W}_1^T & -\tau_1\bar{Y}_1 & B_1 & \tau_1XA^T & XC^T \\ * & -\bar{Q}_1 - \bar{W}_1 - \bar{W}_1^T & -\tau_1\bar{W}_1 & 0 & \tau_1(A_1X + B_1U_1)^T & (DU_1)^T \\ * & * & -\tau_1\bar{Z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \tau_1B_1^T & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_1M_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 & \bar{X} \\ \bar{X} & \bar{Z}_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.8b)$$

其中  $\bar{M}_1 = M_1^{-1}$ ,  $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_1^{-1}$ ,  $\bar{X} = X^{-1}$  用[99]中的 cone 补线性化算法, 原来的非凸可行性问题(3.7)进一步变为如下包含 LMI 条件的非线性最小化问题:

$$(3.9a)=(3.9a), (3.9b)=(3.9b)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & I \\ I & \bar{M}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & I \\ I & \bar{Z}_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} X & I \\ I & \bar{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.9c)$$

$$\text{tr}(X\bar{X} + M_1\bar{M}_1 + \bar{Z}_1\bar{Z}_1) = 3n$$

算法步骤如下:

### 算法 3.1

① 选择一充分大的  $\gamma$  的初值, 使得(3.9)有可行解。令  $\gamma_0 = \gamma$ :

② 找到满足(3.9)的一组可行解  $(X, \bar{Y}_1, \bar{W}_1, U_1, \bar{Q}_1, \bar{Z}_1, M_1, \bar{M}_1, \bar{Z}_1, \bar{X})$ , 令  $k = 0$ :

③ 解如下的 LMI 问题: 满足(3.9)的  $\min \text{tr}(X\bar{X}^k + X^k\bar{X} + M_1\bar{M}_1^k + M_1^k\bar{M}_1 + \bar{Z}_1\bar{Z}_1^k + \bar{Z}_1^k\bar{Z}_1)$ ,

得到的  $(X, \bar{Z}_1, M_1, \bar{M}_1, \bar{Z}_1, \bar{X})$  为其第  $k+1$  组解;

④ 把第  $k+1$  组可行解及②中算得的  $(\bar{Y}_1, \bar{W}_1, U_1, \bar{Q}_1)$  代入(3.7), 如(3.7)满足了, 则  $\gamma = \gamma + \alpha$ ,  $\alpha$  为一小常数, 转而执行②; 如(3.7)不满足, 令  $k = k+1$ , 如  $k < m$ ,  $m$  为一自然数, 则转而执行③, 如  $k = m$ , 则程序结束, 可行解取  $k = m-1$  组的可行解。

**注 3.1** 根据[99]中的结论, 如果(3.9)的最小化问题的结果为  $3n$ , 那么在得到使  $\text{tr}(X\bar{X} + M_1\bar{M}_1 + \bar{Z}_1\bar{Z}_1) = 3n$  成立的  $(U_1, X)$  可行解后, 可得到使系统闭环渐近稳定且满足以  $\gamma$  为  $H^\infty$  性能指标的要求的控制矩阵  $K_1 = U_1X^{-1}$ 。但在实践中, 要想让  $\text{tr}(X\bar{X} + M_1\bar{M}_1 + \bar{Z}_1\bar{Z}_1)$  的最小值恰好等于  $3n$  是非常困难的, 因此该算法将(3.7)作为算法是否完成的判别依据。

可以看出，在单时滞的情况下，上述方法虽然通过定理 3.1 能够在不放大交叉项的基础上得到可行解，但为了把非凸问题转化为一个 LMI 问题，所用的 cone 补线性化算法中需要确定的执行步数  $m$  有可能会影响到实时性及  $H^\infty$  指标  $\gamma$  的大小（如果  $m$  取得不够大，则有可能在达到最大的  $\gamma$  之前提前停止运行程序从而影响结论的保守性；如果  $m$  取得太大，则有可能执行过多的步骤从而取得结果的实时性）。

对于多时滞系统，拿系统(3.2)来说， $\tau_2 \neq 0$ ，系统闭环状态方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + B_1w(t) + B_2K_1x(t-\tau_1) + B_2K_2x(t-\tau_1-\tau_2) \\ z(t) = Cx(t) + DK_1x(t) + DK_2x(t-\tau_1) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0], \bar{\tau} = \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

这样闭环状态方程中就有了 3 个时滞参数， $V(x)$  中对应于每个时滞参数的相关项均再增加对应于  $B_2K_2(t-\tau_1-\tau_2)$  的相关项，为满足  $H^\infty$  特性，与(3.5)-(3.9)类似，再由引理 2.9 得到如下的矩阵不等式

$$J_\tau = \frac{1}{\tau_1\tau_2\tau_3} \int_0^{\bar{\tau}} \int_{-\tau_1}^0 \int_{-\tau_2}^0 \int_{-\tau_3}^0 \zeta(t, s_1, s_2, s_3)^T \Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \zeta(t, s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3 dt < 0 \quad (3.11)$$

其中  $\zeta(t)^T = [x(t)^T \quad x(t-\tau_1)^T \quad x(t-\tau_2)^T \quad x(t-\tau_3)^T \quad \dot{x}(s_1)^T \quad \dot{x}(s_2)^T \quad \dot{x}(s_3)^T \quad w^T]$ ，而经过引理 2.4 化简可得  $\Gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3) < 0$  等价于一维数为  $10n + n_2 + n_3$  的不等式  $\bar{\Gamma}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) < 0$  (3.12)，由此得到如下定理：

**定理 3.2** 对于线性时滞系统(3.2)，如果存在正定矩阵  $P$ 、 $Q_i$ 、 $Z_i$ ， $i=1, \dots, l$ ，及矩阵  $Y_i$ 、 $W_i$ ， $i=1, \dots, l$ ，满足 LMI(3.12)成立，则在控制器(3.3)作用下，闭环系统(3.2)是渐近稳定的，且系统的  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ 。

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{13} & PB_1 & \bar{\Gamma}_{14} & (C + DK_1)^T \\ \bar{\Gamma}_{21} & \bar{\Gamma}_{22} & \bar{\Gamma}_{23} & 0_{3n \times n_2} & \bar{\Gamma}_{24} & \bar{\Gamma}_{25} \\ \bar{\Gamma}_{31} & \bar{\Gamma}_{32} & \bar{\Gamma}_{33} & 0_{3n \times n_2} & 0_{3n} & 0_{3n \times n_3} \\ -\gamma^2 I_{n_2} & \bar{\Gamma}_{45} & -\bar{\Gamma}_{33} & 0_{n_2 \times n_3} & 0_{n_2 \times n_3} & -I_{n_3} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

其中

$$\bar{\Gamma}_{11} = PA + A^T P + \sum_{i=1}^3 Y_i + \sum_{i=1}^3 Y_i^T + \sum_{i=1}^3 Q_i,$$

$$\bar{\Gamma}_{33} = \text{diag}\{-\tau_1 Z_1, -\tau_2 Z_2, -\tau_3 Z_3\},$$

$$\bar{\Gamma}_{12} = [PA_1 - Y_1 + W_1^T \quad P\bar{A}_2 - Y_2 + W_2^T \quad P\bar{A}_3 - Y_3 + W_3^T].$$

$$\bar{\Gamma}_{13} = [-\tau_1 Y_1 \quad -\tau_2 Y_2 \quad -\tau_3 Y_3],$$

$$\bar{\Gamma}_{14} = [\tau_1 A^T Z_1 \quad \tau_2 A^T Z_2 \quad \tau_3 A^T Z_3],$$

$$\bar{\Gamma}_{22} = \text{diag}\{-Q_1 - W_1 - W_1^T \quad -Q_2 - W_2 - W_2^T \quad -Q_3 - W_3 - W_3^T\},$$

$$\bar{\Gamma}_{23} = \text{diag}\{-\tau_1 W_1 \quad -\tau_2 W_2 \quad -\tau_3 W_3\}, \quad \bar{\Gamma}_{24} = \begin{bmatrix} \tau_1 A_1^T Z_1 & \tau_2 A_1^T Z_2 & \tau_3 A_1^T Z_3 \\ \tau_1 \bar{A}_2^T Z_1 & \tau_2 \bar{A}_2^T Z_2 & \tau_3 \bar{A}_2^T Z_3 \\ \tau_1 \bar{A}_3^T Z_1 & \tau_2 \bar{A}_3^T Z_2 & \tau_3 \bar{A}_3^T Z_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Gamma}_{25} = \begin{bmatrix} (DK_2)^T \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}_{45} = [\tau_1 B_1^T \quad \tau_1 B_1^T \quad \tau_1 B_1^T], \quad \bar{A}_2 = B_2 K_1, \quad \bar{A}_2 = B_2 K_2.$$

显然, 由于矩阵  $P$ 、 $Q_i$ 、 $Y_i$ ,  $i=1, \dots, l$  在  $\bar{\Gamma}_{11}$  中同时存在, 无法对(3.12)进行左、右乘正定矩阵以得到统一的解, 因此对于(3.12)不能使用像定理 3.1 中求解(3.7)的算法, 因此可用文献[121]中的方法: 将(3.12)分解成引理 2.8 的形式, 即(3.12)等价于如下矩阵不等式成立。

$$\bar{\Gamma} = J(M)' N U + U' N J(M) + Q(M) < 0 \quad (3.13)$$

其中  $Q = \tilde{\Gamma}$ ,  $\tilde{\Gamma}$  中的各项除了将  $\bar{\Gamma}$  中对应于  $\bar{A}_2$ 、 $\bar{A}_2$  的项变为零项外, 其余项均与  $\bar{\Gamma}$  的相同,  $N = \text{diag}\{P \quad \tau_1 Z_1 \quad \tau_2 Z_2 \quad \tau_3 Z_3 \quad D\}$ ,  $J = VG$ ,  $U^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]$ , 其中

$$V^T = \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times n} & 0_{n_1 \times n} & I_{n_1} \\ I_{n_1} & I_{n_1} & I_{n_1} & I_{n_1} & 0_{n_1 \times n_1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0_{m \times n_1} & 0_{m \times n_1} & B_2 K_1 & B_2 K_2 & \bar{0}_1 & \cdots & \bar{0}_8 \\ K_1 & K_2 & 0_{n_1 \times n_1} & 0_{n_1 \times n_1} & \bar{0}_1 & \cdots & \bar{0}_8 \end{bmatrix}, \quad \bar{0}_i \text{ 表示第 } i \text{ 个 } 0_{m \times n_1} \text{ 的矩阵}, \quad \bar{0}_i \text{ 表示第 } i \text{ 个 } 0_{n_1 \times n_1} \text{ 的矩阵},$$

$U_1^T = [I_{n_1 \times n_1} \quad 0_{m \times (6n+n_1)} \quad 0_{m \times (3n+n_1)}]$ ,  $U_2^T = [0_{3n \times (7n+n_1)} \quad I_{3n} \quad 0_{3n \times n_1}]$ ,  $U_3^T = [0_{n_1 \times (7n+n_1+n_3)} \quad I_{n_1}]$ 。由引理 2.8 可得  $\bar{\Gamma} < 0$  成立当且仅当存在对称矩阵  $\bar{X}$ 、 $\bar{Y}$ , 及一正常数使下式成立

$$\bar{X} = \alpha^2 \bar{Y}^{-1} \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} U' \bar{X} U - Q(M) & J(M)' + \alpha U' \\ * & \bar{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

其中  $\bar{X} = \text{diag}\{\bar{X}_1 \quad \dots \quad \bar{X}_5\}$ ,  $\bar{Y} = \text{diag}\{\bar{Y}_1 \quad \dots \quad \bar{Y}_5\}$ , 算法步骤如下:

### 算法 3.2

① 选取  $\alpha$ ;

② 找到(3.14), (3.15)的一组可行解  $\bar{X}_0$ 、 $\bar{Y}_0$ , 令  $j=1$ ;

③ 令  $\bar{X}_j = \bar{X}_{j-1}$ ,  $\bar{X}_j = \bar{X}_{j-1}$ , 通过求解下面的 LMI 问题找到  $\bar{X}_{j+1}$ 、 $\bar{Y}_{j+1}$

满足(3.14), (3.15)的最小值问题  $\min \text{trace}(\bar{X}, \bar{Y} + \bar{X}\bar{Y})$ ;

- ④ 如果满足停止条件, 退出。否则令  $j = j+1$ , 此时如  $j$  小于指定步数  $m$  则转到③执行; 如  $j$  等于指定步数  $m$  则适当增加  $\alpha$  后转到②执行。通常以  $N = \alpha^{-1}\bar{X}$  为停止条件。

从算法 3.2 可以看出, 在多时滞情况下用该种方法计算  $H^\infty$  控制矩阵, 虽然保守性能保持较小, 但算法中需要事先确定参数  $\alpha$ , 指定步数  $m$  和算法 3.1 一样也要事先设定, 而且每次增加  $\alpha$  的额度怎样才算适当并不清楚, 因此给具体的实践造成了困难。此外, 由于未知矩阵数目较多, 和前一小节的分析一样: 由于有这么多未知变量要求解使得在它们适当的组合之下线性矩阵不等式(3.14), (3.15)有可行解, 因此不一定对任何系统都是保守性最小的。由于单时滞的情况下使用算法 3.1 不需要事先确定  $\alpha$ , 可知在[56]不放大交叉项方法的基础上再使用定理 3.1 及算法 3.1, 即用[99]中的 cone 补线性化方法来求解使系统闭环渐近稳定、且满足  $H^\infty$  特性的控制矩阵, 只有在单时滞、实时性要求低的情况下才能充分发挥作用。

其次, 我们考虑[34]中的在使用基于"descriptor form"的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法基础上的时滞系统的  $H^\infty$  控制器算法。对于带输入时滞的线性时滞系统(3.2), 所有基于"descriptor form"的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法都要经过如下步骤:

令  $\dot{x}(t) = y(t)$ , 则有

$$0 = -y(t) + (A + A_1 + B_2 K)x(t) + B_1 w(t) - A_1 \int_{-\tau_1}^0 y(s) ds - B_2 K_1 \int_{-\tau_1}^0 y(\xi) d\xi - B_2 K_2 \int_{-\tau_1}^0 y(s) ds \quad (3.16)$$

其中  $K = K_1 + K_2$ , 并取系统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_t, w_t) = V_1(x_t) + \sum_{i=1}^3 \int_{\tau_i}^0 \int_{s+\theta}^0 y(s)^T Q_i y(s) ds d\theta + \sum_{i=1}^3 \int_{-\tau_i}^0 x(s)^T S_i x(s) ds \quad (3.17)$$

其中  $V_1(t) = x^T P x$ ,  $P$ 、 $Q_i$ 、 $S_i$  均为正定矩阵,  $i = 1, 2, 3$ 。  $V_1(t)$  沿系统(3.16)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T P y \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}x - y + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ A_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 y(s) ds \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中  $\bar{A} = A + A_1 + B_2 K$ ,  $A_2 = B_2 K_1$ ,  $A_3 = B_2 K_2$ ,  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ , 令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ,

矩阵  $P_1$ 、 $P_2$  只需满足  $E \bar{P}^T = \bar{P} E$  就可使  $\dot{V}_1(x_t, w_t)$  与引入"descriptor form"前相同, 因此

$V(x_t, w_t)$  沿系统(3.16)的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t, w_t) = & \dot{V}_1(x_t, w_t) + \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{-\tau_i}^0 [y(t)^T Q_i y(t) - y(t+\theta)^T Q_i y(t+\theta)] d\theta + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^3 [x(t)^T S_i x(t) - x(t-\tau_i)^T S_i x(t-\tau_i)] \right\}\end{aligned}$$

代入(3.17)得

$$\dot{V}(x_t, w_t) = \tilde{x}(t)^T \Xi_0 \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^3 \eta_i - \sum_{i=1}^3 \int_{-\tau_i}^0 y(\theta)^T Q_i y(\theta) d\theta \quad (3.19)$$

考虑系统的  $H^\infty$  特性, 和(3.5)一样, 可得

$$\begin{aligned}J_T = & \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \leq \int_0^T ((Cx + DK_1 x(t) + DK_2 x(t-\tau_1))^T (Cx + DK_1 x(t) + DK_2 x(t-\tau_1))) \\ & - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(x_t)) dt = \int_0^T [\tilde{x}(t)^T \Xi_0 \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^3 \eta_i - \sum_{i=1}^3 \int_{-\tau_i}^0 y(\theta)^T Q_i y(\theta) d\theta] dt\end{aligned} \quad (3.20)$$

其中

$$\tilde{x}(t)^T = [x^T \quad y^T \quad w^T \quad x(t-\tau_1)^T \quad x(t-\tau_2)^T \quad x(t-\tau_3)^T]^T,$$

$$\eta_i(t) = -2 \int_{-\tau_i}^0 [x^T \quad y^T]^T \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ A_i \end{bmatrix} y(s) ds, \text{ 而 } \Xi_0 < 0 \text{ 经过引理 2.4 变换后可得}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1^T + \sum_{i=1}^3 S_i & P - P_1 + \bar{A}^T P_2^T & P_1 B_1 & 0 & 0 & 0 & (C + DK_1)^T \\ * & \sum_{i=1}^3 \tau_i Q_i - P_2 - P_2^T & P_2 B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S_1 & 0 & 0 & (DK_2)^T \\ * & * & * & * & -S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0.$$

不同的地方主要是对交叉项  $\eta_i(t)$  放大形式的选择, 及放大后该如何求解控制矩阵, 这些都关系到结论的保守性、实时性。一般有如下几种方法:

① 放大形式采用引理 2.1, 由于(3.18)中只要求  $P_1, P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ , 而没有其他限制可令  $P_1 = n_1/n_2 P, P_2 = 1/n_2 P$  (在之后的LMI求解中有  $X = P^{-1} = n_1/n_2 P_1^{-1} = 1/n_2 P_2^{-1}$ ), 这样不需要关于  $x(t-\tau_i)^T, i=1,2,3$  的项, 要求解的矩阵数目较少, 求解比较简便, 目前用的比较广泛<sup>[32,35,101,105]</sup>。但引理 2.1 及  $P_1 = n_1/n_2 P, P_2 = 1/n_2 P$  的限制会影响结论的保守性, 可以用于保守性要求不是特别高、实时性要求较高的情况。在后面几章的推导中基本上都是采用这种方法, 这里不再赘述。

②放大形式采用引理 2.3, 对于矩阵  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$  在求解过程中令  $\bar{Q} = \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ 0 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}$ , 由于引理 2.3 中的(2.19b), 会同时出现  $\bar{Q}_i \bar{Z}_i^{-1} \bar{Q}_i$ 、 $\bar{Z}_i = Z_i^{-1}$ , 对此可采用两种办法: 一种是令  $\bar{Z}_i = \varepsilon_i Q_i$ , 这样会增加结论的保守性; 另一种就是像本节(3.8)-(3.9)那样通过cone补线性化算法将原来的非凸可行性问题变为包含LMI条件的非线性最小化问题。显然这样的方法相对于上文中在使用[56]中不需要放大交叉项基础上再使用cone补线性化算法, 要求的未知矩阵数目较少、维数较低, 且引理 2.3 与整体求解  $\bar{Q} = \bar{P}^{-1}$  使得结论保守性较小, 但同样具有执行步数  $m$  难以确定的问题, 因此可用在保守性要求较高、实时性要求不是特别高的情况。这种方法在<sup>[34]</sup>中进行了详细分析, 其中的cone补线性化算法步骤与(3.8)-(3.9)相同, 这里不再赘述。

③放大形式采用引理 2.1-2.3 中任一种, 对于矩阵  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$  在求解过程中也令

$\bar{Q} = \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ 0 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}$ , 这样在推导过程中会同时出现  $\bar{Q}_i B_2 K_i$ 、 $B_2 K_i Q_i$ ,  $i=1,2$ , 这样无法

算得控制矩阵, 为了解决这一问题, [29,31]中采用了“等价子系统”的方法: 构造一子系统  $\dot{\bar{u}} = -\rho \bar{u}(t) + \rho u(t)$ , 在  $\rho \gg 1$  时  $\bar{u} \rightarrow u$ , 再令  $\xi = \text{col}\{x \quad \bar{u}\}$  与原系统联立后通过新系统的控制矩阵  $\tilde{K}$ , 反求原系统的控制矩阵  $K$ , ——显然用这样的“等价子系统方法”不仅大常数  $\rho \gg 1$  很难确定, 而且在[13,15]中都指出所得  $K$  与原系统是有一定误差的, 因此该方法并不十分实用; 还有一点值得注意的是, 如果把  $\bar{u}$  当成  $u$  来用, 则应有  $\dot{u} = \dot{\bar{u}} = -\rho \bar{u}(t) + \rho u(t) = -\rho u(t) + \rho u(t) = 0$  (注意  $\rho \rightarrow \infty$  而不是  $t \rightarrow \infty$  时的变化律), 这与[29,31]中所说的  $u = K_i x(t)$  即有  $\dot{u} = K_i \dot{x}(t)$  不一定为零值相矛盾, 因此[29,31]中关于输入时滞的结论存在问题。如果解决了这个问题, 那么就能减少①中限制  $\bar{P}$  中各矩阵所带来的保守性, 使得在保守性要求不是特别高、实时性要求较高的情况下显示出优越性。因此是两种对“等价子系统方法”进行改进的思想:

(1) 构造一子系统  $\rho \dot{\bar{u}} = -\bar{u}(t) + u(t)$ , 显然这样的系统在  $\bar{u}$  为有限值的情况下满足在  $\rho \rightarrow 0$  时  $\bar{u} \rightarrow u$ , 不会产生原来方法中把  $u$  用  $\bar{u}$  代入与原系统等价的新系统却产生  $\dot{u} = 0$  的矛盾, 然后再用类似于[29,31]中的推导, 值得注意的是带记忆的状态反馈控制的时滞参数不止一个时,  $u = \sum_{i=0}^l K_i x(t-\tau_i)$ , 应有  $\xi = \text{col}\{x \quad \rho_1 \bar{u}_1 \quad \dots \quad \rho_l \bar{u}_l\}$ , 其中  $\bar{u}_i = K_i x$ 。

以  $\xi(t)^T = [x(t)^T \quad \rho_1 \bar{u}_1(t)^T \quad \rho_2 \bar{u}_2(t)^T]$  为状态变量重写闭环状态方程(3.15)为

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}_0 \xi(t) + \tilde{A}_1 \xi(t - \tau_1) + \tilde{A}_2 \xi(t - \tau_2) + \tilde{A}_3 \xi(t - \tau_3) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2 u_1(t) + \tilde{B}_3 u_2(t) \\ z(t) = \tilde{C}_1 \xi(t) + \tilde{C}_2 \xi(t - \tau_1) \\ \xi(t) = \tilde{\phi}(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0], \bar{\tau} = \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \quad (3.21)$$

其中  $\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_1^{-1} I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_2^{-1} I_n \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \rho_1^{-1} B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
 $\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2^{-1} B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C & \rho_1^{-1} D & 0 \end{bmatrix}$ ,

$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho_2^{-1} D \end{bmatrix}$ , 这样带记忆状态反馈控制问题就转变为设计如下无记忆状态反馈控制器

$$u_1(t) = \tilde{K}_1 \xi(t) = [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2 \quad \tilde{K}_3] \xi(t), \quad u_2(t) = \tilde{K}_2 \xi(t) = [\tilde{K}_4 \quad \tilde{K}_5 \quad \tilde{K}_6] \xi(t) \quad (3.22)$$

因此可得  $\begin{cases} u_1(t) \approx \bar{u}_1(t) = K_1 x(t) = \tilde{K}_1 x(t) + \tilde{K}_2 \rho_1 K_1 x(t) + \tilde{K}_3 \rho_2 K_2 x(t) \\ u_2(t) \approx \bar{u}_2(t) = K_2 x(t) = \tilde{K}_4 x(t) + \tilde{K}_5 \rho_1 K_1 x(t) + \tilde{K}_6 \rho_2 K_2 x(t) \end{cases}$ , 控制矩阵  $K_1$ 、 $K_2$  需

要从下面的线性矩阵方程组求得

$$\begin{bmatrix} I - \rho_1 \tilde{K}_2 & -\rho_2 \tilde{K}_3 \\ -\rho_1 \tilde{K}_3 & I - \rho_2 \tilde{K}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

即

$$K_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - \rho_1 \tilde{K}_2 & -\rho_2 \tilde{K}_3 \\ -\rho_1 \tilde{K}_3 & I - \rho_2 \tilde{K}_6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_4 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - \rho_1 \tilde{K}_2 & -\rho_2 \tilde{K}_3 \\ -\rho_1 \tilde{K}_3 & I - \rho_2 \tilde{K}_6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 \\ \tilde{K}_4 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

其中

$$\tilde{K}_{3i-2} = \tilde{K}_i \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2, \quad \tilde{K}_{3j-1} = \tilde{K}_j \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j=1,2, \quad \tilde{K}_{3k} = \tilde{K}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix}, \quad k=1,2 \quad (3.25)$$

$\tilde{K}_i$ ,  $i=1,2$  按如下过程计算: 泛函可选为

$$V(x_i, w_i) = V_i(x_i) + \sum_{i=1}^3 \int_{-\tau_i}^0 \int_{+\theta}^0 y(s)^T \tilde{A}_i^T Q_i^{-1} \tilde{A}_i y(s) ds d\theta + \int_{-\tau_i}^0 \xi(s)^T \tilde{S}_i \xi(s) ds, 放大形式选择引理$$

$$2.1 \text{ 即 } \eta_i \leq \tau_i \begin{bmatrix} \xi^T & y^T \end{bmatrix} \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} Q_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \tilde{P}^T \begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} + \int_{-\tau_i}^0 y(s)^T \tilde{A}_i^T Q_i^{-1} \tilde{A}_i y(s) ds \quad (3.26)$$

代入(3.19)中可得一个维数与  $\Xi < 0$  相同的矩阵不等式  $\Xi < 0$ ，再对  $\Xi < 0$  两边同乘以矩阵

$diag\{\tilde{Q}_1, I_{\tilde{n}}, I_{\tilde{n}}, I_{\tilde{n}}\}$ ，其中  $\tilde{n} = n + 2n_1$  为新变量  $\xi(t)$  的维数， $\tilde{Q} = \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & \tilde{Q}_2 \\ 0 & \tilde{Q}_3 \end{bmatrix}$  是新

的“descriptor form”矩阵  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 \\ 0 & \tilde{P}_3 \end{bmatrix}$  的逆。为满足系统的  $H^\infty$  特性可得如下的 LMI

(3.27)，由此得到如下定理：

**定理 3.3** 对于线性时滞系统(3.2)，如果存在正定矩阵  $\tilde{Q}_i, Q_i, i=1,2,3$ ，及矩阵  $\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, U_j, j=1,2$  满足 LMI 组(3.27)成立，则在控制器(3.3)作用下，闭环系统(3.2)是渐近稳定的，且系统的  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ ，其中的控制器增益可这样算得：先算得  $\tilde{K}_i = U_i \tilde{Q}_i^{-1}, i=1,2$ ，再由(3.25)算得  $\bar{K}_i, i=1, \dots, 6$ ，再由(3.24)算得  $K_j, j=1,2$ 。

$$\Xi = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_2^T + \tilde{S}_1 & \left[ \begin{array}{c} \tilde{Q}_3^T - \tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_1 \sum_{i=0}^3 \tilde{A}_i^T \\ + (\tilde{B}_2 U_1)^T + (\tilde{B}_3 U_2)^T \end{array} \right] & 0 & 0 & \tilde{Q}_2 \tilde{A}_1 & \tilde{Q}_2 \tilde{A}_2 & \tilde{Q}_2 \tilde{A}_3 & \tilde{Q}_2 \tilde{C}_1^T \\ * & -\tilde{Q}_3 - \tilde{Q}_3^T + \sum_{i=1}^3 Q_i & 0 & \tilde{B}_1 & \tilde{Q}_3 \tilde{A}_1 & \tilde{Q}_3 \tilde{A}_2 & \tilde{Q}_3 \tilde{A}_3 & 0 \\ * & * & -\tilde{S}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_2^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I_{\tilde{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_1^{-1} Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_2^{-1} Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_3^{-1} Q_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I_{\tilde{n}} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

其中  $\tilde{U}_i = \tilde{K}_i \tilde{Q}_i, i=1,2$ ，因此可得  $\tilde{K}_i = \tilde{U}_i \tilde{Q}_i^{-1}, i=1,2$ 。

(2) 对于小时滞系统， $\tau_i \dot{u} = -\bar{u} + u$  可得到  $\bar{u} \approx u(t - \tau_i)$ ，这样也以  $\xi = col\{x \ \bar{u}_1 \ \dots \ \bar{u}_i\}$  为向量重新构造与原系统等价的新系统的状态方程，而且不用像(1)要估计一极小的参数  $\rho \rightarrow 0$ ，给求解带来了方便。

以  $\xi(t)^T = [x(t)^T \ \tau_2 \bar{u}_2(t)^T \ \tau_3 \bar{u}_3(t)^T]$  为状态变量重写闭环状态方程(3.10)为

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \tilde{A}\xi(t) + \tilde{A}_1\xi(t-\tau_1) + \tilde{B}_1w(t) + \tilde{B}_2u_1(t) + \tilde{B}_3u_2(t) \\ z(t) = \tilde{C}_1\xi(t) + \tilde{C}_2\xi(t+\tau_2) \\ \xi(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0], \bar{\tau} = \tau_1 + \tau_2 \end{cases} \quad (3.28)$$

其中  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \tau_1^{-1}B_2 & \tau_2^{-1}B_2 \\ 0 & -\tau_1^{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_2^{-1}I_n \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix}$ ,

$\tilde{C}_1 = [C \ 0 \ 0]$ ,  $\tilde{C}_2 = [0 \ \tau_2^{-1}D \ \tau_3^{-1}D]$ 。因此(2)在处理  $H^\infty$  控制时会出现因果性问题，只有在输入时滞  $\tau_2 = 0$  时或者受控向量也具有和状态方程中同样的输入时滞即  $z(t) = Cx(t) + Du(t-\tau_2)$  才能有解，此时需要求解的 LMI 与(3.27)形式相同，这里不再赘述。总结以上关于带输入时滞的线性时滞系统(3.2)的  $H^\infty$  控制的各种具体情况，可有如下结论：

- ① 对保守性要求不是特别高的情况，像[32,35,101,105]那样用放大形式采用引理 2.1，且对“descriptor form”矩阵  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$  令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ ，计算简便实时性较高；
- ② 只有状态时滞即输入时滞参数  $\tau_2 = 0$  的情况，如果保守性要求高、实时性要求低则可以采用定理 3.1 再用(3.8)-(3.9)的 cone 补线性化方法计算控制矩阵；
- ③ 输入时滞参数  $\tau_2 \neq 0$  的情况，如果保守性要求高、实时性要求很低则可采用定理 3.2 及算法 3.2；如果保守性要求高、实时性要求较低则可以像[34]那样，放大形式采用引理 2.3，对于矩阵  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$  在求解过程中令  $\bar{Q} = \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \\ 0 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}$ ，再使用 cone 补线性化方法；如果保守性要求不是特别高（比①高）、实时性要求较高（比①低）则可以使用定理 3.3 即改进后的“等价子系统”方法(1)，如果受控向量也具有和状态方程中同样的输入时滞则可以使用(3.25)的改进后的“等价子系统”方法(2)。

### 3.4 仿真示例

例 1 考虑如下线性时滞系统  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1(t-\tau_1) + A_2(t-\tau_2)$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{如 } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{如要得到 } \tau_1, \tau_2 \text{ 各自的稳定界，}$$

可以用引理 3.1, 即由 LMI(3.9)在  $\tau_1 = \tau_2 = 0.1$  时也没找到可行解, 而由[28]中推论 1 的式(20)在  $\tau = \max_{i=1,2} \{\tau_1, \tau_2\} = 200$  时仍有可行解, 因此 3.3.1 中结论——时滞参数多于一个时应尽量使用[28]中结论即基于“Descriptor-form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法来求解时滞参数稳定界是正确的。

**例 2** 考虑如下与(3.2)相符的系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}x(t-0.999) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) \\ z(t) = [0 \ 1]x(t) + 0.1u(t) \end{cases}$$

①在一般情况下, 采用计算较为简便的[32,35,101,105]的方法, 令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ , 令  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0.1$  按小间隔变化(0.01),  $H^\infty$  性能指标最小达到  $\gamma = 0.381$  直到有可行解  $K_1 = [0.0000 \ -3.0601]$ ,  $K_2 = [-0.0000 \ 0.9000]$ , 控制器为  $u(t) = K_1x(t) + K_2x(t-\tau_1)$ , 计算时间 20 秒左右;

②用定理 3.1, 由(3.8)-(3.9)在  $\gamma = 0.00008$  时仍有可行解  $K = [-0.0000 \ -10.0000]$ , 控制器为  $u(t) = Kx(t-\tau_1)$ , 计算时间 5 分钟左右;

③用[34]中定理 1  $H^\infty$  性能指标最小达到  $\gamma = 0.105$ , 迭代 40 次(即 cone 补线性化算法中的  $k$ ), 算得  $K = [1.4961 \ -195.9465]$ , 控制器为  $u(t) = Kx(t-\tau_1)$ , 计算时间 5 分钟左右;

④用定理 3.3, 通过不断调整  $\rho$  最后在  $\rho = 0.03$ ,  $\gamma = 0.357$  时算得  $K = [-0.0002 \ -0.0014]$ , 控制器为  $u(t) = Kx(t-\tau_1)$ , 调整时间 10 分钟左右;

可见①计算速度较快实时性好, 但保守性稍差; ②、③保守性小(其中②在单时滞时能达到保守性最小), 但实时性稍差; ④保守性比②、③大且比①小, 但实时性比①差且比②、③好, 这完全与 3.3.2 中结论相符。

### 3.5 本章小结

本章对线性时滞系统的时滞参数稳定界问题、带输入时滞的线性时滞系统的  $H^\infty$  控制问题分别在单、多时滞的情况下对各保守性、实时性要求不同的组合条件下进行了各种方法的分析、比较, 并进行了改进, 最终得到关于这两个问题的不同情况下的适合的求解方法, 给广大理论工作者、实践人员提供了“具体问题具体分析”的实用的总结,

这就给系统时滞参数稳定界确定、 $H^\infty$  控制器设计带来很大方便。

本章部分结果已整理成文并已发表于《控制理论与应用》。

## 第四章 时滞系统对时滞参数的自适应 $H^\infty$ 控制

### 摘要

对于存在状态时滞、输入时滞的线性时滞系统，当状态时滞常数不能精确已知时，首次使用基于“Descriptor-form”的Lyapunov-Krasovskii泛函方法，并用适当的放大方法提取时滞参数估计值，使得交叉项放大次数减少，放大额度降低从而减小保守性，给出了与时滞大小相关的对时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制方案；在此基础上加入非线性的与时滞相关的环节，给出了一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统的对时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制方案，为后面章节中研究更复杂的带未知输入时滞且非线性环节上界未知的时滞系统的自适应  $H^\infty$  控制打下基础。本章的满足设计要求的两种对时滞参数自适应状态反馈控制器均可通过解相应的线性矩阵不等式（LMI）来得到，最后给出了仿真实例也足以说明本章所提出的对时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制器设计方案的有效性。

### 4.1 引言

对于存在状态时滞、输入时滞的线性时滞系统，第三章给出了不同情况下实用性较高的带记忆的状态反馈控制器的设计方案，但在很多实际情况下时滞参数往往不能精确已知或测量（有时仅知道时滞参数的上下界），这就给实现带记忆控制、时滞相关型判据造成了困难。

一般地，如果时滞参数的上界已知，在泛函求导过程中，可通过放大得到与时滞参数上界相关的判据。比如岳东 2004 年在[48]中就充分利用不确定时滞参数本身及其导数的上界，对泛函求导后得到的 LMI 进行了放大，得到的结果比非时滞相关型具有较小的保守性。而对于带记忆控制器的设计，姜偕富 1998 年在[78]中带记忆控制中通过用时滞参数的一个估计值来代替原来的未知时滞量，实现了一种对具有未知时滞参数的系统的带记忆控制，然而这种控制器的存在性与滞后常数估计的准确程度有关，同样也具有一定的局限性。之后，姜偕富在 2001 年首次在[79]中提出了一种对时滞参数的自适应控制方案，基于 LMI 方法，采用无记忆与带记忆的时滞相关型复合状态反馈控制，其中记忆反馈中的时滞量为实际量的实时估计值，这就使得对时滞系统设计带记忆反馈控制时不必已知时滞常数的精确值。但为得到适当形式的自适应控制律在推导过程中运用了过多次数的放大矩阵不等式；[106]则对[79]中的系统进行了不依赖于时滞的对时滞参数的自适应控制，自适应律的形式有所简化、矩阵不等式次数有所减少但在时滞常数较大的情况下会显出无能为力。因此对于[79,106]中的线性时滞系统，既与时滞相关且保守性

较小的自适应控制还未有进展, 而且对于输入时滞的情况还未研究, 再加上还要满足  $H^\infty$  性能指标的情况就更复杂了。另一方面关于非线性时滞系统的自适应  $H^\infty$  控制, 贾秋玲 2002 年在[80]中研究了一类不确定多时滞非线性系统的自适应  $H^\infty$  控制, 但它是以非线性不确定项范数上界未知的基础上引入自适应控制的, 而且需要对系统矩阵进行特定的分解, 且结论是时滞无关的。本章首先基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 把引入控制后的系统结构充分体现在泛函中, 从而克服以往一般 Lyapunov-Krasovskii 泛函在推导过程中由于矩阵不等式放大次数较多、放大上界较高带来的保守性, 在此基础上, 为得到自适应律没有像[79]那样放大包含时滞参数估计值的二次型积分, 而是通过选择适当的放大形式来提取时滞参数估计值与实际值之差, 因此放大不等式的次数比[79]大大减少, 大大改善自适应控制的保守性; 对于加了与时滞相关的非线性环节, 本章也用同样方法给出了在输入时滞未知的情况下对输入时滞参数进行自适应  $H^\infty$  控制器的设计方案, 并对非线性环节是否与输入时滞相关进行了讨论, 为后面章节中研究更为复杂的非线性时滞系统——输入时滞未知、与系统状态时滞相关的非线性环节上界未知的非线性时滞系统对输入时滞参数、非线性环节与各时滞状态相关的未知上界组成的向量进行自适应  $H^\infty$  控制打下了基础。最后给出了仿真实例也足以说明本章所提出的对时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制器设计方案的有效性。

## 4.2 问题的提出

本文研究如下两种时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + B_1w(t) + B_2u(t-\tau_2) \\ \bar{z}(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau_1, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $x(t) \in R^n$  是状态向量,  $w(t) \in R^m$  为干扰输入向量,  $u(t) \in R^m$  为控制输入向量,  $\bar{z}(t) \in R^m$  为系统受控向量,  $A, A_1, B_1, B_2, C, D$  为具有相应适当维数的矩阵,  $\tau_1 > 0$  为系统状态时滞常数,  $\tau_2 > 0$  为系统受控输入时滞常数 ( $\tau_2$  与  $\tau_1$  不一定相等) 且  $\tau_1, \tau_2$  中至少有一个参数未知,  $\phi$  为系统初始状态函数。这里假设  $\tau_1$  未知, 但有已知上界  $\tau_1^*$ , 下界  $\tau_{1l}$ 。另一种时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t-\tau_i) + \sum_{j=1}^l G_j(x(t-\tau_j), t) + B_2 u(t-\tau_{l+1}) + B_1 w(t) \\ \bar{z}(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max_{i=1, \dots, l+1} \{\tau_i\} \end{cases} \quad (4.2)$$

假设 4.1  $(A, B_2)$  可镇定

假设 4.2 存在已知的连续有界的向量函数  $\delta_j(x(t-\tau_j), t) \in R^n$ , 使得非线性项可表示为  $G_j(x(t-\tau_j), t) = B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t)$ , 上界为  $\|\delta_j(x(t-\tau_j), t)\| \leq \alpha_j \|x(t-\tau_j)\|$ , 其中  $\alpha_j \geq 0$ ,  $j=1, \dots, l$ , 为已知的正常数。该假设中的上界不等式隐含着  $\delta_j(0, t) = 0$ ,  $j=1, \dots, l$ ,  $\forall t$ , 即  $x(t)=0$  为自治系统 ( $u(t)=0$ ) 的一个平衡点。

其中  $x(t) \in R^n$ ,  $w(t) \in R^{n_2}$ ,  $u(t) \in R^{n_1}$ ,  $\bar{z}(t) \in R^n$  定义与①中相同,  $A$ 、 $A_i$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C$ 、 $D$  为具有相应适当维数的矩阵,  $\tau_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, l$  为系统状态时滞常数,  $\tau_{l+1}$  为系统未知的输入时滞常数, 但有已知上界最大值记为  $\tau_{l+1}^*$ , 下界记为  $\tau_{l+1}^-$  并能找到正常数  $\bar{\tau}_{l+1} > 0$  使得  $0 \leq \tau_{l+1}^* - \tau_{l+1}^- \leq \bar{\tau}_{l+1}$  成立,  $\underline{\tau}_{l+1} > 0$  使得  $0 < \underline{\tau}_{l+1} \leq \tau_{l+1}^* - \tau_{l+1}^-$  成立。 $G_j(x(t-\tau_j), t)$  为  $n$  维非线向量函数,  $\phi$  为系统初始状态函数。

对于系统(4.1)研究的目的是: 在系统状态  $x$  是可测的前提下, 对于给定的常数  $\gamma > 0$ , 如何设计一个带记忆的时滞相关型状态反馈控制器

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - \hat{\tau}_1) \quad (4.3)$$

使得系统(4.1)是内部稳定的, 且满足  $\|\bar{z}\|_2 < \gamma \|w\|_2$  (这里  $\|\bullet\|_2$  是  $L_2$  范数)。其中  $\hat{\tau}_1(t)$  为  $\tau_1$  的估计值, 并定出对未知时滞参数  $\tau_1$  的自适应律。

对于系统(4.2)研究的目的是: 对于给定的常数  $m > 0$ , 如何设计一个带记忆的时滞相关型状态反馈

$$\text{控制器 } u(t) = K_1 x(t) + \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_i) + K_{l+2} x(t - \hat{\tau}_{l+1}(t)) \quad (4.4)$$

其中  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  为  $\tau_{l+1}$  的估计值,  $\hat{\tau}_{l+1}(t) \leq 0$ ,  $K_i$ ,  $i=1, \dots, l+2$  为待求矩阵, 使得系统(4.2)是渐近稳定的, 且满足  $\|\bar{z}\|_2 < m \|w\|_2$  (这里  $\|\bullet\|_2$  是  $L_2$  范数), 并定出未知参数  $\tau_i$  的自适应律。

### 4.3 主要结果——自适应控制的第一步改进（保守性的减小）

#### 4.3.1 带输入时滞的线性时滞系统对未知时滞参数的自适应 $H^\infty$ 控制

对于系统(4.1), 根据(4.1)和(4.3)可得闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + B_1w(t) + B_2K_1x(t-\tau_2) + B_2K_2x(t-\tau_2 - \hat{\tau}_1(t-\tau_1)) \\ \bar{z}(t) = (C + DK_1)x(t) + DK_2x(t - \hat{\tau}_1) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \tau_2 + \tau_1^* \end{cases} \quad (4.5)$$

用[28]中“descriptor form”的方法, 并把  $\dot{x}$  分成  $x(t-\tau_2)$  之后的项  $y$  及  $x(t-\tau_2)$  之前的项  $z$  两部分, 令  $y(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + B_1w(t)$ ,  $z = B_2K_1x(t-\tau_2) + B_2K_2x(t - \hat{\tau}_1(t-\tau_2) - \tau_2)$ , 则有

$$y + z = (A + A_1 + B_2K)x(t) + B_1w(t) - \sum_{i=1}^3 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s))ds \quad (4.6)$$

其中  $K = K_1 + K_2$ ,  $\tau_3 = \hat{\tau}_1(t-\tau_1) + \tau_2$ ,  $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_2 = B_2K_1$ ,  $\bar{A}_3 = B_2K_2$ . 对于系统(4.4)取 Lyapunov-Krasovskii 函数为

$$V(x_i, w_i) = V_i(x_i, w_i) + \sum_{j=1}^3 \int_{\tau_j}^0 \int_{s+\theta}^0 (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds d\theta + \frac{\bar{\gamma}}{2} (\tau_1 - \hat{\tau}_1(t-\tau_2))^2 \quad (4.7)$$

其中  $V_i(x_i, w_i) = x_i^T P x_i$ ,  $P, Q_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$  为正定矩阵,  $\bar{\gamma}$  为一正常数.  $V_i(x_i, w_i)$  沿系统(4.6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i, w_i) &= 2x_i^T P(y + z) \\ &= 2[x^T (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} [y+z] \\ &= 2[x^T (y+z)^T] \left[ \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - (y+z) + B_1w \end{bmatrix} \right] - \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s)) ds \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中  $\bar{A} = A + A_1 + B_2K$ , 令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 且  $P_1, P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ . 考虑到

$\hat{\tau}_1(t) \leq 0$ , 因此  $V(x_i, w_i)$  沿系统(4.6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_i, w_i) &\leq \dot{V}_i(x_i, w_i) + \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{\tau_i}^0 [(y(t) + z(t))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(t) + z(t)) - (y(t+\theta) + z(t+\theta))^T \right. \\ &\quad \left. \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(t+\theta) + z(t+\theta))] d\theta - \bar{\gamma}(\tau_1 - \hat{\tau}_1(t-\tau_2)) \hat{\tau}_1(t-\tau_2) \right\} \end{aligned}$$

由引理 2.1 并由  $\eta_i(t) = -2 \int_{-\tau_i}^t [x^T (y+z)^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{A}_i (y(s)+z(s)) ds$ , 可得

$$\eta_i \leq \tau_i \left[ x^T (y+z)^T \right] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_i}^t (y(s)+z(s))^T \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i (y(s)+z(s)) ds \quad (4.9)$$

取  $\tau_4 = \tau_1 + \tau_2$ ,  $\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - \tau_1 = \tau_3 - \tau_4$ , 且

$$\begin{aligned} & \left[ x^T (y+z)^T \right] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_3 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} \\ &= x^T P_1 R_3 P_1^T x + 2x^T P_1 R_3 P_2^T (y+z) + y^T P_2 R_3 P_2^T y + 2y^T P_2 R_3 P_2^T z + z^T P_2 R_3 P_2^T z \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中  $R_i$ ,  $i=1, \dots, 3$ , 为任一  $n$  维正定矩阵 (而[32]中相应的  $R_i$  的维数为  $2n$ ), 取正定矩阵  $R_i = Q_i$ ,  $i=1, \dots, 3$ , 由(4.8-4.10)可得

$$\dot{V}(x_i, w_i) \leq \tilde{x}^T \Xi \tilde{x} + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - \tau_1)[\hat{y} \hat{\tau}_1(t-\tau_2) + z^T P_2 R_3 P_2^T z] \quad (4.11)$$

其中  $\tilde{x} = [x^T \ y^T \ z^T \ w^T]^T$ ,  $\Xi_0 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & P_1 B_1 \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & P_2 B_1 \\ * & * & \Xi_{33} & P_2 B_1 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1 + \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i R_i P_i^T, \quad \Xi_{12} = \Xi_{13} = P - P_1 + \bar{A}^T P_2 + \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i R_i P_2^T, \\ \Sigma_{33} &= -P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \sum_{i=1}^2 \tau_i P_2 R_i P_2^T + \tau_4 P_2 R_2 P_2^T, \\ \Sigma_{22} &= \Sigma_{23} = -P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \sum_{i=1}^3 \tau_i P_2 R_i P_2^T, \end{aligned}$$

为研究系统(4.1)的  $H^\infty$  特性, 令初始值  $\phi(t)=0$ , 则对  $T>0$  及给定的常数  $\gamma>0$ , 有

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^T (\bar{z}^T \bar{z} - m^2 w^T w) dt \leq \int_0^T (\bar{z}^T \bar{z} - m^2 w^T w + \dot{V}(x_i, w_i)) dt \\ &= \int_0^T \{[(C + DK_1)x(t) + DK_2 x(t - \hat{\tau}_1)]^T [(C + DK_1)x(t) + DK_2 x(t - \hat{\tau}_1)] - \\ &\quad m^2 w^T w + \dot{V}(x_i, w_i)\} dt \\ &\leq \int_0^T \bar{x}^T(t) \bar{\Xi} \bar{x}(t) dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中  $\bar{x}^T = [x^T \ x(t-\hat{\tau}_1)^T \ y^T \ z^T \ w^T]$ , 且  $\bar{V} = V + \int_{-\hat{\tau}_1(t)}^t x^T(s) S x(s) ds$ , 考虑到  $\hat{\tau}_{i+1}(t) \leq 0$ ,

可得  $\dot{\bar{V}} \leq \dot{V} + x^T(t) S x(t) - x^T(t - \hat{\tau}_1(t)) S x(t - \hat{\tau}_1(t))$ , 显然  $\forall \tau_1$ , 有  $\tau_1^* \geq \hat{\tau}_1(t) \geq \tau_1 \geq \tau_1$ , 则有

$\bar{\Xi} = S(\tau_1) \leq S'(\tau_1 = \tau_1^*)$ .  $\bar{\Xi} < 0$  时可得  $J_T < 0$ , 由于  $\tau_3^* = \tau_1^* + \tau_2 = \tau_4^*$ , 因此  $y, z$  在  $\bar{\Xi} < 0$  所中对应的各项相同, 故将  $\bar{\Xi} < 0$  还原为二次型时  $y+z$  可归为一项, 不等式的阶数可减一, 由 Schur 补引理化简后可得  $\bar{\Xi} < 0$  等价于一维数为  $8n$  的不等式  $\bar{\Xi} < 0$ , 再对  $\bar{\Xi} < 0$  式两边同乘以矩阵  $diag(X_1 \cdots X_8)$ , 其中  $X_1 = P_1^{-1}$ ,  $X_2 = X = P^{-1}$ ,  $X_3 = Y = P_2^{-1}$ ,  $X_j = I$ ,  $j = 4, \dots, 8$ . 由于(4.8)中只要求  $P_1, P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ , 而没有其他限制, 又考虑到要兼顾保守性和运算简便, 可借鉴[32]中的方法令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ , 即  $X = n_1/n_2 X_1 = 1/n_2 Y$ , 其中  $n_1, n_2$  为正常数, 可得  $\bar{\Xi} < 0$  等价于如下不等式 (中间过程略):

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_1 & \bar{\Xi}_2 & \cdots & \bar{\Xi}_3 \\ \bar{\Xi}_2^T & \Gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\Xi}_3^T & 0 & \cdots & \Gamma_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.13)$$

其中  $\bar{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 & 0 & \bar{\Sigma}_2 & B_1 \\ 0 & -\bar{S} & 0 & 0 \\ \bar{\Sigma}_2^T & 0 & \bar{\Sigma}_3 & B_1 \\ B_1^T & 0 & B_1^T & -m^2 I \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\Xi}_2^T = [0 \ 0 \ n_2 A_1 X \ 0]$ ,  $\bar{\Xi}_3^T = [0 \ 0 \ n_2 B_2 U_1 \ 0]$ ,  
 $\bar{\Xi}_4^T = [0 \ 0 \ n_2 B_2 U_2 \ 0]$ ,  $\Gamma_1 = -(\tau_1^*)^{-1} Q_1$ ,  $\Gamma_2 = -\tau_2^{-1} Q_2$ ,  $\Gamma_3 = -(\tau_1^* + \tau_2)^{-1} Q_3$ ,  
 $\bar{\Xi}_5^T = [n_1/n_2(CX + DU_1) \ DU_2 \ 0_1 \ \cdots \ 0_5]$ ,  $\Gamma_4 = -I$ ,

$$\bar{\Sigma}_1 = n_2/n_1(A + A_1)X + n_2/n_1 \sum_{i=1}^2 B_2 U_i + n_2/n_1 X(A + A_1)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^2 (B_2 U_i)^T + \tau_1^* Q_1 + \tau_2 Q_2 + (\tau_1^* + \tau_2) Q_3 + (n_2/n_1)^2 \bar{S}$$

$$\bar{\Sigma}_2 = n_2/n_1(n_2 - n_1)X + n_2/n_1 X(A + A_1)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^2 (B_2 U_i)^T + \tau_1^* Q_1 + \tau_2 Q_2 + (\tau_1^* + \tau_2) Q_3,$$

$$\bar{\Sigma}_3 = -2n_2 X + \tau_1^* Q_1 + \tau_2 Q_2 + (\tau_1^* + \tau_2) Q_3, \quad U_1 = K_1 X, \quad U_2 = K_2 X, \quad \bar{S} = X S X,$$

则根据以上推导可得如下结论:

**定理 4.1** 对于带输入时滞且状态时滞参数  $\tau_1$  未知的线性时滞闭环系统(4.2), 如果存在矩阵  $U_1, U_2$ , 正定矩阵  $X, Q_i, i=1, \dots, 3$ ,  $\bar{S}$ , 及正常数  $n_1, n_2$ , 使得线性矩阵不等式 LMI(4.13)成立, 可取形如(4.3)的带记忆的状态反馈控制器, 且对  $\tau_1$  的自适应律可取为

$$\dot{\hat{\tau}}_1 = -\frac{1}{\gamma} z(t + \tau_2)^T P_2 R_3 P_2^T z(t + \tau_2) \quad (4.14)$$

选定的常数使得  $\tau_1$  的估计值  $\hat{\tau}_1(t)$  满足  $\tau_1^* \geq \hat{\tau}_1(t) \geq \tau_1 \geq \tau_{1*}$ ,  $\forall t \geq 0$ , 则闭环线性时滞系统

(4.5)是渐近可镇定的，且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $m$ 。反馈增益矩阵及各未知矩阵可这样算得： $K_1 = U_1 X^{-1}$ ,  $K_2 = U_2 X^{-1}$ 。

**证明** 根据以上推导我们可以看出，若取自适应律式(4.12)，且当  $\tilde{\Sigma} < 0$  时系统是可镇定的，进一步，当  $w(t) = 0$  时，有  $\dot{V}(t) = \dot{V}(x_t, 0) < 0$ ，这时时滞系统(4.1)是内部渐近稳定的。如果存在矩阵  $U_1, U_2$ ，正定矩阵  $X, Q_i, i=1, \dots, 3$ ,  $\bar{S}$ ，及正常数  $n_1, n_2$ ，使得线性矩阵不等式 LMI(4.11)成立，且对  $\tau_1$  的自适应律可取为式(4.12)时则  $\tilde{\Sigma} < 0$ ，线性时滞系统(4.1)是可镇定的（由 Schur 补引理可知  $\tilde{\Sigma} < 0$  包含着  $\Sigma < 0$  的解），且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ 。用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱可算得矩阵  $U_i$ ，正定矩阵  $X$ ，即可算得  $K_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1, 2$ ,  $P = X^{-1} = n_2 / n_1 P_1 = n_2 P_2$ ，由  $\bar{S} = X S X$  可得  $S = P \bar{S} P$ 。根据以上推导我们可以看出余下只需证明  $\gamma > 0$  的存在性。

如果闭环系统(4.5)是内部稳定的，则根据  $x(t) \rightarrow 0$ , ( $t \rightarrow \infty$ ) 以及(12)我们可得  $\hat{\tau}_1(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) 也即当系统稳定  $\hat{\tau}_1(t)$  变化率趋于零，且由(4.14)可知  $\dot{\hat{\tau}}_1(t) \leq 0$ ，因此  $\hat{\tau}_1(t)$  一直下降直至系统稳定，此时其值也达到稳态值，也即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau}_1(t) = \tau_\infty$  存在以及

$$\tau_\infty = \hat{\tau}_1(0) - \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty z(t+\tau_2)^T P_2 R_3 P_2^T z(t+\tau_2) dt = \hat{\tau}_1(0) - \frac{1}{\gamma} N(\phi) \quad (4.15)$$

因为  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $\dot{x} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ )，故存在正常数  $\bar{M}$ ,  $\lambda$ ，使  $\|z(t+\tau_2)\|^2 < \bar{M} e^{-\lambda t}$ ,  $\forall t \geq 0$ ， $\bar{M}$  是由系统参数确定的常数且与系统的初始函数  $\phi$  的选取有关，故可得

$$N(\phi) = \int_0^\infty z(t+\tau_2)^T P_2 R_3 P_2^T z(t+\tau_2) dt \leq \lambda_{\max}(P_2 R_3 P_2^T) \frac{\bar{M}}{\lambda} \quad (4.16)$$

因此  $N(\phi)$  就是可估计的。由(4.15)如果选取  $\gamma^{-1} \leq \max_{\phi \in C_h[-\tau, 0]} \{(\hat{\tau}_1(0) - \tau_1)/N(\phi)\}$ ，则有  $\tau_\infty \geq \tau_1 > 0$  (而  $\hat{\tau}_1(t)$  始终下降，因此  $\dot{\hat{\tau}}_1(t) > 0$ )。这就表明正常数  $\bar{\gamma} > 0$  是存在的，且可以从给定的系统及定义在有界集合上的初始函数来进行估计。  
证毕

**注 4.1** 从(4.9-4.10)可以看出为与  $\gamma(\tau_1 - \hat{\tau}_1(t-\tau_2))\dot{\hat{\tau}}_1(t-\tau_2)$  结合得到适当形式的自适应律，本章通过交叉项放大再提取放大后的系数来得到  $\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - \tau_1 = \tau_3 - \tau_4$ ，而在[79]中，以时滞参数估计值与真实值之差为系数的二次型是通过反复放大包含时滞参数估计值的二次积分项得到的，显然本章的结论在已经选取保守性较小的基于“descriptor form”的

Lyapunov-Krasovskii 泛函基础上又进一步消除了为得到自适应律而附加的放大不等式次数, 因此保守性比[79]要小得多。此外, [79]中的结论虽然最后也是要求解一个 LMI 来得到控制器, 但是它所要求的 LMI 中有需要事先确定的若干未知正定矩阵, 如果没有这些矩阵的值, 那结论中的 LMI 就不是线性的, 而本章的结论中每个矩阵、参数都是可以确定的, 比[79]的实用性要强。

**注 4.2** 由于  $z$  是  $x(t-\tau_2)$  之前的项, 因此  $z(t+\tau_2)$  是可测量的, 此外在对未知参数  $\tau_i$  引入自适应律时, 前面我们假设  $\hat{\tau}_i(t) \geq \tau_i$ , 尽管  $\tau_{i+1}$  未知但在实际应用中我们可以先令  $\hat{\tau}_i(0) = \tau_i^*$ , 在正常数  $\bar{\gamma} > 0$  的选取中有  $\gamma^{-1} \leq \max_{\phi \in C_R[-\tau, 0]} \{(\hat{\tau}_i(0) - \tau_i)/N(\phi)\}$ , 但  $\tau_i$  是未知的, 而  $\{(\hat{\tau}_i(0) - \tau_i)/N(\phi)\} \leq \{(\hat{\tau}_i(0) - \tau_{i*})/N(\phi)\}$ , 因此在求  $\gamma$  的估计值时可以取  $\gamma^{-1} = \max_{\phi \in C_R[-\tau, 0]} \{(\hat{\tau}_i(0) - \tau_{i*})/N(\phi)\}$ 。因此自适应律(4.12)是可实现的。

**注 4.3** 在求解矩阵不等式(4.13)时, 为简单起见, 可令  $n_1 = 1$  (或其它正值), 而用搜索法求解  $n_2$ : 即对  $n_2$  设一初值, 每经过一微小变化 (如 0.01 为一间隔变化), 直至 LMI(4.13) 有可行解为止。

#### 4.3.2 一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统的对时滞参数的自适应 $H^\infty$ 控制

对于系统(4.2), 根据(4.2)和(4.4)可得闭环系统状态方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^l A_j x(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^l G_j(x(t-\tau_j), t) + B_1 w(t) + B_2 K_1 x(t-\tau_{i+1}) \\ \quad + B_2 \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\tau_{i+1}-\tau_i) + B_2 K_{i+2} x(t-\tau_{i+1}-\hat{\tau}_{i+1}(t-\tau_{i+1})) \\ \bar{z}(t) = (C + DK_1)x(t) + D \sum_{j=1}^l K_{j+1} x(t-\tau_j) + DK_{i+2} x(t-\hat{\tau}_{i+1}) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max_{i=1, \dots, l+1} \{\tau_i\} + \tau_{i+1}^* \end{array} \right. \quad (4.17)$$

和上小节一样, 用[28]中“descriptor form”的方法, 并把  $\dot{x}$  分成  $x(t-\tau_{i+1})$  之后的项  $y$  及  $x(t-\tau_{i+1})$  之前的项  $z$  两部分, 令

$$\begin{aligned} y(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t-\tau_i) + B_1 w(t) + \sum_{j=1}^l G_j(x(t-\tau_j), t), \\ z &= B_2 K_1 x(t-\tau_{i+1}) + B_2 \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\tau_{i+1}-\tau_i) + B_2 K_{i+2} x(t-\tau_{i+1}-\hat{\tau}_{i+1}(t-\tau_{i+1})) \end{aligned} \quad (4.18)$$

对于系统(4.18), 并取系统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_i, w_i) = V_i(t) + \sum_{i=1}^{2l+2} \int_{\tau_i}^t \int_{\tau_i+\theta}^t (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds d\theta + \frac{\gamma}{2} (\tau_{i+1} - \hat{\tau}_{i+1}(t - \tau_{i+1}))^2 \quad (4.19)$$

其中  $\tau_{i+1+i} = \tau_{i+1} + \tau_i$ ，  $i = 1, \dots, l$ ，  $\tau_{2l+2} = \tau_{l+1} + \hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1})$ ，  $\bar{A}_i = A_i$ ，  $\bar{A}_{l+1} = B_2 K_i$ ，

$$i = 1, 2, \dots, l+2, \quad K = \sum_{i=1}^{l+2} K_i, \quad V_i(t) = x^T P x, \quad \gamma \text{ 为一正常数}, \quad P > 0, \quad Q_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2l+2.$$

$V_i(t)$  沿系统(4.18)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= 2x^T P(y+z) = 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - y - z + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{2l+2} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_j \end{bmatrix} \int_{-\tau_j}^t (y(s) + z(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^l \begin{bmatrix} 0 \\ G_j(x(t-\tau_j), t) \end{bmatrix} \right] \\ &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - y - z + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{2l+2} \eta_j + \sum_{j=1}^l \rho_j \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中  $\bar{A} = A + \sum_{i=1}^{2l+2} \bar{A}_i + B_2 K$ ，令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ，且  $P_1, P_2$  满足  $E \bar{P}^T = \bar{P} E$ 。

后面的推导和上一小节类似，多了如下关于非线性的部分：

$$\begin{aligned} \text{对于 } \rho_j &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ G_j(x(t-\tau_j), t) \end{bmatrix}, \text{ 由引理 2.1 有} \\ \rho_j &\leq [x^T \quad (y+z)^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} T_j [0 \quad I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + G_j^T(x(t-\tau_j), t) T_j^{-1} G_j(x(t-\tau_j), t) \\ &\leq [x^T \quad (y+z)^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} T_j [0 \quad I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \lambda_{\max}(B_2^T T_j^{-1} B_2) \alpha_j^2 x(t-\tau_j)^T x(t-\tau_j) \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中  $T_j$ ， $j = 1, \dots, l$  为维数为  $n$  的正定矩阵，取正定矩阵  $T_j = \bar{\gamma} I_n$ ， $j = 1, \dots, l$ ，经过与上一小节类似的推导，最后得到如下定理：

**定理 4.2** 对于带未知输入时滞参数  $\tau_{i+1}$  的非线性时滞系统(4.2)，如果存在矩阵  $U_i$ ， $i = 1, \dots, l+2$ ，正定矩阵  $X$ ， $Q_i$ ， $i = 1, \dots, 2l+2$ ， $\bar{S}_i$ ， $i = 1, \dots, l+1$ ，及正常数  $\bar{\gamma}$ 、 $\eta_1$ 、 $\eta_2$ ，使得线性矩阵不等式(4.23)成立，对  $\tau_{i+1}$  的自适应律可取为

$$\hat{\tau}_{i+1}(t) = -\frac{1}{\gamma} z(t + \tau_{i+1})^T P_2 Q_{2l+2} P_2^T z(t + \tau_{i+1}) \quad (4.22)$$

选定的常数使得  $\hat{\tau}_{i+1}$  的估计值  $\hat{\tau}_{i+1}(t)$  满足  $\hat{\tau}_{i+1}^* \geq \hat{\tau}_{i+1}(t) \geq \tau_{i+1} \geq \tau_{i+1*}$ ,  $\forall t \geq 0$ , 则线性时滞系统(4.2)是可镇定的, 且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $m$ 。控制器取为(4.4), 反馈增益矩阵为:  $K_j = U_j X^{-1}$ ,  $j = 1, \dots, l+2$ 。而用来估算  $\gamma$  的式子(4.15)、(4.16)中的  $Q_3$  变为了  $Q_{2l+2}$ 。其中

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & \tilde{\Xi}_2 & \cdots & \tilde{\Xi}_{3l+4} \\ \tilde{\Xi}_2^T & M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_{3l+4}^T & & & M_{3l+3} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

其中的  $\tilde{\Xi}_{i+1}^T = [0_1 \ \cdots \ 0_{l+2} \ n_2 A_i X \ 0_1 \ \cdots \ 0_l]$ ,  $M_i = -\tau_i^{-1} Q_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,

$$\tilde{\Xi}_{l+i+1}^T = [0_1 \ \cdots \ 0_{l+2} \ n_2 B_2 U_i \ 0_1 \ \cdots \ 0_{l+1}], \ M_{l+i} = -(\tau_{i+1}^*)^{-1} Q_{l+i}, \ i = 1, \dots, l+2,$$

$$\tilde{\Xi}_{2l+4}^T = [n_2/n_1(CX + DU_1) \ DU_2 \ \cdots \ DU_{l+2} \ 0_1 \ \cdots \ 0_{2l+4}], \ M_{2l+3} = -I_n,$$

$$\tilde{\Xi}_{2l+4+i}^T = [0_1 \ \cdots \ 0_i \ X \ 0_1 \ \cdots \ 0_{3l+6}], \ M_{2l+3+i} = -\bar{\gamma}(\lambda_{\max}(B_2^T B_2) \alpha_i^2)^{-1} I_n, \ i = 1, \dots, l,$$

$$\tilde{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_1 & 0_1 & \cdots & 0_{l+1} & \tilde{\Sigma}_2 & B_1 \\ 0_1 & -\tilde{S}_1 & \cdots & 0 & 0 & 0_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{l+1} & 0 & \cdots & -\tilde{S}_{l+1} & 0 & 0_{l+1} \\ \tilde{\Sigma}_2^T & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\Sigma}_3 & B_1 \\ B_1^T & 0_1 & \cdots & 0_{l+1} & B_1^T & -m^2 I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Sigma}_1 = n_2/n_1(A + \sum_{i=1}^l A_i)X + n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} B_2 U_i + n_2/n_1 X(A + \sum_{i=1}^l A_i)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i + (n_2/n_1)^2 \sum_{i=1}^{l+1} \tilde{S}_i + l\bar{\gamma}$$

$$\tilde{\Sigma}_2 = n_2/n_1(n_2 - n_1)X + n_2/n_1 X(A + \sum_{i=1}^l A_i)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i + l\bar{\gamma},$$

$$\tilde{\Sigma}_3 = \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i - 2n_2 X + l\bar{\gamma}, \ U_i = K_i X, \ i = 1, \dots, l+2, \ \tilde{S}_i = X S_i X, \ \tau_{i+1+i}^* = \tau_{i+1}^* + \tau_i, \ i = 1, \dots, l.$$

当非线性环节包含未知参数  $\tau_{i+1}$  的部分时, 即系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t-\tau_i) + \sum_{j=1}^{l+1} G_j(x(t-\tau_j), t) + B_2 u(t-\tau_{l+1}) + B_1 w(t) \\ \bar{z}(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max_{i=1, \dots, l+1} \{\tau_i\} \end{cases} \quad (4.24)$$

如  $G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}), t) = G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}))$  即只和  $x(t-\tau_{l+1})$  有关, 则(4.18)中  $z$  变为

$$z = B_2 K_1 x(t-\tau_{l+1}) + B_2 \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\tau_{l+1}-\tau_i) + B_2 K_{l+2} x(t-\tau_{l+1}-\hat{\tau}_{l+1}(t-\tau_{l+1})) + G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}))$$

此时(4.21)中可取  $T_{l+1}^{-1} = \tilde{\gamma}(\hat{\tau}_{l+1}-\tau_{l+1})I_n$ , 其中  $\tilde{\gamma}$  为一正常数, (4.21)中的系数为  $l\bar{\gamma}$  的部分再加上系数为  $[\tilde{\gamma}(\hat{\tau}_{l+1}-\tau_{l+1})]^{-1}$  的相应部分 (在(4.23)的  $\tilde{\Sigma}_1$  中放大为  $(\tilde{\gamma}\tilde{\Sigma}_{l+1})^{-1}$ ), 这样(4.22)中加上  $-\frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \|G_{l+1}(x(t))\|^2$ , 即可以少放大一次非线性项  $G_j^T(x(t-\tau_j), t)T_j^{-1}G_j(x(t-\tau_j), t)$ , 其余证明过程与定理 4.2 一样。如果  $G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}), t)$  还和当前时刻  $t$  有关, 则(4.16)中  $z$  不变。

此外, (4.19)也多一项

$$G_{l+1}^T(x(t-\tau_{l+1}))G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1})) = \delta_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}))^T B_2^T B_2 \delta_{l+1}(x(t-\tau_{l+1})) \leq \lambda_{\max}(B_2^T B_2) \|\delta_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}))\|^2 \leq \lambda_{\max}(B_2^T B_2) \alpha_{l+1}^2 \|x(t-\tau_{l+1})\|^2$$

因此式(4.17)中的  $\bar{V} = V + \sum_{i=1}^{l+1} \int_{-\tau_i}^0 x^T(s) S_i x(s) ds + \int_{-\hat{\tau}_{l+1}(t)}^0 x^T(s) S_{l+2} x(s) ds$

相应  $\tilde{x}^T = [x^T \quad x^T(t-\tau_1) \quad \cdots \quad x^T(t-\tau_{l+1}) \quad x^T(t-\hat{\tau}_{l+1}(t)) \quad y^T \quad w^T]$ , 由定理 4.2 可得

**推论 4.1** 对于系统(4.24), 定理 4.1 仍然成立, 除了  $\bar{S}_i$  的个数增加至  $l+2$ , 如  $G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}), t) = G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}))$ , 则最后要求解的 LMI(4.23)中  $\tilde{\Sigma}_1$  中的  $l\bar{\gamma}$  变为  $l\bar{\gamma} + (\tilde{\gamma}\tilde{\Sigma}_{l+1})^{-1}$ , 其余项不变, 对  $\tau_{l+1}$  的自适应律由(4.22)变为

$$\hat{\tau}_{l+1}(t) = -\frac{1}{\gamma} z(t+\tau_{l+1})^T P_2 Q_{2l+2} P_2^T z(t+\tau_{l+1}) - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \|G_{l+1}(x(t))\|^2 \quad (4.25)$$

为求得  $\gamma$ , 由假设 4.2 可知(4.16)中  $N(\phi)$  需加上

$$\bar{\gamma} \int_0^\infty \|G_{l+1}(x(t))\|^2 dt = \bar{\gamma} \int_0^\infty \|B_2 \delta_{l+1}(x(t))\|^2 dt \leq \bar{\gamma} \lambda_{\max}(B_2^T B_2) \alpha_{l+1}^2$$

如  $G_{l+1}(x(t-\tau_{l+1}), t)$  还和当前时刻  $t$  有关, 则最后要求的 LMI 由(4.23)变为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \Gamma_1 \\ \Gamma_1^T & \Gamma_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

其中  $\Gamma_2 = -\bar{\gamma}/(\lambda_{\max}(B_2^T B_2) \alpha_{l+1}^2) \bullet I_n$ ,  $\bar{\Xi}$  中的  $\bar{\Xi}_1$  增加对应于  $x^T(t-\tau_{l+1})$  的一维,

$\Gamma_1^T = [0_1 \dots 0_{l+1} \ X \ 0_1 \dots 0_{3l+6}]$ , 其余证明过程与定理 4.2 的一样, 这里不再赘述.

**注 4.4** 当状态时知参数  $\tau_i$ ,  $i=1,\dots,l$  未知而输入时滞常数  $\tau_{l+1}$  已知时, 状态反馈控制器应为  $u = K_1 x(t) + \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\hat{\tau}_i)$ . 当状态时知参数  $\tau_i$ ,  $i=1,\dots,l$  和输入时滞常数  $\tau_{l+1}$  均未知时, 状态反馈控制器应为  $u = K_1 x(t) + \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\hat{\tau}_i) + K_{l+2} x(t-\hat{\tau}_{l+1})$ . 这时要采用多参数的自适应律, 而本文又加入了非线性环节, 如(4.2)中定义的非线性项的上界未知, 情况将更加复杂。[80]中对一类不确定多时滞非线性系统进行了对非线性项的上界的自适应  $H^\infty$  控制的研究, 但采用的是传统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 而且要对系统矩阵  $A$  的进行分解, 结果有一定保守性, 关于这方面进一步的研究将在后面的章节中进行。

#### 4.4 仿真示例

**例 1** 考虑与(4.1)相符的时滞系统其中  $\tau_1$  未知,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ ,

$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tau_2 = 0.8$ ,  $\tau_1' = 0.4$ ,  $\tau_1 = 0.3$ ,  $\tau_{l+} = 0.2$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $D = 0.1$ , 取  $m = 0.9$ , 把这些数据代入 LMI(4.13), 令  $n_1 = 1, n_2 = 0.1$  按小间隔变化(0.01)直到 LMI(4.13)有可行解:

$P = \begin{bmatrix} 3.5428e-007 & 0.0001 \\ 0.0001 & 2.5532 \end{bmatrix}$ ,  $K_1 = \begin{bmatrix} 0.0001 & -0.6469 \end{bmatrix}$ ,  $K_2 = 1.0e-004 * [-0.0008 \ -0.4542]$ ,

$Q_3 = \begin{bmatrix} 820770 & -0.0000 \\ -0.0000 & 6.3949e-005 \end{bmatrix}$ , 此时  $n_2 = 0.69$ . 取  $\hat{\tau}_2(0) = \tau_2' = 0.4$ ,

$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin[4\pi(t-\tau)/\tau] \\ -3 \cos[4\pi(t-\tau)/\tau] \end{bmatrix}$ , 可得  $\bar{M} = \|z\|_{t=0} = \|\dot{x} - y\|_{t=0} = 0.9532$ , 取  $\lambda = 0.0024$ , 则由

(4.16) 可估算出  $N(\phi) = 0.3454$ , 因此可取  $\gamma^{-1} = \max_{\phi \in C_{\pi}[-\tau, 0]} \{(\hat{\tau}_1(0) - \tau_{l+})/N(\phi)\} = 0.5791$  即

$\gamma = 1.7268$ . 仿真所得系统状态  $x(t)$  和参数估计  $\hat{\tau}_1(t)$  分别见图 4.1(a)、(b)。

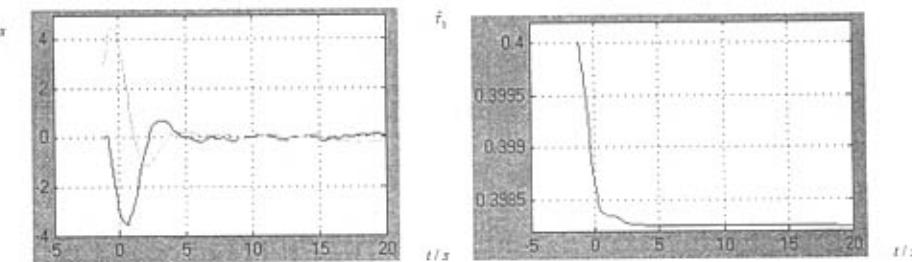


图 4.1(a)系统状态

图 4.1(b)未知时滞参数估计

Fig.4.1(a) State of the system

Fig.4.1(b) Estimate of the unknown delay

parameter

例 2 考虑与(4.2)相符的时滞系统其中  $l=1$ ,  $\tau_2$  未知,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}$ ,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = 0.8, \quad \tau_2^* = 0.999, \quad \tau_{2*} = 0.6, \quad C = [0 \ 1], \quad D = 0.1,$$

$$G(x(t-\tau_1)) = \sqrt{|x_1(t-\tau_1)x_2(t-\tau_1)|} \leq B_2 \cdot 0.4472 \|x(t-\tau_1)\|, \text{ 取 } m = 1.6, \text{ 把这些数据代入}$$

LMI(4.23), 令  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0.1$  按小间隔变化(0.01)直到 LMI(4.23)有可行解:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1301 & 0.0130 \\ 0.0130 & 2.1896 \end{bmatrix}, \quad K_1 = [0.0181 \quad -5.3367], \quad K_2 = [-0.0002 \quad -0.0017],$$

$$K_3 = 1.0e-003 * [-0.0417 \quad -6755], \quad \bar{\gamma} = 0.0167, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 0.0220 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0001 \end{bmatrix},$$

此时  $n_2 = 0.71$ . 取  $\hat{\tau}_2(0) = \tau_2^* = 0.999$ ,  $\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin[4\pi(t-\tau)/\tau] \\ -3\cos[4\pi(t-\tau)/\tau] \end{bmatrix}$ , 可得

$\bar{M} = \|z\|_{t=0} = \|\dot{x} - y\|_{t=0} = 1.2222$ , 取  $\lambda = 0.0729$ , 则由(4.16)可估算出  $N(\phi) = 0.0156$ , 因此

可取  $\gamma^{-1} = \max_{\phi \in C_R[-\tau, 0]} \{\hat{\tau}_2(0) - \tau_{2*}\} / N(\phi) = 25.5754$  即  $\gamma = 0.0391$ . 仿真所得系统状态  $x(t)$  和参

数估计  $\hat{\tau}_2(t)$  分别见图 2(a)、(b).

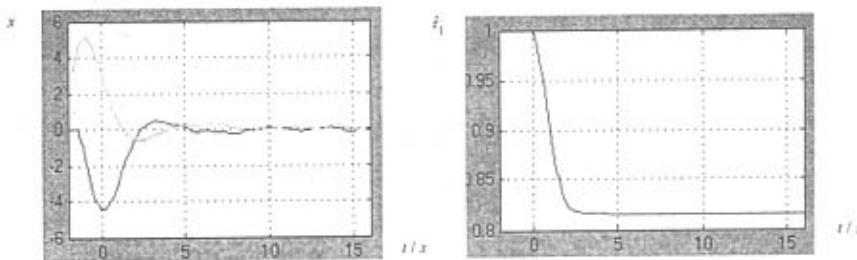


图 4.2(a) 系统状态

Fig.4.2(a) State of the system

图 4.2(b) 未知时滞参数估计

Fig.4.2(b) Estimate of the unknown delay parameter

从图 1, 2 中可清晰看出系统状态在本文所设计的自适应  $H^\infty$  控制律作用下最终能很好的收敛, 未知时滞参数的估计值从初值单调下降, 并能使其终值始终不小于其真实值。

## 4.5 本章小结

本章通过使用基于”descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 和线性矩阵不等式方法 LMI, 首先研究带未知状态时滞、输入时滞的线性时滞系统, 当状态时滞参数不能精确已知时, 充分利用”descriptor form”一次集中放大交叉项能减小保守性的优越性, 在此基础上在放大交叉项时适当提取时滞参数估计值与实际值之差, 从而消除了以往结论中为得到适当形式的自适应律而附加的放大次数, 此外还把”descriptor form”进行了以输入时滞为滞后常数界限的前后两个时段的划分, 从而使最终的自适应律不违反因果性, 最后通过求解一个 LMI 得到相应的带记忆状态反馈控制器(4.2)及对未知状态时滞参数的自适应律(4.14)。之后又研究了一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统, 当输入时滞参数不能精确已知时, 采用和研究前一种系统类似的方法, 并对非线性环节带来的复杂性作了放大处理, 最后也是通过求解一个 LMI 得到相应的带记忆状态反馈控制器(4.4)及对未知状态时滞参数的自适应律(4.22)。并对在非线性环节与输入时滞也相关的情况作了相应回论, 从与输入时滞相关的这部分非线性环节是否与当前时刻相关角度得到了推论 4.1。这些都为后面章节中研究更为复杂的非线性时滞系统——时滞常数未知且与时滞状态相关的非线性环节上界未知的情况奠定了基础。从仿真示例中可以看出, 本章的控制器设计方案当时滞常数未知时容易实现, 具有很好的优越性。

本章的部分结果已整理成文并发表于《自动化学报》, 还有部分结果已整理成文并发表于《系统工程理论与实践》。

## 第五章 时滞系统新型自适应控制的研究

### 摘要

对于时滞常数不能精确已知的系统，针对以往对时滞参数自适应控制方法中存在的两点缺陷——需要对时滞参数估计值进行不小于其真实值的限制，及为保证这一限制在控制过程中始终成立需要估算一个很难计算的“调整常数”，首次提出了一种新型的自适应状态反馈控制方案，通过引入一种新型的带记忆状态反馈控制器，突破以往自适应控制必须让估计值下降的模式，使得对未知时滞参数的自适应律与其当前值相关，从而解决了上述两个问题，大大增强实用性；接着，针对新型自适应控制方案中存在的会引起“无记忆”状态反馈控制的问题，对新型自适应控制器进行了进一步改进，加入两个事先可以确定的参数，使状态反馈控制始终能反映未知时滞参数，这样在时滞参数对系统影响较大的情况下也能成功的进行新型自适应控制，从而使得新型自适应控制方案的适用范围得到扩展。最后给出了仿真示例也足以说明本章所提出的对时滞参数的自适应新型控制器设计方案的有效性。

### 5.1 引言

对于存在不确定时滞参数的时滞系统，第四章对于带未知状态时滞的线性输入时滞系统、带未知输入时滞的非线性多时滞系统分别给出了对未知时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制器的设计方案，尽管第四章的关于时滞系统的对时滞参数的自适应控制已经比以往的方法减小了保守性，但是影响时滞系统自适应控制的最关键的问题——对时滞参数估计值必须不小于其真实值的限制，以及为保证这一限制必须事先估算一个很难计算的“调整常数”，都还没有得到根本解决。

本章针对以上两个困扰时滞系统自适应控制研究者很久的问题，对于时滞参数已知其上下界的线性时滞系统（可带输入时滞），首次提出一种对时滞参数的新型自适应控制方案，不仅吸取上一章中使用基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函及选择适当放大方式以提取时滞参数估计值来减小结论保守性的优点，而且采用了一种新型的带记忆控制的方法，使得带记忆控制的时滞项能反映时滞参数估计值与其一接近值之差的平方，这样推导出的时滞参数的自适应律不再像以往那样是一个关于系统状态的负定矩阵的二次型，而是一个以当前时滞参数估计值与其一接近值之差的相反数为系数的关于系统状态的正定的二次型，也就是说时滞参数的估计值变化和其当前值与时滞参数的一接近值之差的符号相反，在这样的自适应律作用下，时滞参数估计值不需要限制其与

真实值大小的关系，只要其初值落在上下界之间，则其值在控制过程中会始终处于这个范围，最后趋于时滞参数的一个接近值，以往很难计算的“调整常数”也就不再需要了。可以说，这种新型的对时滞参数的自适应控制从根本上解决了以往自适应控制在实用性上的两个问题，但仔细研究可以发现该方法仍有问题——它所使用的带记忆控制实际上反映的是未知时滞估计值与该时滞的接近值之差的平方，而没有真正反映时滞的估计值，因此它实际上是一种无记忆控制，特别是在时滞参数估计值早于系统状态趋于稳定时更为明显，这会使得这种状态反馈控制在未知时滞参数对系统影响较大的情况下无能为力。因此，本章进一步对新型自适应控制进行了改进，通过加入两个事先可以确定的参数，使状态反馈控制始终能反映未知时滞参数，特别是当时滞参数估计值趋于稳定时原来的带记忆状态反馈控制所包含的时滞常数接近于所估计的时滞常数，从而使得新型自适应控制的实用性得到提高，在时滞参数不能精确已知时给时滞系统控制器的设计带来了很大的方便。最后给出了仿真示例也足以说明本章所提出的对时滞参数的自适应新型控制器设计方案的有效性。

## 5.2 问题的提出

本章研究如下两种线性时滞系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + Bu(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-\tau_1, 0] \end{cases} \quad (5.1)$$

式中  $x(t) \in R^n$  是状态向量， $u(t) \in R^m$  为控制输入向量， $A$ 、 $A_1$ 、 $B$  为具有相应适当维数的矩阵， $\tau_1 > 0$  为系统状态时滞常数且  $\tau_1$  未知，但有已知上界  $\tau_1^*$  和已知下界  $\tau_{1*}$ ，及较为接近  $\tau_1$  的值  $h_1$ （一般  $h_1$  取为  $\tau_1^*$  和  $\tau_{1*}$  的中间值），并能找到正常数  $\bar{\tau}_1$  使得  $0 < \tau_1^* - h_1 \leq \bar{\tau}_1$  成立。 $\phi$  为系统初始状态函数。

针对系统(5.1)研究的目的是：如何设计一个带记忆的时滞相关型状态反馈控制

$$u(t) = K_1x(t) + K_2x(t - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2) \quad (5.2)$$

其中  $\hat{\tau}_1(t)$  为  $\tau_1$  的估计值，假设  $\dot{\hat{\tau}}_1(t) = -(\hat{\tau}_1(t) - h_1)m$ ，其中  $m \geq 0$  为一非负常数即  $\hat{\tau}_1(t)$  变化的方向与  $(\hat{\tau}_1(t) - h_1)$  的符号相反，使得系统(4.1)是内部稳定的，并定出未知参数  $\tau_1$  的自适应律。另一种时滞系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_2) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\max(\tau_1, \tau_2), 0] \end{cases} \quad (5.3)$$

式中  $x(t) \in R^n$  是状态向量,  $u(t) \in R^m$  为控制输入向量,  $A$ 、 $A_1$ 、 $B$  为具有相应适当维数的矩阵,  $\tau_1 > 0$  为系统状态时滞常数,  $\tau_2 > 0$  为系统受控输入时滞常数, 且  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  中至少有一个参数未知,  $\phi$  为系统初始状态函数。这里假设  $\tau_1$  未知, 但有已知上界  $\tau_1^*$  和已知下界  $\tau_{1*}$ , 及较为接近  $\tau_1$  的值  $\bar{\tau}_1$  (一般  $\bar{\tau}_1$  取为  $\tau_1^*$  和  $\tau_{1*}$  的中间值), 并能找到正常数  $\bar{\tau}_1 > 0$ ,  $\bar{\tau}_2 > 0$  使得  $0 < \tau_1^* - \bar{\tau}_1 \leq \bar{\tau}_1$ ,  $0 < \bar{\tau}_1 - \tau_{1*} \leq \bar{\tau}_2$  成立。

针对系统(5.3)研究的目的是: 如何设计一个带记忆的时滞相关型状态反馈控制

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - a_1 \hat{\tau}_1 - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2) \quad (5.4)$$

其中  $\hat{\tau}_1(t)$  为  $\tau_1$  的估计值, 假设  $\dot{\hat{\tau}}_1(t) = -[2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]m$ , 其中  $m \geq 0$  为一非负常数即  $\hat{\tau}_1(t)$  变化的方向与  $[2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]$  的符号相反, 使得系统(5.3)是内部稳定的, 并定出未知参数  $\tau_1$  的自适应律, 此外比①进一步的要求是: 在系统达到稳定的控制过程中, 带记忆状态反馈控制(2)始终能够反映  $\tau_1$ , 特别是在  $\hat{\tau}_1(t)$  稳定后系统状态稳定前, 使得带记忆项  $K_2 x(t - a_1 \hat{\tau}_1 - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2)$  中的  $a_1 \hat{\tau}_1 + (\hat{\tau}_1 - h_1)^2 \rightarrow \bar{\tau}_1$ , 即对于未知时滞  $\tau_1$  一直能实现带记忆控制。

### 5.3 主要结果

#### 5.3.1 一类线性单时滞系统的新型自适应控制——自适应控制的第二步改进（突破原有的参数限制）

对于系统(5.1), 根据(5.1)和(5.2)可得闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + BK_1x(t) + BK_2x(t - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (5.5)$$

其中  $\bar{\tau} = \max(\tau_1^*, \bar{\tau}_1^2)$ , 用[28]中“descriptor form”的方法, 令

$$\begin{cases} y(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + BK_1x(t) + BK_2x(t - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2) \\ 0 = -y(t) + (A + A_1 + BK)x(t) - A_1 \int_{-\tau_1}^t y(s)ds - BK_2 \int_{-(\hat{\tau}_1 - h_1)^2}^t y(s)ds \end{cases} \quad (5.6)$$

其中  $K = K_1 + K_2$ , 对于系统(5.6), 取 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_i) = V_i(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_i}^0 \int_{s+\theta} y(s)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(s) ds d\theta + \frac{1}{2} (\hat{\tau}_i - h_i)^2 \quad (5.7)$$

其中  $V_i(t) = x^T P x$ ,  $P, Q_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\tau_2 = (\hat{\tau}_1 - h_1)^2$ ,  $h_1$  为  $\tau_1$  的较接近的估计值。  $V_i(t)$  沿系统(5.6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= 2x^T P y = 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}x - y \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 y(s) ds \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中  $\bar{A} = A + A_1 + BK$ ,  $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_2 = BK_2$ , 令  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $P_1, P_2$  只

需满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$  就可使  $\dot{V}_i(x_i, w_i)$  与引入"descriptor form"前相同。考虑到

$$\begin{aligned} &\frac{d \left( \int_{\tau_i}^0 \int_{s+\theta} y(s)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(s) ds d\theta \right)}{dt} \\ &= 2(\hat{\tau}_i(t) - h_i) \hat{\tau}_i(t) \int_{-(\hat{\tau}_i(t) - h_i)^2}^0 y(s)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(s) ds + \\ &\quad \int_{\tau_i}^0 [y(t)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(t) - y(t+\theta)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(t+\theta)] d\theta \end{aligned}$$

由于  $\hat{\tau}_i(t)$  变化的方向与  $(\hat{\tau}_i(t) - h_i)$  的符号相反, 因此  $V(x_i, w_i)$  沿系统(5.6)的导数为

$$\dot{V}(x_i) \leq \dot{V}_i(t) + \sum_{i=1}^2 \int_{\tau_i}^0 [y(t)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(t) - y(t+\theta)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(t+\theta)] d\theta + (\hat{\tau}_i - h_i) \dot{\hat{\tau}}_i$$

代入(5.7)得

$$\dot{V}(x_i) \leq [x^T \quad y^T] \Xi_0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^2 \eta_i - \sum_{i=1}^2 \int_{-\tau_i}^0 y(\theta)^T [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(\theta) d\theta + (\hat{\tau}_i - h_i) \dot{\hat{\tau}}_i \quad (5.9)$$

其中

$$\eta_i(t) = -2 \int_{-\tau_i}^0 [x^T \quad y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(s) ds,$$

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1 & P - P_1 + \bar{A}^T P_2^T \\ P - P_1^T + P_2 \bar{A} & \sum_{i=1}^2 \tau_i [0 \quad \bar{A}_i^T] Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} - P_2 - P_2^T \end{bmatrix}$$

由引理 2.1 可得

$$\eta_i \leq \tau_i \left[ \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \bar{P} R_i \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_{-\tau_i}^0 y^T(s) \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_i^T \end{bmatrix} R_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} y(s) ds \right] \quad (5.10)$$

其中  $R_i$ ,  $i=1,2$ , 为任一正定矩阵, 取正定矩阵  $R_i = Q_i$ ,  $i=1,2$ , 由于  $Q_i$ ,  $i=1,2$  的维数为  $2n$ , 因此(5.10)代入(5.9)得

$$\dot{V}(x_i) \leq \tilde{x}^T(t) \Xi \tilde{x}(t) + (\hat{\tau}_1 - h_1)^2 \left[ \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \bar{P} Q_i \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (\hat{\tau}_1 - h_1) \hat{t}_1 \right] \quad (5.11)$$

其中

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned} \Xi &= \Xi_0 + \tau_1 \bar{P} Q_1 \bar{P}^T \\ &= \bar{A}^T \bar{P}^T + \bar{P} \bar{A} + \tau_1 \bar{P} Q_1 \bar{P}^T + \sum_{i=1}^2 \tau_i \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_i^T \end{bmatrix} Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} [0 \quad I], \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A} & -I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据以上推导我们可得:

**定理 5.1** 对于线性时滞系统(5.1), 如存在正定矩阵  $X$ 、 $Q_i$ ,  $i=1,2$ , 矩阵  $U_j$ ,  $j=1,2$ , 及正常数  $n_1$ 、 $n_2$  使得矩阵不等式(5.14)成立, 可取形如(5.2)的带记忆的状态反馈控制器, 且对  $\tau_1$  的自适应律可取为式(5.12), 且  $\tau_1$  的估计值  $\hat{\tau}_1(t)$  满足  $\tau_1 \leq \hat{\tau}_1(t) \leq \tau_1^*$ ,  $\forall t \geq 0$ . 反馈增益矩阵及各未知矩阵可这样算得:  $P = X^{-1} = n_2/n_1 P_1 = n_2 P_2$ ,  $K_1 = U_1 X^{-1}$ ,  $K_2 = U_2 X^{-1}$ . 这时闭环系统(5.1)是渐近稳定的。

**证明** 根据以上推导我们可以看出, 若取自适应律

$$\hat{\tau}_1 = -(\hat{\tau}_1 - h_1) \left[ \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \bar{P} Q_1 \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] \quad (5.12)$$

当  $S \triangleq \Xi < 0$  时系统是可镇定的。显然  $\forall \tau_1$ ,  $\tau_1 \leq \tau_1^*$  有  $S(\tau_1) \leq S(\tau_1^*)$ ; 同时一定能找到正常数  $\bar{\tau}_1 > 0$  使得  $0 < \tau_1^* - h_1 \leq \bar{\tau}_1$  成立。因此  $S(\tau_1^*) < S(\tau_1^* - h_1 = \bar{\tau}_1) < 0$  即能保证。令  $\Xi = S(\tau_1^* - h_1 = \bar{\tau}_1)$ , 则下面的(5.13)式  $\Xi < 0$  成立时有  $\dot{V}(t) = \dot{V}(x_i, 0) < 0$ , 这时时滞系统(5.1)是渐近稳定的。

$$\Xi = \bar{A}^T \bar{P}^T + \bar{P} \bar{A} + \tau_1^* \bar{P} Q_1 \bar{P}^T + \sum_{i=1}^2 \tau_i^* \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{A}_i^T \end{bmatrix} Q_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} [0 \quad I] < 0 \quad (5.13)$$

其中  $\tau_2^* = \bar{\tau}_1^2$ ,  $\bar{\tau}_1 > 0$  为使得  $0 < \tau_1^* - h_1 \leq \bar{\tau}_1$  成立的正常数。对(5.13)式左边同乘以矩阵

$$\bar{X} = \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1}, \text{ 右边乘以 } \bar{X}^T, \quad X = P^{-1}, \text{ 由于(5.8)中只要求矩阵 } P_1, P_2 \text{ 只需满足}$$

$E\bar{P}^T = \bar{P}E$  就可，又考虑到要兼顾保守性和运算简便，可借鉴[32]中的方法令

$$P_1 = n_1/n_2 \bullet P, P_2 = 1/n_2 \bullet P, X_1 = P_1^{-1}, X_2 = P_2^{-1}, \text{ 可得 } \bar{X} = P^{-1} = \begin{bmatrix} X & -n_1 X \\ 0 & n_2 X \end{bmatrix}, \text{ 再由 Schur}$$

补引理可得  $\exists < 0$  等价于

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_3 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_1^T & -(\tau_1^*)^{-1} Q_1 & 0 \\ \Sigma_2^T & 0 & -(\tau_1^2)^{-1} Q_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.14)$$

$$\text{其中 } \Sigma_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -n_1 A_1 X & n_2 A_1 X \end{bmatrix}, \Sigma_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -n_1 B_1 U_2 & n_2 B_1 U_2 \end{bmatrix}, U_i = K_i X, i=1,2,$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_4 + \Sigma_4^T + \tau_1^* Q_1, \text{ 其中的 } \Sigma_4 = \begin{bmatrix} -n_1 X & n_2 X \\ (A + A_1)X + \sum_{i=1}^2 B_i U_i + n_1 X & -n_2 X \end{bmatrix}。 \text{ 可见如存在正定矩}$$

阵  $X, Q_i, i=1,2,3$ , 矩阵  $U_j, j=1,2$ , 及正常数  $n_1, n_2$  满足矩阵不等式(5.14), 则可取

形如(5.2)的带记忆的状态反馈控制器, 且对  $\tau_1$  的自适应律可取为式(5.12),  $\tau_1$  的估计值

$\hat{\tau}_1(t)$  满足  $\tau_{1*} \leq \hat{\tau}_1(t) \leq \tau_1^*, \forall t \geq 0$ , 则线性时滞系统(5.1)是渐近稳定的。反馈增益矩阵及各未知矩阵可这样算得:  $P = X^{-1} = n_2/n_1 P_1 = n_2 P_2, K_1 = U_1 X^{-1}, K_2 = U_2 X^{-1}$ 。证毕

**注 5.1** 由于状态可测, 因此由(5.6)可知  $y$  也可测, 因此自适应律(5.12)是可以实现的。此外在求解矩阵不等式(5.14)时, 为简单起见, 仍用上一章中的方法令  $n_1 = 1$ , 而用搜索法求解  $n_2$ , 这里不再赘述。

**注 5.2** 和上一章的结论相比, 本文对未知时滞参数的自适应律在形式上虽然包含上章中的关于状态  $x$  的负的二次型, 还包括了一时变量  $(\hat{\tau}_1(t) - h_1)$ , 即某一时刻  $\hat{\tau}_1$  的变化律与该

时刻  $\hat{\tau}_1$  与真实值  $\tau_1$  的接近值  $h_1$  之间的差值有关, 在这样的自适应律下, 初值  $\hat{\tau}_1(0)$  也不用象上一章及[106]中那样假设  $\hat{\tau}_1(t) \geq \tau_1$ , 可以有如下好处: 不需要像以前那样为保证

$\hat{\tau}_1(t) \geq \tau_1$  一直成立, 估计一个很难计算的“调整常数”  $\gamma$  (在[79,106]中均未能提供具体的估计步骤); 此外由(5.12)可知对于这样的自适应律  $\hat{\tau}_1(t)$  与  $\tau_1$  的接近值  $h_1$  之间的差值会

越来越小, 因此只要  $\hat{\tau}_1(t)$  的初始值落在上下界  $\tau_1^*$  和  $\tau_{1*}$  之间, 即能使得  $\hat{\tau}_1(t)$  始终处于  $\tau_1$  的上下界  $\tau_1^*$  和  $\tau_{1*}$  之间。显然在这样的自适应律下,  $\hat{\tau}_1(t)$  最终的值应趋于  $\tau_1$  的接近值  $h_1$ ,

比[79,106]及上一章的方案要简化的多。

### 5.3.2 一种输入时滞的线性时滞系统的新型自适应控制——自适应控制的第三步改进 (实现“带记忆”的新型自适应控制)

对于系统(5.3), 根据(5.3)和(5.4), 及引理2.5中的(2.22)可得闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau_1) + BK_1x(t-\tau_2) + BK_2x(t-\tau_2 - a_1\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)^2) \\ x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (5.15)$$

其中  $\bar{\tau} = \max(\tau_1^*, \bar{\tau}_1^2 + 2\tau_1^*(\sqrt{h_1 + \bar{h}_1^2} - \bar{h}_1) + \tau_2)$ , 用[28]中“descriptor form”的方法并令

$$\begin{aligned} y &= Ax(t) + A_1x(t-\tau_1), \quad z = BK_1x(t-\tau_2) + BK_2x(t-\tau_2 - a_1\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)^2), \text{ 即} \\ y+z &= (A + A_1 + BK)x(t) - A_1 \int_{-\tau_1}^0 (y(s) + z(s))ds - BK_1 \int_{-\tau_2}^0 (y(\xi) + z(\xi))d\xi - BK_2 \int_{-\tau_2}^0 (y(s) + z(s))ds \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中  $K = K_1 + K_2$ ,  $\tau_3 = \tau_2 + a_1\hat{\tau}_1(t-\tau_2) + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)^2$ , 对于系统(5.16), 取 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_i) = V_1(t) + V_2(t) + \frac{l}{2}[2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1) + a_1]^2 \quad (5.17)$$

其中  $V_1(t) = x^T Px$ ,  $V_2(t) = \sum_{i=1}^3 \int_{-\tau_i}^0 \int_{-\pi}^{\pi} (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds d\theta$ ,  $P$ ,  $Q_i > 0$ ,

$i=1,2,3$  为待定正定矩阵,  $l$  为正常数,  $V_i(t)$  沿系统(5.16)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i) &= 2x^T P(y+z) \\ &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - y - z \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s)) ds \right\} \\ &= 2[x^T \quad (y+z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - y - z \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^3 \eta_i \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中  $\bar{A} = A + A_1 + BK$ ,  $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_2 = BK_1$ ,  $\bar{A}_3 = BK_2$ , 令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 且  $P_1$ ,

$P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ 。对于  $\eta_i(t) = -2 \int_{-\tau_i}^t [x^T \quad (y+z)^T]^T \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{A}_i(y(s)+z(s))ds$  由引理 2.1 可得

$$\eta_i \leq \tau_i \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_i}^t (y(s)+z(s))^T \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i (y(s)+z(s)) ds \quad (5.19)$$

其中  $R_i, i=1,2,3$ , 为任一正定矩阵。而

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_3 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} \\ &= x^T P_1 R_3 P_1^T x + 2x^T P_1 R_3 P_2^T (y+z) + (y+z)^T P_2 R_3 P_2^T (y+z) \\ &= x^T P_1 R_3 P_1^T x + 2x^T P_1 R_3 P_2^T (y+z) + 2z^T P_2 R_3 P_2^T y + y^T P_2 R_3 P_2^T y + z^T P_2 R_3 P_2^T z \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\dot{\tau}_3 = \tau_2 + a_1 \hat{\tau}_1(t-\tau_2) + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)^2 = \frac{1}{4} \{ [2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1) + a_1]^2 - a_1^2 + 4h_1 a_1 \} + \tau_2 \quad (5.21)$$

考虑到

$$\begin{aligned} & \frac{d \left( \int_{-\tau_3}^0 \int_{s+\theta} \dot{x}(s)^T \bar{A}_3^T Q_3^{-1} \bar{A}_3 \dot{x}(s) ds d\theta \right)}{dt} = \\ & \dot{x}_3(t) \bullet \int_{-\tau_3}^0 \dot{x}(s)^T \bar{A}_3^T Q_3^{-1} \bar{A}_3 \dot{x}(s) ds + \int_{-\tau_3}^0 [\dot{x}(t)^T \bar{A}_3^T Q_3^{-1} \bar{A}_3 \dot{x}(t) - \dot{x}(t+\theta)^T \bar{A}_3^T Q_3^{-1} \bar{A}_3 \dot{x}(t+\theta)] d\theta \\ & \dot{x}_3(t) = \frac{d \left( \tau_2 + a_1 \hat{\tau}_1(t-\tau_2) + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)^2 \right)}{dt} \\ & = a_1 \hat{\tau}_1(t-\tau_2) + 2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1) \hat{\tau}_1(t-\tau_2) = \hat{\tau}_1(t-\tau_2) [a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)] \end{aligned}$$

而由于  $\hat{\tau}_1(t)$  变化的方向与  $[2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]$  的符号相反, 也即  $\hat{\tau}_1(t-\tau_2)$  变化的方向与  $[a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)]$  的符号相反, 因此

$$\dot{V}_2(t) \leq \sum_{i=1}^3 [\tau_i(y(t)+z(t))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(t)+z(t)) - \int_{-\tau_i}^t (y(s)+z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s)+z(s)) ds] \quad (5.22)$$

取  $R_i = Q_i, i=1,\dots,3$ , 由(5.17)-(5.22)可得

$$\dot{V}(x_i) \leq \tilde{x}^T(t)^T \Xi_0 \tilde{x}^T(t) + [a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)] \{ l \dot{\hat{\tau}}_1(t-\tau_2) + \frac{1}{4} [a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)] z^T P_2 R_3 P_2^T z \} \quad (5.23)$$

其中  $\tilde{x}(t)^T = [x^T \quad y^T \quad z^T]^T$ ,  $\Xi_0 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix}$ ,

$$\Xi_{11} = P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i Q_i P_i^T, \quad \Xi_{12} = P - P_1 + \bar{A}^T P_2^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i Q_i P_i^T = \Xi_{13},$$

$$\Xi_{23} = \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i Q_i P_i^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i = \Xi_{22},$$

$$\Xi_{33} = \sum_{i=1}^3 \tau_i P_i Q_i P_i^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + [\frac{1}{4}(4h_i a_i - a_i^2) + \tau_2] P_2 R_3 P_2^T.$$

由上述推导可得如下结论:

**定理 5.2** 对于含未知状态时滞参数  $\tau_i$  的输入时滞线性时滞系统(5.3), 如存在正定矩阵  $X$ ,  $Q_i$ ,  $i=1,2,3$ , 矩阵  $U_j$ ,  $j=1,2$ , 使得矩阵不等式(5.25)成立, 可取形如(5.4)的带记忆的状态反馈控制器(其中的参数  $a_1$ ,  $h_1$  按引理 2.5 的式(2.22)取值), 且对  $\tau_i$  的自适应律可取为式(5.24)。反馈增益矩阵为:  $K_1 = U_1 X^{-1}$ ,  $K_2 = U_2 X^{-1}$ 。这时整个闭环系统(5.3)的解是渐近稳定的。并且当  $\hat{\tau}_1(t)$  趋于稳定时, 带记忆状态反馈控制(5.4)中以  $K_2$  为系数的带记忆项的时滞常数与  $\tau_1$  的差值在有限范围内。

**证明** 根据以上推导我们可以看出, 若  $\Xi_0 < 0$  成立且对  $\tau_1$  的自适应律取为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\tau}}_1(t - \tau_2) &= -\frac{1}{4l}[a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)]z^T P_2 R_3 P_2^T z \text{ 即} \\ \dot{\hat{\tau}}_1(t) &= -\frac{1}{4l}[a_1 + 2(\hat{\tau}_1(t) - h_1)]z(t + \tau_2)^T P_2 Q_3 P_2^T z(t + \tau_2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

且当  $S \triangleq \Xi_0 < 0$  时系统是渐近稳定的。显然  $\forall \tau_1, \tau_1 \leq \tau_1^*$  有  $S(\tau_1) \leq S(\tau_1^*)$ ; 同时对  $\hat{\tau}_1 - h_1$  代入  $\tau_1^* - h_1 = \tau_1^* - \sqrt{h_1 + h_1^2} < \tau_1^* - \bar{h}_1 \leq \bar{\tau}_1$  记为  $S'(\tau_1^*)$ , 因此  $S'(\tau_1^*) < 0$  即能保证  $S < 0$  成立。令  $\Xi = S'(\tau_1^*)$ , 则  $\Xi < 0$  成立时有  $\dot{V}(x_t) < 0$ , 这时时滞系统(5.3)是渐近稳定的。对  $\Xi < 0$  两边同乘以矩阵  $diag(X_1 \quad X_2 \quad X_3)$ , 其中  $X_1 = P_1^{-1}$ ,  $X_2 = X_3 = P_2^{-1}$ 。由于(5.18)中只要求  $P_1$ ,  $P_2$  满足  $E \bar{P}^T = \bar{P} E$  即可, 考虑到计算简便和不影响保守性, 可令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ , 把引理 2.5 中的  $h_1 = \sqrt{h_1 + h_1^2}$ ,  $a_1 = 2(\sqrt{h_1 + h_1^2} - \bar{h}_1)$  代入并由引理 2.4 可得  $\Xi < 0$  等价于如下不等式:

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \bar{\Xi}_1 & \bar{\Xi}_2 & \bar{\Xi}_3 \\ \bar{\Xi}_1^T & M_1 & & \\ \bar{\Xi}_2^T & & M_2 & \\ \bar{\Xi}_3^T & & & M_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.25)$$

其中  $\bar{\Xi}_1^T = [0 \ n_2 A_1 X \ n_2 A_1 X]$ ,  $\bar{\Xi}_2^T = [0 \ n_2 B_2 U_1 \ n_2 B_2 U_1 \ 0]$ ,  $X = P^{-1}$ ,

$$\bar{\Xi}_3^T = [0 \ n_2 B_2 U_2 \ n_2 B_2 U_2 \ 0 \ 0], \ M_i = -(\tau_i^*)^{-1} Q_i, \ i = 1, 2, 3, \ \tau_2^* = \tau_2,$$

$$U_j = K_j X, \ j = 1, 2, \ \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & \bar{\Xi}_{13} \\ * & \bar{\Xi}_{22} & \bar{\Xi}_{23} \\ * & * & \bar{\Xi}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Xi}_{11} = n_2 / n_1 (A + A_1) X + n_2 / n_1 \sum_{i=1}^2 B_2 U_i + n_2 / n_1 X (A + A_1)^T + n_2 / n_1 \sum_{i=1}^2 (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i^* Q_i,$$

$$\bar{\Xi}_{12} = n_2 / n_1 (n_2 - n_1) X + n_2 / n_1 X (A + A_1)^T + n_2 / n_1 \sum_{i=1}^2 (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^3 \tau_i^* Q_i = \bar{\Xi}_{13},$$

$$\bar{\Xi}_{23} = \sum_{i=1}^3 \tau_i^* Q_i - 2n_2 X = \bar{\Xi}_{22}, \ \bar{\Xi}_{33} = \sum_{i=1}^2 \tau_i^* Q_i - 2n_2 X + (\bar{h}_1 + \tau_2) Q_3.$$

用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱可算得矩阵  $U_i$ , 正定矩阵  $X$ ,  $Q_3$ , 即可算得  $K_1 = U_1 X^{-1}$ ,

$K_2 = U_2 X^{-1}$ . 由于  $a_1$ ,  $h_1$  按引理 2.5 取值, 由引理 2.5 可知, 当  $\hat{\tau}_1(t)$  趋于稳定时, 带记忆状态反馈控制 (5.4) 中以  $K_2$  为系数的带记忆项的时滞常数

$$\tilde{\tau} \triangleq a_1 \hat{\tau}_1(\infty) + (\hat{\tau}_1(\infty) - h_1)^2 \rightarrow \bar{h}_1,$$

$$\text{即 } 0 \leq |\tilde{\tau} - \tau_1| = |\bar{h}_1 - \tau_1| \leq \max(|\bar{h}_1 - \tau_1|, |\bar{h}_1 - \tau_{1*}|) = \max(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2).$$

证毕

**注 5.3** 由于  $\tau_3 = \tau_2 + a_1 \hat{\tau}_1(t - \tau_2) + (\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)^2$ , 因此

$$\frac{d\tau_3(\hat{\tau}_1(t - \tau_2))}{d(\hat{\tau}_1(t - \tau_2))} = 2\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - 2h_1 + a_1 = 0, \text{ 因此 } \hat{\tau}_1(t - \tau_2) = \frac{2h_1 - a_1}{2} \text{ 时 } \tau_3 \text{ 取得极值点, 而}$$

$$\tau_3''(\frac{2h_1 - a_1}{2}) = 2 > 0, \text{ 因此 } \hat{\tau}_1(t - \tau_2) = \frac{2h_1 - a_1}{2} = \bar{h}_1 \text{ 是 } \tau_3 \text{ 的最小值点, 因此}$$

$\tau_3^* = \max\{\tau_3 \left( \hat{\tau}_1(t - \tau_2) = \{\tau_1^*, \tau_{1*}\} \right)\}$ . 如果  $\bar{h}_1$  选取的是  $\tau_1^*$  和  $\tau_{1*}$  的中间值, 由函数的对称性可知

$$\tau_3^* = \tau_3 \left( \hat{\tau}_1(t - \tau_2) = \tau_1^* \right) = \tau_3 \left( \hat{\tau}_1(t - \tau_2) = \tau_{1*} \right).$$

**注 5.4** 由(5.16)可见,  $\dot{x}$  被分成  $x(t - \tau_2)$  之后的项  $y$  及  $x(t - \tau_2)$  之前的项  $z$  两部分, 因此(5.24)

中的  $z(t + \tau_2)$  并不违反系统的因果性, (5.24) 是可以实现的, 即把上一小节中单时滞的结论进行了输入时滞下的拓展。

**注 5.5** 和上一小节同理, 在自适应律(5.24)的作用下,  $\hat{\tau}_1(t)$  与  $\frac{2\bar{h}_1 - a_1}{2} = \bar{h}_1$  的差值会越来越小, 因此只要  $\hat{\tau}_1(t)$  的初始值落在上下界  $\tau_1^*$  和  $\tau_1$  之间, 即能使得  $\hat{\tau}_1(t)$  始终处于其上下界  $\tau_1^*$  和  $\tau_1$  之间。显然在这样的自适应律下,  $\hat{\tau}_1(t)$  最终的值应趋于  $\tau_1$  的接近值  $\bar{h}_1$ , 不需要 [79,106] 及上一章的方案那样一定要  $\hat{\tau}(t) \geq \tau$  始终成立, 而且为了保证这个假设成立还要估计一个很难计算的“调整常数” $\gamma$  (仿真的时候往往还要进一步调整)。更重要的是在实际应用中,  $\hat{\tau}_1(t)$  往往比系统状态变化得快。由定理 5.2 可知尽管  $\tau_1$  未知, 我们还是能得到包含反映与  $\tau_1$  之差在有限范围内的关于  $\bar{h}_1$  的记忆项。而在上一小节中, 实现自适应律的带记忆状态反馈控制形式为  $u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - (\hat{\tau}_1 - \bar{h}_1)^2)$ , 这样在上一小节中自适应律  $\dot{\hat{\tau}}_1(t) = -(\hat{\tau}_1(t) - \bar{h}_1)m$  的作用下  $\hat{\tau}_1(t) \rightarrow \bar{h}_1$ , 如果  $\hat{\tau}_1(t)$  在系统趋于稳定即  $x \rightarrow 0$  之前就达到  $\bar{h}_1$ , 那么其状态反馈  $x(t - (\hat{\tau}_1 - \bar{h}_1)^2) \rightarrow x(t)$  即变成了无记忆项, 这在时滞常数  $\tau_1$  对系统影响较大时显然会影响系统的稳定性; 其实, 即使  $\hat{\tau}_1(t)$  在  $x \rightarrow 0$  之后才达到  $\bar{h}_1$ ,  $K_2 x(t - (\hat{\tau}_1 - \bar{h}_1)^2)$  中的  $(\hat{\tau}_1 - \bar{h}_1)^2$  反映的也只是估计值  $\hat{\tau}_1(t)$  与  $\tau_1$  的接近值  $\bar{h}_1$  之差, 而没有真正反映  $\hat{\tau}_1(t)$ , 这不是带记忆控制, 在  $\tau_1$  对系统影响较大的情况下将无能为力。显然本小节在这方面的改进就体现在状态反馈控制(5.4)中符合引理 2.6 的参数选取上, 实现了带记忆的新型自适应控制。

**注 5.6** 这里的  $l$  是为了防止  $\hat{\tau}_1(t)$ , 变化过快(慢)而添加的调整常数, 因为如果被估参数变化过快, 系统状态还未达到平衡, 而在状态达到稳定的这较长的响应时间里, 实际的工程应用中有可能会出现一些不确定因素(如干扰的出现, 系统参数发生了变化等), 这对系统的镇定是不利的。另一方面, 如果被估参数变化过慢, 那么反馈到状态反馈矩阵中的有关量在很长时间内变化极小, 这同样会影响到系统的镇定。值得注意的是:  $l$  是在仿真过程中根据仿真结果进行调整的(一般以 10 为数量级), 以使系统状态、被估参数都能响应较快, 这与[79,106]及上一章的方案事先估计很难计算的“调整常数” $\gamma$  还要在仿真过程中进一步调整是不同的。

对于该类系统时滞参数的其他情况还有以下结论:

**推论 5.1** 对于输入时滞参数  $\tau_2$  未知但状态时滞  $\tau_1$  已知的线性时滞系统(5.3), 而状态反馈控制由(5.4)变为

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - \tau_1 - a_2 \hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_2 - h_2)^2) \quad (5.26)$$

$\tau_3$  变为  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 + a_2 \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) + (\hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - h_2)^2$ 。结论陈述与定理 5.2 相同, 只是自适应律(5.24)及引理 2.6 中的  $\hat{\tau}_i, \tau_i^*, \tau_{i*}, h_i, \bar{h}_i, a_i$  的下标均由 1 改为 2, 要求的 LMI 形式与(5.25)相同, 其中的  $\tau_1^* = \tau_1$ ,  $\tau_3^* = \max\{\tau_3 \left| \begin{array}{l} \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) = \{\tau_2^*, \tau_{2*}\} \end{array} \right. \}$ , 此外  $z$  变为

$$z = BK_1 x(t - \tau_2) + BK_2 x(t - \tau_1 - \tau_2 - a_2 \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - (\hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - h_2)^2) \quad (5.27)$$

**推论 5.2** 对于输入时滞参数  $\tau_2$ 、状态时滞参数  $\tau_1$  均未知的线性时滞系统(5.3), 则相应的状态反馈控制变为

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - a_1 \hat{\tau}_1 - (\hat{\tau}_1 - h_1)^2) + K_3 x(t - a_2 \hat{\tau}_2 - (\hat{\tau}_2 - h_2)^2) \quad (5.28)$$

这样不仅有  $\tau_3 = \tau_2 + a_2 \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) + (\hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - h_2)^2$ , 还有  $\tau_4 = \tau_2 + a_2 \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) + (\hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - h_2)^2$ , 相应的不仅有  $\bar{A}_3 = BK_2$ , 而且有  $\bar{A}_4 = BK_3$ , 结论陈述与定理 5.2 相同, 自适应律(5.24)及引理 2.6 中的  $\hat{\tau}_i, \tau_i^*, \tau_{i*}, h_i, \bar{h}_i, a_i$  的下标对 1,2 均有和推导定理 5.2 过程中的同样形式, 此外  $z$  变为

$$\begin{aligned} z = & BK_1 x(t - \tau_2) + BK_2 x(t - \tau_2 - a_1 \hat{\tau}_1 (t - \tau_2) - (\hat{\tau}_1 (t - \tau_2) - h_1)^2) \\ & + BK_3 x(t - \tau_2 - a_2 \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - (\hat{\tau}_2 (t - \tau_2) - h_2)^2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

要求的 LMI 形式与(5.25)相同, 相应的矩阵  $Q_i, U_i$  的数目会分别增加一个, LMI 维数会相应增加 1, 对应的  $\Xi_4^T = [0 \ n_2 B_2 U_3 \ n_2 B_2 U_3 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $M_4 = -(\tau_4^*)^{-1} Q_4$ , 其中的

$$\tau_3^* = \max\{\tau_3 \left| \begin{array}{l} \hat{\tau}_1 (t - \tau_2) = \{\tau_1^*, \tau_{1*}\} \end{array} \right. \}, \quad \tau_4^* = \max\{\tau_4 \left| \begin{array}{l} \hat{\tau}_2 (t - \tau_2) = \{\tau_2^*, \tau_{2*}\} \end{array} \right. \}.$$

## 5.4 仿真示例

**例 1** 考虑如下与(5.1)相符的时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t - \tau_1) + Bu(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{cases} \quad (5.30)$$

其中  $\tau_1$  未知,  $A = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tau_1^* = 0.2$ ,  $\tau_{1*} = 0.1$ ,  $\bar{\tau}_1 = 0.05$ , 取  $\tau_1$  的接近值为

$h = 0.15$ , 把这些数据代入 LMI(5.14), 令  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0.1$  按小间隔变化(0.01)直到其有可行解为:  $X = \begin{bmatrix} 3.4344 & -2.2122 \\ -2.2122 & 1.7221 \end{bmatrix}$ ,  $K_1 = [1.3319 \quad -4.3955]$ ,

$K_2 = 1.0e-10 \times [-0.6045 \quad -0.3781]$ , 此时  $n_2 = 0.29$ , 自适应律矩阵

$$\bar{P}Q_2\bar{P}^T = \begin{bmatrix} 0.4935 & 0.7162 & 0.0691 & 0.1003 \\ 0.7162 & 1.0478 & 0.1003 & 0.1467 \\ 0.0691 & 0.1003 & 0.0193 & 0.0281 \\ 0.1003 & 0.1467 & 0.0281 & 0.0411 \end{bmatrix}, \text{再取 } \tau_1 = \tau_1^* = 0.2, \hat{\tau}_1(0) = \tau_{1*} = 0.1, \text{初始}$$

函数为  $\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin(4\pi - \bar{\tau}) / \bar{\tau} \\ -3 \sin(4\pi - \bar{\tau}) / \bar{\tau} \end{bmatrix}$ , 则仿真结果如图 5.1.

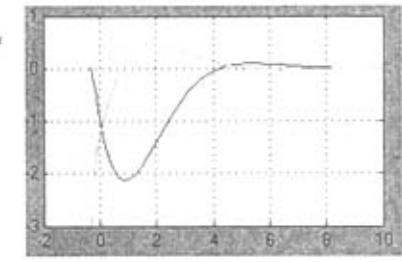


图 5.1(a) 系统状态轨线

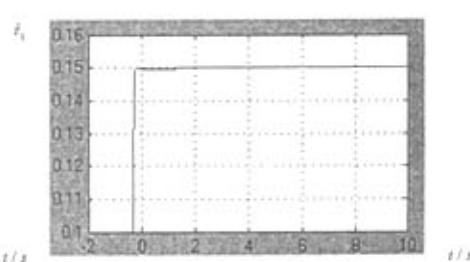


图 5.1 (b) 时滞实时估计值曲线

Fig.5.1 (a) state vector of the system Fig.5.1(b) estimate value for the unknown delay parameter  
例 2 考虑与(5.3)相符的时滞系统, 其中  $\tau_2 = 0.008$ ,  $\tau_1$  未知,  $A = \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,

$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tau_1^* = 0.3 = \tau_1$ ,  $\tau_{1*} = 0.2$ ,  $\bar{\tau}_1 = 0.05 = \bar{\tau}_2$ , 即取  $\tau_1$  的接近值为  $\bar{h}_1 = 0.25$ . 如果用[79,106]

中的结论, 不能得到一个镇定系统的控制器; 如果用上一章中的结论, 虽然可以得到镇定系统的控制器, 但必须保证  $\hat{\tau}_1(t) \geq \tau_1$  一直成立, 而且必须为此估算一个很难计算的“调整常数”  $\gamma$  还要在仿真过程中不断调整, 实用性差; 如果用 5.3.1 中的结论, 虽然不用对  $\hat{\tau}_1(t)$  进行限制, 也不用估算  $\gamma$  可使  $\hat{\tau}_1(\infty) \rightarrow \bar{h}_1$ , 但是系统却不能保证镇定。而根据引理 2.5 取  $h_1 = \sqrt{\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2} = 0.559$ ,  $a_1 = 2(\sqrt{\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2} - \bar{h}_1) = 0.618$ . 把这些数据代入 LMI(5.25), 令

$n_1=1$ ,  $n_2=0.1$  按小间隔变化(0.01)直到 LMI(5.25)有可行解为:  $X = \begin{bmatrix} 0.5697 & -1.8851 \\ -1.8851 & 7.8804 \end{bmatrix}$ ,

$U_1 = [3.5384 \quad -14.4488]$ ,  $U_2 = 1.0e-005 * [0.0551 \quad -0.2228]$ , 即得

$K_1 = U_1 X^{-1} = [0.6916 \quad -1.6681]$ ,  $K_2 = U_2 X^{-1} = 1.0e-006 * [0.1482 \quad -0.2473]$ , 自适应控制

矩阵  $P_2 Q_3 P_2^T = \begin{bmatrix} 0.0040 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0003 \end{bmatrix}$ 。取初值  $\hat{\tau}_1(0)=0.2$ , 初始函数为

$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin(4\pi - \bar{\tau})/\bar{\tau} \\ -3\sin(4\pi - \bar{\tau})/\bar{\tau} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\tau} = \max(\tau_1^*, \bar{\tau}_1^2 + \tau_1^* a_1 + \tau_2) = 0.301$ , 仿真过程中经过调整得

到  $l=0.02$ , 所得系统状态  $x(t)$  和参数估计  $\hat{\tau}_1(t)$  分别见图 5.2(a)、(b)。

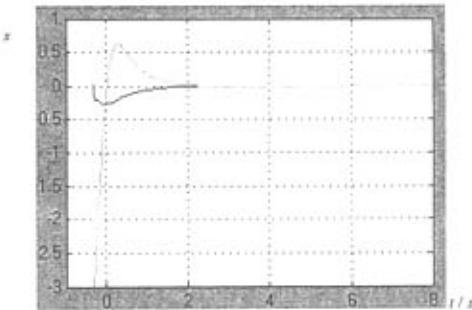


图 5.2(a) 系统状态

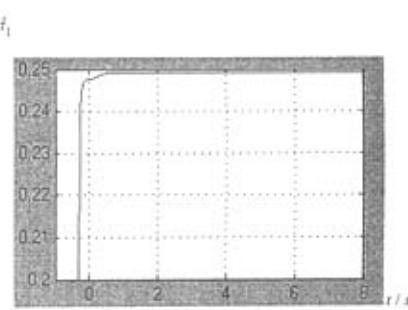


图 5.2(b) 未知时滞参数估计

Fig.5.2 (a) state vector of the system      Fig.5.2(b) estimate value for the unknown delay parameter  
可见, 5.3.2 的结论不仅能突破对未知时滞估计值  $\hat{\tau}_1(t)$  的限制, 也不用为此估算调整“调整常数” $\gamma$ , 更能在未知时滞  $\tau_1$  对系统影响较大的情况下实现“带记忆”的新型自适应控制, 保证系统状态的稳定性。

## 5.5 本章小结

本章在基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函的基础上首先通过一种新型的带记忆状态反馈控制, 使得推导得到的自适应律能使时值参数估计值的变化能与其当前值和时滞参数一接近值之差方向相反, 变化后的值与时滞参数一接近值之差能越来越小, 因此只要其初值落在上下界之间, 则其值在控制过程中会始终处于这个范围, 最后趋于时滞参数的一个接近值, 以往结论中对时滞参数估计值必须大于其真实值的限制、很难计算的“调整常数”也就不需要了。接着, 对于这一新型自适应控制方案的缺

点——实际上是一无记忆状态反馈控制，又作了进一步改进，通过引入两个事先可以确定的参数，使得状态反馈控制能始终反映未知时滞参数，在时滞参数对系统性能影响较大的情况下仍能充分发挥作用，本章是对以往的时滞参数自适应控制的重大突破，通过仿真示例可以看出，本章的控制器设计方案具有很好的优越性。

本章的部分结果已整理成文并发表于《南京理工大学学报》，还有部分结果已整理成文并将发表于《系统科学与数学》。

# 第六章 一类输入时滞的不确定多时滞非线性系统的 新型自适应 $H^\infty$ 控制

## 摘要

针对一类带未知输入时滞参数且含未知上界的不确定非线性环节的时滞系统，基于 LMI 方法，采用一种基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和新型的带记忆的状态反馈控制，使得时滞参数、未知上界向量这两种参数的自适应律均能反映其实时估计值与其实际接近值之间的差值，不仅突破以往自适应控制对估计值的大小限制和保证限制成立的“调整参数”计算的困难，而且把这种新型的自适应控制同时用在同一系统的参数、向量上。与以往的结论相比，本文研究的是更具有一般性的非线性系统的自适应  $H^\infty$  控制，结论的保守性更小、实用性更强，一仿真实例证明了该控制方案的有效性。

## 6.1 引言

对于时滞系统的对时滞参数的自适应控制问题，第四章分别对一类带不确定状态时滞参数的输入时滞系统，及一类带不确定输入时滞参数的非线性时滞系统给出了对未知时滞参数的自适应  $H^\infty$  控制器的设计方案，随后第五章又提出了突破以往自适应控制两大限制（需要对时滞参数估计值限制并要计算“调整参数”）的新型自适应控制方案并做了进一步改进，但是对于更复杂的时滞系统——既有输入时滞，又有状态时滞，还有上界与时滞状态成线性关系的非线性时滞环节，自适应控制还研究甚少。[80]研究了一类不确定多时滞非线性系统的自适应  $H^\infty$  控制，它仅是以非线性不确定项范数上界未知的基础上引入自适应控制的，且是非时滞相关型控制，需要事先确定的未知参数、矩阵太多而且没有具体求取步骤。

本章在前两章内容的基础上，研究一类较为复杂的非线性多时滞系统——带未知输入时滞、与各时滞相关的非线性环节的范数上界与各时滞状态的范数成线性关系，但线性系数未知，这些未知线性系数组成一个向量，要同时对这两种未知量——时滞参数和非线性未知上界向量进行新型自适应  $H^\infty$  控制，由于一个是时滞参数，另一个是未知上界（即使在系统仅含一个状态时滞再加上输入时滞的情况下也是一个未知向量），在同时制定它们的自适应律时要兼顾它们之间的协调性，而且由于输入时滞的出现，如果还

要满足  $H^\infty$  特性要求，难度将大大增加。除了通过状态反馈控制来实现对时滞参数的新型自适应  $H^\infty$  控制，对非线性环节不确定上界向量的新型自适应  $H^\infty$  控制则是通过适当的控制矩阵增益来实现，不确定上界向量也和未知时滞参数那样只需要知道上下界值就能同时实现新型自适应  $H^\infty$  控制，与以往的结论相比，本文研究的是更具一般性的非线性系统的自适应  $H^\infty$  控制器设计问题。最后给出仿真示例以说明本章所给出的设计方案的有效性。

## 6.2 问题的提出——类复杂的非线性时滞系统

考虑如下多时滞非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t-\tau_i) + \sum_{j=0}^{l+1} G_j(x(t-\tau_j), t) + B_2 u(t-\tau_{l+1}) + B_1 w(t) \\ \tilde{z}(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max_{i=1, \dots, l} \{\tau_i\} + \tau_{l+1} \\ u(t) = 0, \quad t \leq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

式中  $x(t) \in R^n$  是状态向量， $w(t) \in R^n$  为干扰输入向量， $u(t) \in R^{n_2}$  为控制输入向量， $\tilde{z}(t) \in R^n$  为系统受控向量， $A$ 、 $A_i$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C$ 、 $D$  为具有相应适当维数的矩阵， $\tau_i \geq 0$ ， $i = 1, \dots, l$  为系统状态时滞常数， $\tau_{l+1}$  为系统未知的输入时滞常数，但有已知上界最大值记为  $\tau_{l+1}^*$ ，已知最小值记为  $\tau_{l+1}^*$ ，及较为接近  $\tau_{l+1}$  的值  $h_{l+1}$ （一般  $h_{l+1}$  取为  $\tau_{l+1}^*$  和  $\tau_{l+1}^*$  的中间值），并能找到正常数  $\bar{\tau}_{l+1} > 0$  使得  $0 < \tau_{l+1}^* - h_{l+1} \leq \bar{\tau}_{l+1}$  成立。 $G_j(x(t-\tau_j), t)$  为  $n$  维非线性向量函数， $\phi$  为系统初始状态函数。

**假设 6.1**  $(A, B_2)$  能控

**假设 6.2** 存在已知的连续有界的向量函数  $\delta_j(x(t-\tau_j), t) \in R^{n_2}$ ，使得非线性项可表示为

$$G_j(x(t-\tau_j), t) = B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t) \quad (6.2)$$

上界为

$$\|\delta_j(x(t-\tau_j), t)\| \leq \bar{\alpha}_j \|x(t-\tau_j)\|$$

可得

$$\|B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t)\| \leq \bar{\alpha}_j \sqrt{\lambda_{\max}(B_2^T B_2)} \|x(t-\tau_j)\| \quad (6.3)$$

该假设的(6.3)式隐含着  $\delta_j(0, t) = 0$ ， $j = 0, \dots, l+1$ ， $\forall t$ ，即  $x(t) = 0$  为自治系统 ( $u(t) = 0$ )

的一个平衡点。令  $\alpha_j = \bar{\alpha}_j \sqrt{\lambda_{\max}(B_2^T B_2)}$ , 其中  $\bar{\alpha}_j \geq 0$  ( $j = 0, \dots, l+1$ ) 为未知的正常数。令  $\mathcal{G} = [\mathcal{G}_0 \ \dots \ \mathcal{G}_{l+1}]^T$ ,  $\mathcal{G}_j = \alpha_j$ ,  $j = 0, \dots, l+1$ , 这样在得到  $\alpha_j$  后即得  $\bar{\alpha}_j = \alpha_j / \sqrt{\lambda_{\max}(B_2^T B_2)}$ 。记  $\hat{\mathcal{G}}$  为  $\mathcal{G}$  的估计值, 每个分量估计值有已知上界最大值为  $\alpha_j^* = \mathcal{G}_j^*$ , 最小值为  $\alpha_{j*} = \mathcal{G}_{j*}$ ,  $j = 0, \dots, l+1$ , 分别构成的向量为  $\mathcal{G}^*$  及  $\mathcal{G}_*$  (后面均写成  $\mathcal{G}^* \geq \hat{\mathcal{G}}(t) \geq \mathcal{G}_*$ ), 估计误差为  $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} - \hat{\mathcal{G}}$ , 选择  $\mathcal{G}^*$  及  $\mathcal{G}_*$  间向量  $\bar{\mathcal{G}}$  为  $\mathcal{G}$  的接近值 (一般取其各元素为  $\bar{\mathcal{G}}_j = (\mathcal{G}_j + \mathcal{G}_j^*)/2$ ), 且能找到一向量  $\mathcal{G}_i$  满足  $0 \leq \|\mathcal{G}^* - \bar{\mathcal{G}}\|^2 \leq \|\mathcal{G}_i\|^2$ 。

本文研究的目的是: 对于给定的常数  $m > 0$ , 如何设计一个带记忆且时滞相关型的状态反馈控制

$$u(t) = K_1 x(t) + \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_i) + K_{l+2} x(t - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2) + \sqrt{\|\hat{\mathcal{G}}(t) - \bar{\mathcal{G}}\|^2} K_{l+3} x(t) \quad (6.4)$$

其中  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  为  $\tau_{l+1}$  的估计值, 假设  $\dot{\hat{\tau}}_{l+1}(t) = -(\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})m_1$ , 其中  $m_1 \geq 0$  为一非负常数即  $\hat{\tau}_1(t)$  变化的方向与  $(\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})$  的符号相反, 类似的  $\dot{\hat{\mathcal{G}}}(t) = -(\hat{\mathcal{G}}(t) - \bar{\mathcal{G}})m_2$ ,  $m_2 \geq 0$ 。  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, l+3$  为待求矩阵。使得系统(6.1)是渐近稳定的, 且满足  $\|\tilde{z}\|_2 < m \|w\|_2$  (这里  $\|\cdot\|_2$  是  $L_2$  范数), 并定出未知参数  $\tau_{l+1}$ 、未知上界  $\mathcal{G}$  的自适应律。

### 6.3 主要结果——对于两种未知参数的新型自适应控制

由(6.1)和(6.4)可得闭环系统如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - \tau_i) + \sum_{j=0}^{l+1} G_j(x(t - \tau_j), t) + B_2 K_1 x(t - \tau_{l+1}) + B_2 \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_{l+1} - \tau_i) \\ \quad + B_2 K_{l+2} x(t - \tau_{l+1} - [\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1}]^2) + B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{\mathcal{G}}(t - \tau_{l+1}) - \bar{\mathcal{G}}\|^2} x(t - \tau_{l+1}) + B_1 w(t) \\ \tilde{z}(t) = (C + DK_1 + \sqrt{\|\hat{\mathcal{G}}(t) - \bar{\mathcal{G}}\|^2} \bullet DK_{l+3})x(t) + D \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_i) + DK_{l+2} x(t - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0] \end{array} \right. \quad (6.5)$$

其中  $\bar{\tau} = \max_{i=1, \dots, l} (\tau_i, \bar{\tau}_{l+1}^2) + \tau_{l+1}^*$ , 用[28]中“descriptor form”的方法并令

$$y(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - \tau_i) + \sum_{j=0}^{l+1} G_j(x(t - \tau_j), t) + B_1 w(t)$$

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}\|^2} \bullet x(t - \tau_{l+1}), \\
z(t) &= B_2 \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_{i+1} - \tau_i) + B_2 K_{l+2} x(t - \tau_{l+2}) + B_2 K_l x(t - \tau_{l+1}), \text{ 即} \\
y + z + \bar{z} &= \\
&= (A + \sum_{i=1}^l A_i + B_2 \sum_{i=1}^{l+2} K_i + B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}\|^2}) x(t) + B_1 w(t) - \sum_{i=1}^l A_i \int_{-\tau_i}^t (y(s) + z(s) + \bar{z}(s)) ds \\
&\quad - B_2 \sum_{i=1}^{l+2} K_i \int_{-\tau_{i+1}}^t (y(\xi) + z(\xi) + \bar{z}(\xi)) d\xi - B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}\|^2} \int_{-\tau_{l+1}}^t (y(s) + z(s) + \bar{z}(s)) ds + \\
&\quad \sum_{j=0}^{l+1} G_j(x(t - \tau_j), t)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

其中  $\tau_{i+l+1} = \tau_{l+1} + \tau_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $\tau_{2l+2} = \tau_{l+1} + [\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}]^2$ , 对于系统(6.6), 并

取系统的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_i, w_i) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + \frac{l_1}{2} (\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1})^2 + \frac{l_2}{2} [\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}]^T \bullet [\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}] \tag{6.7}$$

其中  $V_2(t) = \sum_{i=1}^{2l+2} \int_{-\tau_i}^0 \int_{\theta+\theta}^0 (y(s) + z(s) + \bar{z}(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s) + \bar{z}(s)) ds d\theta$ ,  $V_1(t) = x^T P x$ ,

$P$ ,  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 2l+2$ ,  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  为待定正定矩阵,  $l_1$ ,  $l_2$  为正常数。

$V_3(t) = \sum_{i=1}^{l+1} \int_{-\tau_i}^t x(s)^T S_i x(s) ds$ .  $V_1(t)$  沿系统(6.6)的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x_i, w_i) &= 2x^T P(y + z + \bar{z}) \\
&= 2[x^T (y + z + \bar{z})^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + z + \bar{z} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 2[x^T (y + z + \bar{z})^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y + z + \bar{z} \\ \bar{A}x - y - z - \bar{z} + B_1 w \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{l+1} \begin{bmatrix} 0 \\ G_j(x(t - \tau_j), t) \end{bmatrix} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{2l+2} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \right] \int_{-\tau_i}^t (y(s) + z(s) + \bar{z}(s)) ds \\
&= 2[x^T (y + z + \bar{z})^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + z + \bar{z} \\ \bar{A}x - y - z - \bar{z} + B_1 w \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{l+1} \rho_j - \sum_{i=1}^{2l+2} \eta_i
\end{aligned} \tag{6.8}$$

其中  $\bar{A} = A + \sum_{i=1}^{2l+2} \bar{A}_i$ ,  $\bar{A}_i = A_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $\bar{A}_{l+1} = B_2 K_1 + B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{g}(t - \tau_{l+1}) - \bar{g}\|^2}$ ,  $\bar{A}_{l+2} = B_2 K_l$ ,

$i = 2, \dots, l+2$ , 令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 且  $P_1$ ,  $P_2$  满足  $E \bar{P}^T = \bar{P} E$ .

对于  $\eta_i(t) = -2 \int_{-\tau_i}^t [x^T (y+z+\bar{z})^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{A}_i(y(s)+z(s)+\bar{z}(s)) ds$  由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} \eta_i &\leq \tau_i [x^T (y+z+\bar{z})^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i [0 \quad I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} \\ &+ \int_{-\tau_i}^t (y(s)+z(s)+\bar{z}(s))^T \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i (y(s)+z(s)+\bar{z}(s)) ds \\ &\quad [x^T (y+z+\bar{z})^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_{2l+2} [0 \quad I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} \\ \text{而} \quad &= x^T P_1 R_{2l+2} P_1^T x + 2x^T P_1 R_{2l+2} P_2^T (y+z+\bar{z}) + (y+z+\bar{z})^T P_2 R_{2l+2} P_2^T (y+z+\bar{z}) \\ &= x^T P_1 R_{2l+2} P_1^T x + 2x^T P_1 R_{2l+2} P_2^T (y+z+\bar{z}) + 2(\bar{z}+z)^T P_2 R_{2l+2} P_2^T y + y^T P_2 R_{2l+2} P_2^T y \\ &\quad + (z+\bar{z})^T P_2 R_{2l+2} P_2^T (z+\bar{z}) \end{aligned} \quad (6.9)$$

(6.10)

其中  $R_i, i=1, \dots, 2l+2$  为任意正定矩阵, 此外由假设 6.2 可得

$$\begin{aligned} 2[x^T (y+z+\bar{z})^T] \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ G_j(x(t-\tau_j), t) \end{bmatrix} &= 2[x^T (y+z+\bar{z})^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t) \\ \leq [x^T (y+z+\bar{z})^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} T_j [0 \quad I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} &+ (B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t))^T T_j^{-1} B_2 \delta_j(x(t-\tau_j), t) \\ \leq [x^T (y+z+\bar{z})^T] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} T_j \begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} &+ \lambda_{\max}(T_j^{-1}) \alpha_j^2 \|x(t-\tau_j)\|^2 \end{aligned}$$

其中  $T_j, j=0, \dots, l+1$  为任意正定矩阵, 取  $T_i = \lambda I, i=0, \dots, l+1$ ,  $\lambda$  为一正常数, 因此

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=0}^{l+1} [x^T (y+z+\bar{z})^T] \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ G_j(x(t-\tau_j), t) \end{bmatrix} & \\ \leq \sum_{j=0}^{l+1} [[x^T (y+z+\bar{z})^T] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} T_j \begin{bmatrix} P_1^T & P_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} + \lambda_{\max}(T_j^{-1}) \alpha_j^2 \|x(t-\tau_j)\|^2] &= \quad (6.11) \\ \lambda(l+2) [x^T (y+z+\bar{z})^T] \begin{bmatrix} P_1 P_1^T & P_1 P_2^T \\ P_2 P_1^T & P_2 P_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y+z+\bar{z} \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{l+1} \frac{\alpha_j^2}{\lambda} \|x(t-\tau_j)\|^2 & \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \bar{z}^T P_2 P_2^T \bar{z} &= \left\| P_2^T B_2 K_{l+3} \sqrt{\|\hat{g}(t-\tau_{l+1}) - \bar{g}\|^2} \bullet x(t-\tau_{l+1}) \right\|^2 \\ &= (\hat{g}(t-\tau_{l+1}) - \bar{g})^T (\hat{g}(t-\tau_{l+1}) - \bar{g}) x(t-\tau_{l+1})^T (B_2 K_{l+3})^T P_2 P_2^T B_2 K_{l+3} x(t-\tau_{l+1}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

考虑到

$$\frac{d\left(\int_{\tau_{l+1}}^0 \int_{s+\theta} \dot{x}(s)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i \dot{x}(s) ds d\theta\right)}{dt} = 2[\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}] \tau_{l+1}(t - \tau_{l+1}) \bullet$$

$$\int_{-\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}}^0 \dot{x}(s)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i \dot{x}(s) ds + \int_{\tau_{l+1}}^0 [\dot{x}(t)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i \dot{x}(t) - \dot{x}(t+\theta)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i \dot{x}(t+\theta)] d\theta$$

由于  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  变化的方向与  $(\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})$  的符号相反, 也即  $\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1})$  变化的方向与

$(\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1})$  的符号相反, 因此

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq \sum_{i=1}^{2l+2} [\tau_i(y(t) + \bar{z}(t) + z(t))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(t) + \bar{z}(t) + z(t)) - \\ &\quad \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + \bar{z}(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + \bar{z}(s) + z(s)) ds] \end{aligned} \quad (6.13)$$

而

$$\dot{V}_3(t) = \sum_{i=1}^{l+1} [x(t)^T S_i x(t) - x(t - \tau_i)^T S_i x(t - \tau_i)] \quad (6.14)$$

取  $R_i = Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 2l+2$ , 由(6.7)-(6.14)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_i) &\leq \tilde{x}(t)^T \Xi_0 \tilde{x}(t) + [\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}] \{ l_1 \hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) + [\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}] (z + \bar{z})^T P_2 R_{2l+2} P_2^T \bullet \\ &\quad (z + \bar{z}) \} + (\hat{\theta}(t - \tau_{l+1}) - \bar{\theta})^T [l_2 \hat{\theta}(t - \tau_{l+1}) + \lambda(l+2) \bullet (\hat{\theta}(t - \tau_{l+1}) - \bar{\theta}) \bullet \bar{z}^T P_2 P_2^T \bar{z}] \end{aligned} \quad (6.15)$$

其中  $\tilde{x}^T(t) = [x^T \ y^T \ z^T \ \bar{z}^T \ x^T(t - \tau_1) \ \dots \ x^T(t - \tau_{l+1}) \ w^T]$ ,

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{1,l+6} \\ * & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{2,l+6} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \Xi_{l+6,l+6} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{11} = P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1^T + \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i P_i Q_i P_i^T + \sum_{i=1}^{l+1} S_i + \lambda(l+2) P_1 P_1^T + \alpha_0^2 / \lambda \bullet I,$$

$$\Xi_{12} = P - P_1 + \bar{A}^T P_2^T + \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i P_i Q_i P_2^T + \lambda(l+2) P_1 P_2^T = \Xi_{13} = \Xi_{14} = P_1 B_1,$$

$$\Xi_{44} = \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i P_2 Q_i P_2^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \tau_{l+1} P_2 R_{2l+2} P_2^T, \quad \Xi_{33} = \Xi_{34} = \Xi_{44} + \lambda(l+2) P_2 P_2^T,$$

$$\Xi_{22} = \Xi_{23} = \Xi_{24} = \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i P_2 Q_i P_2^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \lambda(l+2) P_2 P_2^T,$$

$$\Xi_{2,l+6} = P_2 B_1 = \Xi_{3,l+6} = \Xi_{4,l+6},$$

$\Xi_{i+4,j+4} = \alpha_i^2 / \lambda \bullet I - S_i$ ,  $i = 1, \dots, l+1$ , 其余项为零。为研究系统(6.5)的  $H^\infty$  特性, 令初始

值  $\phi(t) = 0$ , 则对给定的常数  $T > 0$  及  $\gamma > 0$  有

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^T (\tilde{z}^T \tilde{z} - m^2 w^T w) dt \leq \int_0^T (\tilde{z}^T \tilde{z} - m^2 w^T w + \dot{\bar{V}}(x_i, w_i)) dt = \\ &\quad \int_0^T \{ [(C + DK_1 + \sqrt{\|\hat{g}(t)^T - \bar{g}\|^2} \cdot DK_{l+3}) x(t) + D \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_i) + DK_{l+2} x(t - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2)]^T \\ &\quad \cdot [(C + DK_1 + \sqrt{\|\hat{g}(t)^T - \bar{g}\|^2} \cdot DK_{l+3}) x(t) + D \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t - \tau_i) + DK_{l+2} x(t - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2)] \\ &\quad - m^2 w^T w + \dot{\bar{V}}(x_i, w_i)\} dt \leq \int_0^T \bar{x}^T(t) \Xi \bar{x}(t) dt \end{aligned} \quad (6.16)$$

其中

$$\bar{x}^T(t) = [x^T \quad y^T \quad z^T \quad \bar{z}^T \quad x^T(t - \tau_1) \quad \cdots \quad x^T(t - \tau_{l+1}) \quad x^T(t - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2) \quad w^T], \text{ 且}$$

$$\bar{V} = V + \int_{-(\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1})^2}^t x^T(s) S_{l+2} x(s) ds, \text{ 故当 } \Xi < 0 \text{ 时可得 } J_T < 0, \text{ 由 Schur 补引理可得 } \Xi < 0$$

等价于如下矩阵不等式成立:

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\Xi} & \bar{\Xi}_1 & \cdots & \bar{\Xi}_{2l+3} \\ \bar{\Xi}_1^T & M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{\Xi}_{2l+3}^T & & M_{2l+3} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.17)$$

$$\text{其中 } \bar{\Xi}_i = [0 \quad \bar{A}_i \quad \bar{A}_i \quad \bar{A}_i \quad 0_i \quad \cdots \quad 0_{l+2+l}] , \quad i = 1, \dots, 2l+2 , \quad M_{2l+2} = -\tau_{l+1}^{-1} Q_{2l+2} ,$$

$$M_i = -\tau_i^{-1} Q_i , \quad i = 1, \dots, 2l+1 , \quad M_{2l+3} = -I ,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{2l+3}^T &= \left[ C + DK_1 + \sqrt{\|\hat{g}(t)^T - \bar{g}\|^2} \cdot DK_{l+3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad DK_2 \quad \cdots \quad DK_{l+1} \quad 0 \quad DK_{l+2} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_{2l+3} \right] \\ \bar{\Xi} &= \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & \cdots & \bar{\Xi}_{1,l+7} \\ * & \bar{\Xi}_{22} & \cdots & \bar{\Xi}_{2,l+7} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \bar{\Xi}_{l+7,l+7} \end{bmatrix}, \text{ 其中} \end{aligned}$$

$$\bar{\Xi}_{44} = \sum_{i=1}^{2l+1} \tau_i P_2 Q_i P_2^T - P_2 - P_2^T + \tau_{l+1} P_2 R_{2l+2} P_2^T , \quad \bar{\Xi}_{33} = \bar{\Xi}_{34} = \bar{\Xi}_{44} + \lambda(l+2) P_2 P_2^T$$

$$\bar{\Xi}_{22} = \bar{\Xi}_{23} = \bar{\Xi}_{24} = \sum_{i=1}^{2l+2} \tau_i P_2 Q_i P_2^T - P_2 - P_2^T + \lambda(l+2) P_2 P_2^T , \quad \bar{\Xi}_{11} = \Xi_{11} + S_{l+2} , \quad \bar{\Xi}_{l+6,l+6} = -S_{l+2} ,$$

$\bar{\Xi}_{l+7,l+7} = -m^2 I$ , 其余  $\bar{\Xi}_{ij} = \Xi_{ij}$ , 但原下标含有的  $l+6$  变成  $l+7$ , 其余项为 0。由以上推导可得如下结论::

**定理 6.1** 对于带未知输入时滞参数  $\tau_{l+1}$  的非线性时滞系统(6.1), 如果存在矩阵  $U_i$ ,

$i=1, \dots, l+3$ , 正定矩阵  $X$ , 正常数  $n_1$ 、 $n_2$ , 使得线性矩阵不等式(6.20)成立, 且对  $\tau_{l+1}$  的自适应律可取为(6.18), 对  $\vartheta$  的自适应律可取为(6.19), 选定的常数使得  $\tau_{l+1}$  的估计值  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  满足  $\tau_{l+1}^* \geq \hat{\tau}_{l+1}(t) \geq \tau_{l+1} \geq \tau_{l+1}^*$ , 并能找到正常数  $\bar{\tau}_{l+1} > 0$  使得  $0 < \tau_{l+1}^* - h_{l+1} \leq \bar{\tau}_{l+1}$  成立。 $\vartheta$  的估计值  $\hat{\vartheta}(t)$  满足  $\vartheta^* \geq \vartheta \geq \hat{\vartheta}(t) \geq \vartheta_*$ ,  $\forall t \geq 0$ , 则线性时滞系统(6.1)内部是渐近稳定的, 且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $m$ 。反馈增益矩阵:  $K_i = U_i X^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, l+3$ 。

证明 可以看出, 若式(6.17)成立且对  $\tau_{l+1}$  的自适应律可取为

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) &= -\frac{1}{l_1} [\hat{\tau}_{l+1}(t - \tau_{l+1}) - h_{l+1}] (z + \bar{z})^T P_2 Q_{2l+2} P_2^T (z + \bar{z}), \text{ 即} \\ \hat{\tau}_{l+1}(t) &= -\frac{1}{l_1} [\hat{\tau}_{l+1}(t) - h_{l+1}] [z(t + \tau_{l+1}) + \bar{z}(t + \tau_{l+1})]^T P_2 Q_{2l+2} P_2^T [z(t + \tau_{l+1}) + \bar{z}(t + \tau_{l+1})]] \quad (6.18)\end{aligned}$$

且对  $\vartheta$  的自适应律可取为

$$\hat{\vartheta}(t - \tau_{l+1}) = -\frac{1}{l_2} (\hat{\vartheta}(t - \tau_{l+1}) - \bar{\vartheta}) \bullet \lambda(l+2) \bullet x(t - \tau_{l+1})^T (B_2 K_{l+3})^T P_2 P_2^T B_2 K_{l+3} x(t - \tau_{l+1}),$$

即

$$\hat{\vartheta}(t) = -\frac{\lambda(l+2)}{l_2} (\hat{\vartheta}(t) - \bar{\vartheta}) \bullet x^T(t) (B_2 K_{l+3})^T P_2 P_2^T B_2 K_{l+3} x(t) \quad (6.19)$$

而由 Schur 补引理可知  $w(t) = 0$  时(6.17)成立包含了系统内部渐近稳定的解 ( $\Xi_0 < 0$ ), 因此此时线性时滞系统(6.1)内部是渐近稳定的, 且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $m$ 。令  $S \triangleq \tilde{\Xi} < 0$ , 显然  $\forall \tau_{l+1}, \tau_{l+1} \leq \tau_{l+1}^*$  有  $S(\tau_{l+1}) \leq S(\tau_{l+1}^*)$ ; 同时对  $\hat{\tau}_{l+1} - h_{l+1}$  代入  $\tau_{l+1}^* - h_{l+1} = \bar{\tau}_{l+1}$ ; 此外,  $\forall \vartheta$ ,  $\vartheta \leq \vartheta^*$ , 有  $S(\vartheta) \leq S'(\vartheta^*)$ , 其中  $S'(\vartheta^*)$  表示对于  $\vartheta$  和  $\hat{\vartheta}$  代入其上界  $\vartheta^*$ , 对于  $\vartheta$  的元素  $\alpha_i$  也做同样处理, 而对于  $\sqrt{\|\hat{\vartheta}(t) - \bar{\vartheta}\|^2}$  则代入  $\|\vartheta^* - \bar{\vartheta}\|^2 = \|\vartheta\|^2$ , 因此即能保证  $S < 0$ 。令  $\tilde{\Xi} = S'$ 。对  $\tilde{\Xi} < 0$  两边同乘以矩阵  $\text{diag}(X_1 \cdots X_{3l+10})$ , 其中  $X_1 = P_1^{-1}$ ,  $X_{2,3,4} = Y = P_2^{-1}$ ,  $X_i = X = P^{-1}$ ,  $i = 5, \dots, l+6$ ,  $X_j = I$ ,  $j = l+7, \dots, 3l+10$ 。令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ , 由引理 2.4 可得  $\tilde{\Xi} < 0$  等价于如下不等式 (中间过程略):

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & \tilde{\Xi}_1 & \cdots & \tilde{\Xi}_{3l+5} \\ \tilde{\Xi}_1^T & \tilde{M}_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_{3l+5}^T & & & \tilde{M}_{3l+5} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.20)$$

其中  $\tilde{\Xi}_i^T = [0 \ n_2 A_i X \ n_2 A_i X \ n_2 A_i X \ 0_1 \ \cdots \ 0_{l+2+i}]$ ,  $i=1, \dots, l$ ,  $\tilde{M}_{2l+2} = -(\tau_{l+1}^*)^{-1} Q_{2l+2}$ ,

$$\tilde{\Xi}_{l+1}^T = [0 \ \bar{U} \ \bar{U} \ \bar{U} \ 0_1 \ \cdots \ 0_{2l+3}], \quad \bar{U} = n_2 B_2 U_1 + n_2 \|g_i\| B_2 U_{l+3},$$

$$\tilde{\Xi}_{l+1}^T = [0 \ n_2 B_2 U_1 \ n_2 B_2 U_1 \ n_2 B_2 U_1 \ 0_1 \ \cdots \ 0_{2l+3+i}], \quad i=2, \dots, l+2, \quad \tilde{M}_i = -\tau_i^{-1} Q_i,$$

$i=1, \dots, l$ ,  $\tilde{M}_i = -(\tau_i^*)^{-1} Q_i$ ,  $i=l+1, \dots, 2l+1$ , 其中  $\tau_{l+1+i}^* = \tau_{l+1}^* + \tau_i$ ,  $i=1, \dots, l$ ,  $\tilde{M}_{2l+3} = -I$ ,

$$\tilde{\Xi}_{2l+3}^T =$$

$$\left[ \frac{n_2}{n_1} (DU_1 + CX + \|g_i\| \cdot DU_{l+3} X) \ 0 \ 0 \ 0 \ DU_2 \ \cdots \ DU_{l+1} \ 0 \ DU_{l+2} \ 0_1 \ \cdots \ 0_{2l+3} \right],$$

$$\tilde{\Xi}_{2l+4}^T = [n_2/n_1 X \ 0_1 \ \cdots \ 0_{3l+11}], \quad \tilde{M}_{2l+4} = -\lambda/\alpha_0^2 I,$$

$$\tilde{\Xi}_{2l+4+i}^T = [0_1 \ \cdots \ 0_{3l+1} \ X \ 0_1 \ \cdots \ 0_{3l+7}], \quad \tilde{M}_{2l+4+i} = -\lambda/\alpha_i^2 I, \quad i=1, \dots, l+1,$$

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \cdots & \tilde{\Xi}_{1,l+7} \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & \cdots & \tilde{\Xi}_{2,l+7} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \tilde{\Xi}_{l+7,l+7} \end{bmatrix}, \quad \text{其中}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{11} &= n_2/n_1 (A + \sum_{i=1}^l A_i) X + n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} B_2 U_i + n_2/n_1 \|g_i\| B_2 U_{l+3} + n_2/n_1 X (A + \sum_{i=1}^l A_i)^T + \\ &\quad n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} (B_2 U_i)^T + n_2/n_1 \|g_i\| (B_2 U_{l+3})^T + \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i + (n_2/n_1)^2 \sum_{i=1}^{l+2} \bar{S}_i + \lambda(l+2) I \end{aligned}$$

$$\tilde{\Xi}_{44} = \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+1} \tau_i^* Q_i - 2n_2 X + \tau_{l+1}^* Q_{2l+2}, \quad \tilde{\Xi}_{33} = \tilde{\Xi}_{34} = \tilde{\Xi}_{44} + \lambda(l+2),$$

$$\tilde{\Xi}_{22} = \tilde{\Xi}_{23} = \tilde{\Xi}_{24} = \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i - 2n_2 X + \lambda(l+2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{12} &= n_2/n_1 (n_2 - n_1) X + n_2/n_1 X (A + \sum_{i=1}^l A_i)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^{l+2} (B_2 U_i)^T + n_2/n_1 \|g_i\| (B_2 U_{l+3})^T \\ &\quad + \sum_{i=1}^l \tau_i Q_i + \sum_{i=l+1}^{2l+2} \tau_i^* Q_i + \lambda(l+2) I = \tilde{\Xi}_{13} = \tilde{\Xi}_{14} \end{aligned}$$

$$\tilde{\Xi}_{1,l+7} = \tilde{\Xi}_{2,l+7} = B_1 = \tilde{\Xi}_{3,l+7} = \tilde{\Xi}_{4,l+7}, \quad \tilde{\Xi}_{l+7,l+7} = -m^2 I, \quad \tilde{\Xi}_{l+4,l+4} = -\bar{S}_i, \quad i=1, \dots, l+2,$$

$\tau_{2l+2}^* = \tau_{l+1}^* + \bar{\tau}_{l+1}^2$ , 其余项为 0。且  $\bar{S}_i = X S_i X$ ,  $i=1, \dots, l+2$ , 用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱可算得矩阵  $U_i$ , 正定矩阵  $X$ ,  $Q_{2l+2}$ , 即可算得  $K_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1, \dots, l+3$ 。证毕

**注 6.1** 由(6.6)可见,  $\dot{x}$  被分成  $x(t-\tau_{l+1})$  之后的项  $y$  及  $x(t-\tau_{l+1})$  之前的项  $z$ 、 $\bar{z}$  三部分, 因此(6.18)中的  $z(t+\tau_{l+1})$ 、 $\bar{z}(t+\tau_{l+1})$  并不违反系统的因果性, (6.18)是可以实现的。与上

一章同理，在这样的自适应律作用下，只要  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  的初始值落在上下界  $\tau_{l+1}^*$  和  $\tau_{l+1}$  之间，即能使得  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  始终处于其上下界  $\tau_{l+1}^*$  和  $\tau_{l+1}$  之间。显然  $\hat{\tau}_{l+1}(t)$  最终的值应趋于  $\tau_{l+1}$  的接近值  $h_{l+1}$ ，不需要像[79,106]及第四章的方案那样一定要  $\hat{\tau}(t) \geq \tau$  始终成立，而且为了保证这个假设成立还要估计一个很难计算的“调整常数” $\gamma$ （仿真的时候往往还要进一步调整）。同理，对于参数向量  $\theta$  的自适应律(6.19)，只要  $\hat{\theta}(t)$  的初始值落在上下界  $\theta^*$  和  $\theta_*$  之间，即能使得  $\hat{\theta}(t)$  始终处于其上下界  $\theta^*$  和  $\theta_*$  之间。显然在这样的自适应律下， $\hat{\theta}(t)$  最终的值应趋于其接近值  $\bar{\theta}$ ，也不用像[80]中那样必须事先确定一个未知正定矩阵  $\Gamma$ ，如果不通过  $\Gamma$  控制  $\hat{\theta}(t)$  变化的大小就有可能使  $\hat{\theta}(t)$  超出其上界  $\theta^*$ ，那么定理 1 中的  $S(\theta) \leq S'(\theta^*)$  就不再成立，所求的 LMI(6.20)就不能保证系统稳定，对此[80]并未具体说明如何确定。

**注 6.2** 这里的  $l_1, l_2$  是为了防止  $\hat{\tau}_{l+1}(t), \hat{\theta}(t)$  变化过快（慢）而添加的调整常数，因为如果被估参数变化过快，系统状态还未达到平衡，而在状态达到稳定的这较长的响应时间里，实际的工程应用中有可能会出现一些不确定因素（如干扰的出现，系统参数发生了变化等），这对系统的镇定是不利的。另一方面，如果被估参数变化过慢，那么反馈到状态反馈矩阵中的有关量在很长一段时间内变化极小，这同样会影响到系统的镇定。值得注意的是： $l_1, l_2$  是在仿真过程中根据仿真结果进行调整的（一般以 10 为数量级），以使系统状态、被估参数都能响应较快，这与[79,106]及第四章中事先估计很难计算的“调整常数” $\gamma$  还要在仿真过程中进一步调整是不同的。

**注 6.3** 由 5.3.2 可知，本章的新型自适应控制有可能在未知时滞参数、非线性环节的未知上界对系统性能影响较大时无能为力，因此当出现上述情况时，与 5.3.2 同理，带记忆状态反馈控制(6.4)可变为如下形式：

$$\begin{aligned} u(t) = & K_1 x(t) + \sum_{i=1}^l K_{i+1} x(t-\tau_i) + K_{l+2} x(t-a_{l+1}) \hat{\tau}_{l+1}(t) - (\hat{\tau}_{l+1}(t) - \bar{a}_{l+1})^2 \\ & + \sqrt{2[\hat{\theta}(t-\tau_{l+1}) - \bar{\theta}] + a} K_{l+3} x(t) \end{aligned} \quad (6.21)$$

其中新加入的正常数可取为  $a_{l+1} = 2(\sqrt{h_{l+1} + h_{l+1}^2} - h_{l+1})$ ， $\bar{a}_{l+1} = \sqrt{h_{l+1} + h_{l+1}^2}$ ，

$$a = 2(\sqrt{\bar{\theta}^T \cdot 1 + \bar{\theta}^T \bar{\theta}} - \bar{\theta})$$

$$V(x_t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + \frac{l_1}{2} [2(\hat{\tau}_{l+1}(t-\tau_{l+1}) - h_{l+1}) + a_{l+1}]^2 + \frac{l_2}{2} \left\| 2[\hat{\theta}(t-\tau_{l+1}) - \bar{\theta}] + a \right\|^2 \quad (6.12)$$

变为

$$\begin{aligned} \bar{z}^T P_2 P_2^T \bar{z} &= \left\| P_2^T B_2 K_{l+3} \sqrt{2[\hat{\mathcal{G}}(t - \tau_{l+1}) - \bar{a}] + a} \right\|^2 \bullet x(t - \tau_{l+1}) \\ &= \{2[\hat{\mathcal{G}}(t - \tau_{l+1}) - \bar{a}] + a\}^T \{2[\hat{\mathcal{G}}(t - \tau_{l+1}) - \bar{a}] + a\} x^T(t - \tau_{l+1}) (B_2 K_{l+3})^T P_2 P_2^T B_2 K_{l+3} x(t - \tau_{l+1}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

相应的, 定理 6.1 中的  $\|\mathcal{G}_i\|$  变为  $\sqrt{\max_{\bar{a} \leq \hat{\mathcal{G}}(t) \leq \mathcal{G}^*} \left\{ \left\| 2[\hat{\mathcal{G}}(t - \tau_{l+1}) - \bar{a}] + a \right\|^2 \right\}} = \sqrt{\max_{\bar{a} \leq \hat{\mathcal{G}}(t) \leq \mathcal{G}^*} (\bar{\mathcal{G}}_i(\hat{\mathcal{G}}(t)))}$ ,

如  $\bar{\mathcal{G}}$  取为  $\mathcal{G}_*$  与  $\mathcal{G}^*$  的中间值即  $\bar{\mathcal{G}}$  各元素为  $\bar{\mathcal{G}}_i = (\mathcal{G}_{i*} + \mathcal{G}_i^*)/2$ , 则

$$\sqrt{\max_{\bar{a} \leq \hat{\mathcal{G}}(t) \leq \mathcal{G}^*} (\bar{\mathcal{G}}_i(\hat{\mathcal{G}}(t)))} = \sqrt{\bar{\mathcal{G}}_i(\hat{\mathcal{G}}(t) = \mathcal{G}_*)} = \sqrt{\bar{\mathcal{G}}_i(\hat{\mathcal{G}}(t) = \mathcal{G}^*)}, \text{ 分析过程与 5.3 节类似, 且 (6.20)}$$

的  $\bar{\Xi}_{44}$  中的  $\tau_{l+1} P_2 R_{2l+2} P_2^T$  变为  $(h_{l+1} + \tau_{l+1}) P_2 R_{2l+2} P_2^T$ , 其余推导过程与定理 6.1 类似, 这里不再赘述, 最后得到的自适应律为

$$\dot{\hat{\tau}}_{l+1}(t) = -\frac{1}{4l_1} [a_{l+1} + 2(\hat{\tau}_{l+1}(t) - \bar{\tau}_{l+1})] [z(t + \tau_{l+1}) + \bar{z}(t + \tau_{l+1})]^T P_2 Q_{2l+2} P_2^T [z(t + \tau_{l+1}) + \bar{z}(t + \tau_{l+1})] \quad (6.23)$$

$$\dot{\hat{\mathcal{G}}}(t) = -\frac{\lambda(l+2)}{l_1} [2(\hat{\mathcal{G}}(t) - \bar{a}) + a] \bullet x^T(t) (B_2 K_{l+3})^T P_2 P_2^T B_2 K_{l+3} x(t) \quad (6.24)$$

## 6.4 仿真示例

$$\begin{aligned} \text{考虑与 (6.1) 相符的时滞系统其中 } l=1, \tau_2 \text{ 未知, } \tau_1 = 0.4, A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \tau_2 = 0.8, \tau_2^* = 0.999, \tau_{2*} = 0.6, h_2 = 0.799, \bar{\tau}_2 = 0.20, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ D &= 0.1, G_0(x(t - \tau_1), t) = B_2 \sqrt{|x_1(t)x_2(t)|}, G_1(x(t - \tau_1), t) = B_2 \sqrt{|x_1(t - \tau_1)x_2(t - \tau_1)|}, \\ G_2(x(t - \tau_2), t) &= B_2 \sqrt{|x_1(t - \tau_2)x_2(t - \tau_2)|}, \mathcal{G}_* = [0.162411 \ 0.172411 \ 0.182411]^T, \\ \mathcal{G}^* &= [0.262411 \ 0.272411 \ 0.282411]^T, \bar{\mathcal{G}} = [0.212411 \ 0.222411 \ 0.232411]^T, \text{ 取 } \\ m &= 5.835, \text{ 把这些数据代入 LMI(6.20), 取初值 } \hat{\tau}_2(0) = 0.6, \hat{\mathcal{G}}(0) = [0.232411 \ 0.242411 \ 0.252411]^T, \text{ 令 } n_1 = 1, n_2 = 0.1 \text{ 按小间隔变化 (0.01) 直到} \end{aligned}$$

$$\text{LMI(6.20) 有可行解: } P = \begin{bmatrix} 1.1671 & 0.2447 \\ 0.2447 & 9.1955 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.0024, \quad K_1 = [0.0574 \quad -4.9294],$$

$$K_2 = 1.0e-005 * [-0.0320 \quad -0.2186], \quad K_3 = 1.0e-004 * [-0.0301 \quad -0.1713],$$

$K_4 = 1.0e-004 * [0.2082 \quad 0.1428]$ 。可得自适应增益矩阵

$$P_2 Q_4 P_2^T = 1.0e-004 * \begin{bmatrix} 0.1878 & 0.0814 \\ 0.0814 & 0.1635 \end{bmatrix},$$

$$3\lambda(B_2 K_4)^T P_2 P_2^T B_2 K_4 = 1.0e-0011 * \begin{bmatrix} 0.4320 & 0.2962 \\ 0.2962 & 0.2031 \end{bmatrix}, \quad \text{仿真过程中经过调整得到}$$

$l_1 = 1.0e-004, l_2 = 1.0e-009$ , 所得系统状态  $x(t)$  和参数估计  $\hat{\tau}_2(t)$ 、 $\hat{\theta}(t)$  分别见图 6.1 和图 6.2(a)、(b)。从图中可以看出, 在 25 秒左右  $x(t)$ 、 $\hat{\tau}_2(t)$ 、 $\hat{\theta}(t)$  都能很好的收敛。

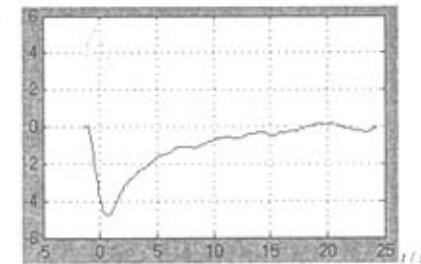


图 6.1 系统状态

Fig.6.1 State of the system

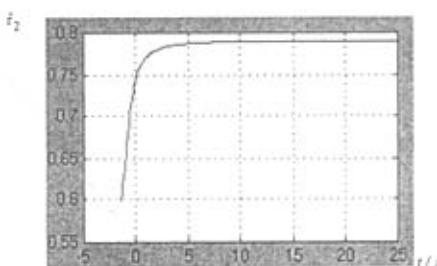


图 6.2(a)未知时滞参数估计

Fig.6.2(a) Estimate of the unknown delay parameter

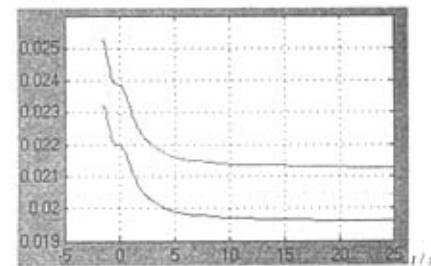
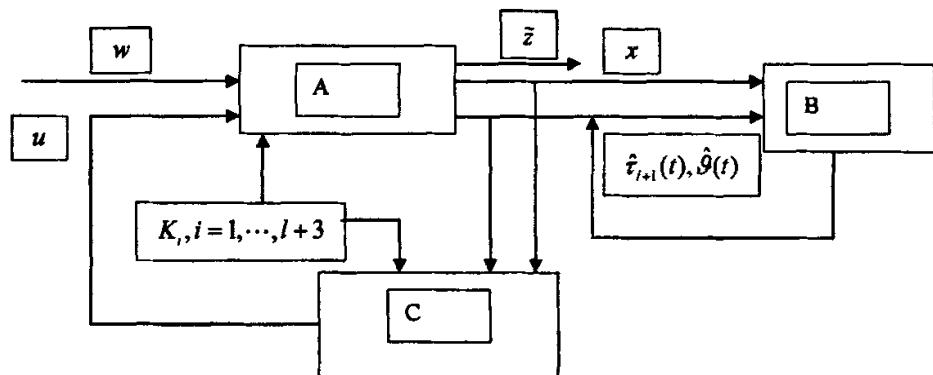


图 6.2(b)非线性环节未知上界向量估计

Fig.6.2(b) Estimate of the unknown up bound of nonlinear part

注 6.4 由于该控制系统比较复杂, 为方便理解, 现给出如下系统结构框图:



其中的 A 框表示由式(6.5)所描述的闭环系统，B 框表示由式(6.18)、(6.19)描述的两种未知参数—— $\hat{t}_{l+1}(t), \hat{g}(t)$  的自适应律，在这样的自适应律下得到的当前时刻的  $\hat{t}_{l+1}(t), \hat{g}(t)$ ，再由 C 框——由式(6.4)描述的状态反馈控制器得到控制输入  $u(t)$ ，所需的控制矩阵  $K_i, i=1, \dots, l+3$  由线性矩阵不等式(6.20)事先算得，值得注意的是估计值  $\hat{g}(t)$  不像  $\hat{t}_{l+1}(t)$  一样出现在反馈控制的记忆参数中，而是出现在控制矩阵  $K_{l+3}$  的增益上，这是由于由(6.1)-(6.3)可知  $\vartheta$  不是时滞参数而是非线性环节的未知上界所构成的向量。

## 6.5 本章小结

本章在前两章内容的基础上，把时滞系统的对时滞参数的新型自适应控制的研究扩展到更复杂的系统，在非线性多时滞系统的输入时滞参数未知、与各时滞参数相关的非线性环节的上界也未知的情况下对这两种参数同时进行新型自适应控制，对时滞参数的新型自适应控制仍通过带记忆状态反馈实现，对非线性环节的不确定上界的新型自适应控制则通过另一状态反馈的控制矩阵的增益来实现，使得研究的非线性时滞系统更趋于一般化，最后在求解线性矩阵不等式的基础上得到了可实现的对两种参数的自适应律。通过仿真示例可以看出，本章的控制器设计方案在输入时滞参数未知，非线性环节的范数与以各时滞参数为滞后常数的状态的范数上界成线性关系、且线性系数未知的情况下容易实现，具有很好的优越性。

本章的结果已整理并将发表于《系统科学与数学》。

# 第七章 一类改进的线性时滞系统的基于观测器的对时滞参数的自适应控制

## 摘要

本章主要讨论一类输入时滞、状态时滞参数均不能精确已知的时滞系统基于观测器的镇定问题，同时要对两个未知时滞参数进行和第五章一样的新型自适应控制。首先根据以往的基于分离性原理的方法分别设计控制器及观测器，接着分析该方案实现时的保守性，在此基础上综合以往计算控制矩阵的方法，得到一种能同时计算控制器、观测器矩阵的算法，在这样的观测器基础上的对时滞参数的新型自适应控制才能真正得以实现。

## 7.1 引言

对于时滞参数不能精确已知的时滞系统，第五章已经提出了新型自适应控制的方法，第六章则是把这种保守性较小、无需对时滞参数估计值进行限制的实用性较强的新颖自适应控制用到了一类复杂的非线性时滞系统上，但是这些结论研究的对象都是状态可测的时滞系统。对于状态不可测的时滞系统，镇定控制一般通过基于观测器的方法来实现<sup>[49,81-83,108,109]</sup>，这些观测器一般来说可分为两种，一种是带记忆的观测器，另一种是不带记忆的观测器。对于第一种，Azuma对一时滞系统进行了基于观测器的镇定控制<sup>[108]</sup>，Naghshabri则是在对一网络时滞系统设计了基于观测器的镇定控制<sup>[33]</sup>。对于后一种观测器，王自东和马书平分别在[49]和[109]对中立时滞系统及离散的奇异时滞系统进行了基于观测器的控制器的设计。与状态可测时带记忆状态反馈比无记忆状态反馈保守性小同理，状态不可测量输出可测的情况下，带记忆输出反馈的观测器显然比无记忆输出反馈的观测器保守性要小，但是已有的基于带记忆输出反馈的观测器的对时滞系统的镇定控制都必须知道时滞参数的精确值，否则无法实现这样的控制器，Sugimoto在[83]中对带一未知时滞参数的线性时滞系统进行了基于观测器的自适应控制，但是必须要求控制输入是一个关于时间和时滞常数的函数，这给实践中选择适当的函数来作为控制输入带来了困难。而姜偕富在[62,81,82]中通过分析得到了时滞系统的可分离性原理，并在此基础上对时滞参数已知的情况设计了控制器、观测器，对时滞参数未知的情况设计出了与已知情况下等价的控制器、观测器，并得到了对未知时滞参数的自适应律。虽然这种方法在时滞参数未知情况下的设计看似便利，但实际上是一种非时滞相关型控制，此外还

存在两个问题：第一，在计算控制器、观测器时虽然可通过两个LMI计算得到相应矩阵，但仔细观察可知实际上观测器矩阵必须在前一个计算控制器LMI可行的基础上，把控制器矩阵的可行解代入包含观测器矩阵的LMI才能得到非矛盾解，前一个LMI给后者带来了保守性；第二，在时滞参数未知的情况下，虽然得到了自适应律的具体形式，但是需要事先确定的未知量太多，其中最关键的量——观测器状态与系统实际状态差值的范数的上界这在具体实践时如何得到都没有做具体的分析说明。而文献[110]虽然通过把观测器状态引入到自适应律中，对后一种缺点进行了改进，但是第一个问题还没解决，此外又增加一个问题——在对观测器矩阵的求解上，往往需要对量测输出向量中的矩阵C进行是否满秩的讨论，而矩阵C未满秩时有可能得不到观测器矩阵的解。因此保守性小、真正切实可行的基于观测器的对时滞参数的自适应控制还未有结果。

本章首先仍以时滞系统的可分离性原理为基础，对未知的状态和输入时滞参数都进行了新型自适应控制，要实现两个参数的自适应律必须求解两个LMI才能得到控制器、观测器矩阵，但是在计算中发现了上述分离性原理带来的保守性——观测器的计算要依赖于控制器的计算，因此在新的方案中尝试能否在一个LMI同时计算控制器、观测器矩阵，在对以往保守性较小的基于”descriptor form”的Lyapunov-Krosovskii泛函之上的控制矩阵的求解算法进行比较后，发现[33]中使用的一种基于cone补线性化算法能同时计算控制器、观测器矩阵，而且无需考虑矩阵C是否满秩。这就给实践真正带来了实用和便利，并成功的把新型自适应控制用到了状态不可测的情况下。

## 7.2 问题的提出——两种控制方案的提出

考虑如下带输入时滞的线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_2) \\ \tilde{y}(t) = Cx(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max\{\tau_1, \tau_2\} + \tau_2 \end{cases} \quad (7.1)$$

其中  $x(t) \in R^n$  为状态向量， $u(t) \in R^m$  为控制输入向量， $\tilde{y} \in R^p$  为量测输出向量， $A$ ， $A_1$ ， $B$ ， $C$  为适当维数的矩阵。 $\tau_1 \geq 0$  为状态时滞参数， $\tau_2 \geq 0$  为输入时滞参数，这两个时滞参数至少一个不能精确已知，但对于不确定的时滞参数已知它们的上下界，即已知时滞参数  $\tau_{i*}$  和  $\tau_i^*$ ， $i=1,2$  使得  $\tau_{i*} \leq \tau_i \leq \tau_i^*$ ， $i=1,2$  成立。 $\phi(t) \in C[-\tau, 0]$  为系统初始向量，并能找到  $\tau_i$  的接近值  $\bar{\tau}_i$ ， $i=1,2$ ，及正常数  $\bar{\tau}_{11}$  和  $\bar{\tau}_{12}$  使得  $0 < \tau_i^* - \bar{\tau}_i \leq \bar{\tau}_{11}$  与  $0 < \bar{\tau}_i - \tau_{i*} \leq \bar{\tau}_{12}$ ，

$i=1,2$  成立, 一般  $\bar{\tau}_i$  可取为  $\tau_i^*$  与  $\tau_{i*}$  的中间值, 即有  $\bar{\tau}_i = \frac{\tau_i^* + \tau_{i*}}{2}$ ,  $i=1,2$ 。本章研究的目

的是: 如何在观测器中同时考虑状态滞后与输入滞后项的作用, 设计一个带记忆的动态输出反馈控制器, 并能得到对未知时滞参数  $\tau_i$  的自适应律, 其中自适应律必须满足新型自适应律的要求即有  $\hat{\tau}_i(t)(\hat{\tau}_i(t) - \bar{\tau}_i) \leq 0$ 。可有如下两种方案:

①如下形式的带记忆的动态输出反馈控制器(观测器状态方程中带记忆项, 且控制输入的观测器状态反馈带记忆, 观测器中的输出反馈部分为无记忆):

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) + B_1u(t) + B_2u(t - \tau_2) + L[\hat{y}(t) - C\hat{x}(t)] \\ u(t) = F_1\hat{x}(t) + F_2\hat{x}(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) \\ \hat{x}(t) = \psi(t), t \in [-\tau^*, 0], \tau^* = \bar{\tau}_1^2 + \tau_2 \end{cases} \quad (7.2)$$

其中  $\hat{\tau}_1(t)$  为系统(7.1)的状态时滞常数  $\tau_1$  的实时估计值, 且满足  $\hat{\tau}_1(t)(\hat{\tau}_1(t) - h_1) \leq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ 。关于时滞常数  $\tau_1$  的自适应律将在后面给出, 使得如下闭环系统是渐近稳定的:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_1F_1)x(t) + A_1x(t - \tau_1) - B_1F_1e(t) + B_1F_2x(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) - B_1F_2e(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) + \\ B_2F_1x(t - \tau_2) - B_2F_1e(t - \tau_2) + B_2F_2x(t - \tau_2 - (\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)^2) \\ - B_2F_2e(t - \tau_2 - (\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)^2) \\ \dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + A_1x(t - \tau_1) - A_1\hat{x}(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) \\ x(t) = \phi(t), e(t) = \phi(t) - \psi(t), t \in [-\max(\tau_1^*, \bar{\tau}_1^2 + \tau_2^*, \bar{\tau}_2^2 + \tau_2^*), 0] \end{cases} \quad (7.3)$$

其中  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , 从(7.3)我们很容易看出, 这种基于观测器的动态输出反馈控制器的设计符合分离性原理, 这就给我们在控制器与观测器的设计过程带来了很大方便。

②考虑如下带记忆的基于观测器的动态输出反馈控制器(观测器状态方程中带记忆项, 且观测器中的输出反馈部分带记忆, 控制输入的观测器状态反馈为无记忆):

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_2) + L_1[\hat{y}(t) - \hat{\tilde{y}}(t)] + \sum_{i=1}^1 L_{i+1}[\hat{y}(t - \tau_i) - \hat{\tilde{y}}(t - \tau_i)] \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) = \psi(t), t \in [-\bar{\tau}^*, 0], \bar{\tau}^* = \max_{i=1,2}(\tau_i^*) \end{cases} \quad (7.4)$$

该种输出反馈带记忆的观测器比输出反馈无记忆的观测器保守性要小，但是必须要求各时滞参数精确已知，由于  $\tau_i$ ,  $i=1,2$  均未知，因此我们采用如下的以时滞参数估计值为滞后参数的观测器

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - \alpha_1\hat{\tau}_1(t) - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) + Bu(t - \alpha_2\hat{\tau}_2(t) - (\hat{\tau}_2(t) - h_2)^2) + \\ L_1[\hat{y}(t) - C\hat{x}(t)] + \sum_{i=1}^2 L_{i+1}[\hat{y}(t - \alpha_i\hat{\tau}_i(t) - (\hat{\tau}_i(t) - h_i)^2) - C\hat{x}(t - \alpha_i\hat{\tau}_i(t) - (\hat{\tau}_i(t) - h_i)^2)] \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \hat{x}(t) = \psi(t), t \in [-\tau^*, 0], \tau^* = \max_{i=1,2}\{(\bar{\tau}_i^2 + 2\tau_i^*(\sqrt{\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_i^2} - \bar{\tau}_i)), \tau_i^*\} \end{array} \right. \quad (7.5)$$

其中  $\hat{\tau}_i(t)$ ,  $i=1,2$ , 为系统(7.1)的状态时滞常数  $\tau_i$ ,  $i=1,2$ , 的实时估计值, 且满足  $\hat{\tau}_i(t)[2(\hat{\tau}_i(t) - h_i) + a_i] \leq 0$ ,  $i=1,2$ , 其中的参数  $a_i$ 、 $h_i$ ,  $i=1,2$  均根据未知时滞参数  $\tau_i$  及其接近值  $\bar{\tau}_i$  按引理 2.5 取值。

## 7.3 主要结果

### 7.3.1 使用分离性原理的基于观测器的对时滞参数的自适应控制

由(7.1)-(7.3)我们可引入如下“descriptor form”, 并令

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = (A + B_1F_1)x(t) + A_1x(t - \tau_1) - B_1F_1e(t) + B_1F_2x(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) - B_1F_2e(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2), \\ y_2(t) = B_2F_1\hat{x}(t - \tau_2) + B_2F_2\hat{x}(t - \tau_2 - (\hat{\tau}_2(t - \tau_2) - h_2)^2) \text{ 及 } z(t) = \dot{e}(t), \bar{y}_2 = y_2, \\ \bar{y}_1 = \bar{A}\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) + LCe + B_1F_1x(t) - B_1F_1e(t) + B_1F_2x(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2), \text{ 因此} \\ -B_1F_2e(t - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2) \\ y_1 + y_2 = \dot{x} = \bar{A}\hat{x} - \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^t (y_1(s) + y_2(s))ds - \bar{B}e(t) + \sum_{i=2}^4 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^t z(s)ds \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \hat{x} = \bar{A}\hat{x}(t) - \sum_{i=1}^3 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))ds + LCe(t) \\ z = \dot{e} = (A - LC)e(t) + A_1x - A_1 \int_{-\tau_1}^t (y_1(s) + y_2(s))ds - A_1\hat{x} + A_1 \int_{-\tau_1}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))ds \end{array} \right. \quad (7.6)$$

其中  $\bar{A} = A + A_1 + B_1F + B_2F$ ,  $F = F_1 + F_2$ ,  $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_2 = B_1F_2$ ,  $\bar{A}_3 = B_2F_1$ ,  $\bar{A}_4 = B_2F_2$ ,

$\bar{B} = B_1 F + B_2 F$ ,  $\tilde{A}_1 = A_1 + B_1 F_2$ ,  $\tilde{A}_2 = B_2 F_1$ ,  $\tilde{A}_3 = B_2 F_2$ ,  $\bar{\tau}_1 = \tau_1$ ,  $\bar{\tau}_2 = (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2$ ,  $\bar{\tau}_3 = \tau_2$ ,  
 $\bar{\tau}_4 = \tau_2 + (\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)^2$ ,  $\tilde{\tau}_i = \bar{\tau}_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 取闭环系统(7.6)的 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$\begin{aligned} V(x_i) = & V_1 + V_2 + V_3 + \sum_{i=1}^4 \int_{-\bar{\tau}_i}^0 \int_{s+\theta}^0 (y_1(s) + y_2(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y_1(s) + y_2(s)) ds d\theta + \\ & \sum_{i=2}^4 \int_{-\bar{\tau}_i}^0 \int_{s+\theta}^0 z(s)^T \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i z(s) ds d\theta + \sum_{i=1}^3 \int_{-\bar{\tau}_i}^0 \int_{s+\theta}^0 (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))^T \tilde{A}_i^T \bar{Q}_i^{-1} \tilde{A}_i (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds d\theta \\ & + \int_{-\bar{\tau}_1}^0 \int_{s+\theta}^0 (y_1(s) + y_2(s))^T A_i^T Q_i^{-1} A_i (y_1(s) + y_2(s)) ds d\theta + \\ & \int_{-\bar{\tau}_1}^0 \int_{s+\theta}^0 (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))^T A_i^T \bar{Q}_i^{-1} A_i (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds d\theta + (\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1)^2 \end{aligned} \quad (7.7)$$

其中  $V_1 = x^T P_1 x$ ,  $V_2 = \hat{x}^T P_3 \hat{x}$ ,  $V_3 = e^T P_2 e$ ,  $Q_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ,  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  均为正定矩阵,  $\gamma_i$  为待定正常数。 $V_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 3$  沿系统(7.6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T P_1 (y_1 + y_2) = 2 \left[ \begin{matrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_1 & P_4 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[ \begin{matrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_1 & P_4 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ \bar{A}x - y_1 - y_2 - \bar{B}e \end{bmatrix} \right\} - \sum_{i=1}^4 \left[ \begin{matrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{matrix} \right] \int_{-\bar{\tau}_i}^t (y_1(s) + y_2(s)) ds \\ &\quad + \sum_{i=2}^4 \left[ \begin{matrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{matrix} \right] \int_{-\bar{\tau}_i}^0 z(s) ds \} \\ &= 2 \left[ \begin{matrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_1 & P_4 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ \bar{A}x - y_1 - y_2 - \bar{B}e \end{bmatrix} \right] - \sum_{i=1}^4 \eta_i + \sum_{i=2}^4 \rho_i \\ \dot{V}_2(t) &= 2 \hat{x}^T P_2 (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = 2 \left[ \begin{matrix} \hat{x}^T & (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_2 & \tilde{P}_4 \\ 0 & \tilde{P}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[ \begin{matrix} \hat{x}^T & (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_2 & \tilde{P}_4 \\ 0 & \tilde{P}_5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ \hat{A} \hat{x}(t) + L C e(t) - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \end{bmatrix} \right\} - \sum_{i=1}^3 \left[ \begin{matrix} 0 \\ \tilde{A}_i \end{matrix} \right] \int_{-\bar{\tau}_i}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds \} \\ &= 2 \left[ \begin{matrix} \hat{x}^T & (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^T \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} P_2 & \tilde{P}_4 \\ 0 & \tilde{P}_5 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ \hat{A} \hat{x}(t) + L C e(t) - \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \end{bmatrix} \right] - \sum_{i=1}^3 \tilde{\eta}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(t) &= 2e^T P_3 z = 2 \begin{bmatrix} e^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 & \bar{P}_4 \\ 0 & \bar{P}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} e^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 & \bar{P}_4 \\ 0 & \bar{P}_5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} z \\ (A - LC)e - z + A_1 x - \hat{A}_1 \hat{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{-\tau_1}^t (y_1(s) + y_2(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} \int_{-\tau_1}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds \right\} \\
&= 2 \begin{bmatrix} e^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_3 & \bar{P}_4 \\ 0 & \bar{P}_5 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} z \\ (A - LC + A_1)e - z \end{bmatrix} \right] - \bar{\eta} + \bar{\rho}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

其中  $P_4$ 、 $P_5$ ， $\bar{P}_4$ 、 $\bar{P}_5$ ， $\tilde{P}_4$ 、 $\tilde{P}_5$  满足这样的条件：令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix}$ ， $P_4$ 、 $P_5$  满

足  $E\bar{P}_1^T = \bar{P}_1 E$ ；类似的有  $\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} P_2 & \tilde{P}_4 \\ 0 & \tilde{P}_5 \end{bmatrix}$ ， $\tilde{P}_4$ 、 $\tilde{P}_5$  满足  $E\bar{P}_2^T = \bar{P}_2 E$ ； $\bar{P}_3 = \begin{bmatrix} P_3 & \bar{P}_4 \\ 0 & \bar{P}_5 \end{bmatrix}$ ， $\bar{P}_4$ 、 $\bar{P}_5$  满

足  $E\bar{P}_3^T = \bar{P}_3 E$ 。考虑到  $\hat{\tau}_1(t)(\hat{\tau}_1(t) - h_1) \leq 0$ ， $\hat{\tau}_1(t - \tau_2)(\hat{\tau}_1(t - \tau_2) - h_1) \leq 0$ ，由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
\eta_i &= 2 \int_{-\tau_1}^t \begin{bmatrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_4 \\ 0 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tilde{A}_i (y_1(s) + y_2(s)) ds \\
&\leq \bar{\tau}_i \begin{bmatrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{bmatrix} \bar{P}_i \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} S_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_i^T \begin{bmatrix} x \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + \int_{-\tau_1}^t (y_1(s) + y_2(s))^T \bar{A}_i^T S_i^{-1} \tilde{A}_i (y_1(s) + y_2(s)) ds
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\rho_i &\leq \bar{\tau}_i \begin{bmatrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{bmatrix} \bar{P}_i \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{S}_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_i^T \begin{bmatrix} x \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + \int_{-\tau_1}^t z(s)^T \bar{A}_i^T \bar{S}_i^{-1} \bar{A}_i z(s) ds \\
\tilde{\eta}_i &\leq \tilde{\tau}_i \begin{bmatrix} \hat{x}^T & (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^T \end{bmatrix} \bar{P}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} T_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_2^T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{bmatrix} + \int_{-\tau_1}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))^T \tilde{A}_i^T T_i^{-1} \tilde{A}_i (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds \\
\bar{\eta} &\leq \tau_1 \begin{bmatrix} e^T & z^T \end{bmatrix} \bar{P}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{T}_1 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_3^T \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_1}^t (y_1(s) + y_2(s))^T A_1^T \bar{T}_1^{-1} A_1 (y_1(s) + y_2(s)) ds \\
\bar{\rho} &\leq \bar{\tau}_1 \begin{bmatrix} e^T & z^T \end{bmatrix} \bar{P}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{T}_2 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_3^T \begin{bmatrix} e \\ z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_1}^t (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s))^T A_1^T \bar{T}_2^{-1} A_1 (\bar{y}_1(s) + \bar{y}_2(s)) ds \\
&- 2 \begin{bmatrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{bmatrix} \bar{P}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}e \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \bar{Q}_3 \begin{bmatrix} P_4^T & P_5^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + e^T \bar{B}^T \bar{Q}_3^{-1} \bar{B} e
\end{aligned} \tag{7.9}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{matrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{matrix} \right] \bar{P}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} S_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_1^T \begin{bmatrix} x \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\
& = x^T P_4 S_i P_4^T x + 2x^T P_4 S_i P_5^T (y_1 + y_2) + (y_1 + y_2)^T P_5 S_i P_5^T (y_1 + y_2) \quad , \quad i=4, \text{ 同理得} \\
& = x^T P_4 S_i P_4^T x + 2x^T P_4 S_i P_5^T (y_1 + y_2) + y_1^T P_5 S_i P_5^T y_1 + 2P_5 S_i P_5^T y_2 + y_2^T P_5 S_i P_5^T y_2 \\
& \left[ \begin{matrix} x^T & (y_1 + y_2)^T \end{matrix} \right] \bar{P}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{S}_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_1^T \begin{bmatrix} x \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \quad , \quad i=4, \\
& = x^T P_4 \bar{S}_i P_4^T x + 2x^T P_4 \bar{S}_i P_5^T (y_1 + y_2) + y_1^T P_5 \bar{S}_i P_5^T y_1 + 2P_5 \bar{S}_i P_5^T y_2 + y_2^T P_5 \bar{S}_i P_5^T y_2 \\
& \left[ \begin{matrix} \hat{x}^T & (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)^T \end{matrix} \right] \bar{P}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} T_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}_2^T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{bmatrix} \quad , \quad i=3 \\
& = \hat{x}^T \bar{P}_4 T_i \bar{P}_4^T \hat{x} + 2\hat{x}^T \bar{P}_4 T_i \bar{P}_5^T (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) + \bar{y}_1^T \bar{P}_5 T_i \bar{P}_5^T \bar{y}_1 + 2\bar{P}_5 T_i \bar{P}_5^T \bar{y}_2 + \bar{y}_2^T \bar{P}_5 T_i \bar{P}_5^T \bar{y}_2
\end{aligned}$$

由(7.7)-(7.9), 并取  $Q_i = S_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $R_i = \bar{S}_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ ,  $\bar{Q}_i = T_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $Q_3 = \bar{T}_1$ ,  $\bar{Q}_4 = \bar{T}_2$ ,

可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_i) \leq & \sum_{i=1}^2 \tilde{x}_i^T(t) \Xi_i \tilde{x}_i(t) + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1) [\hat{\tau}_1(t-\tau_2) + (\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1) \\
& (y_2^T P_5 S_4 P_5^T y_2 + y_2^T P_5 \bar{S}_4 P_5^T y_2 + \bar{y}_2^T P_5 T_3 P_5^T \bar{y}_2)]
\end{aligned} \quad (7.10)$$

其中  $\tilde{x}_1^T = [x^T \quad y_1^T \quad y_2^T]$ ,  $\tilde{x}_2^T = [\hat{x}^T \quad \bar{y}_1^T \quad \bar{y}_2^T \quad e^T \quad z^T]$ ,  $\Xi_1 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix}$ ,

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{15} \\ * & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{25} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \Xi_{55} \end{bmatrix}, \text{ 且 } \Xi_{11} = P_4 \bar{A} + \bar{A}^T P_4 + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i P_4 Q_i P_4^T + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i P_4 R_i P_4^T + P_4 \bar{Q}_3 P_4^T,$$

$$\Xi_{12} = \Xi_{13} = P_1 - P_4 + \bar{A}^T P_5^T + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i P_4 Q_i P_5^T + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i P_4 R_i P_5^T + P_4 \bar{Q}_3 P_5^T,$$

$$\Xi_{22} = \Xi_{23} = \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i P_5 Q_i P_5^T - P_5 - P_5^T + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i P_5 R_i P_5^T + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + P_5 \bar{Q}_5 P_5^T + \tau_1 A_1^T Q_3^{-1} A_1$$

$$\begin{aligned}
\Xi_{33} = & \sum_{i=1}^3 \bar{\tau}_i P_5 Q_i P_5^T - P_5 - P_5^T + \tau_2 P_5 Q_4 P_5^T + \sum_{i=2}^3 \bar{\tau}_i P_5 R_i P_5^T + \tau_2 P_5 R_4 P_5^T + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + P_5 \bar{Q}_5 P_5^T \\
& + \tau_1 A_1^T Q_3^{-1} A_1
\end{aligned}$$

$$\bar{\Xi}_{11} = \bar{P}_4 \bar{A} + \bar{A}^T \bar{P}_4 + \sum_{i=1}^3 \bar{\tau}_i \bar{P}_4 \bar{Q}_i \bar{P}_4^T, \quad \bar{\Xi}_{14} = \bar{P}_4 L C, \quad \bar{\Xi}_{12} = \bar{\Xi}_{13} = P_2 - \bar{P}_4 + \bar{A}^T \bar{P}_3 + \sum_{i=1}^3 \bar{\tau}_i \bar{P}_4 \bar{Q}_i \bar{P}_3^T$$

$$\bar{\Xi}_{24} = \bar{\Xi}_{34} = \tilde{P}_s LC, \quad \bar{\Xi}_{22} = \bar{\Xi}_{23} = -\tilde{P}_s - \tilde{P}_s^T + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i \tilde{P}_s \bar{Q}_i \tilde{P}_s^T + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i \tilde{A}_i^T \bar{Q}_i^{-1} \tilde{A}_i + \bar{\tau}_1 A_1^T \bar{Q}_4^{-1} A_1,$$

$$\bar{\Xi}_{33} = -\tilde{P}_s - \tilde{P}_s^T + \sum_{i=1}^2 \tilde{\tau}_i \tilde{P}_s \bar{Q}_i \tilde{P}_s^T + \tau_2 \tilde{P}_s \bar{Q}_3 \tilde{P}_s^T + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i \tilde{A}_i^T \bar{Q}_i^{-1} \tilde{A}_i + \bar{\tau}_1 A_1^T \bar{Q}_4^{-1} A_1,$$

$$\bar{\Xi}_{44} = \bar{P}_4 (A + A_1 - LC) + (A + A_1 - LC)^T \bar{P}_4 + \tau_1 \bar{P}_4 Q_3 \bar{P}_4^T + \bar{\tau}_1 \bar{P}_4 \bar{Q}_4 \bar{P}_4^T + \bar{B}^T \bar{Q}_5^{-1} \bar{B},$$

$$\bar{\Xi}_{45} = P_3 - \bar{P}_4 + (A + A_1 - LC)^T \bar{P}_3 + \tau_1 \bar{P}_4 Q_3 \bar{P}_3^T + \bar{\tau}_1 \bar{P}_4 \bar{Q}_4 \bar{P}_3^T,$$

$$\bar{\Xi}_{55} = -\bar{P}_s - \bar{P}_s^T + \tau_1 \bar{P}_s Q_5 \bar{P}_s^T + \bar{\tau}_1 \bar{P}_s \bar{Q}_4 \bar{P}_s^T + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i, \text{ 其余项为零。由以上推导可得如下}$$

结论：

**定理 7.1** 对于带未知状态时滞参数  $\tau_i$  的非线性时滞系统(7.1)，如果存在矩阵  $U_i$ ,  $i=1,2,3$ , 正定矩阵  $X$ , 正常数  $n_1$ 、 $n_2$ , 使得线性矩阵不等式(7.12), (7.13)成立,  $\tau_i$  的自适应律可取为(7.11), 选定的常数使得  $\tau_i$  的估计值  $\hat{\tau}_i(t)$  满足  $\tau_{i0} \leq \tau_i \leq \tau_i^*$ , 并能找到正常数  $\bar{\tau}_i > 0$  使得  $0 < \tau_i^* - h_i \leq \bar{\tau}_i$  成立,  $\forall t \geq 0$ , 则线性时滞系统(7.1)内部是渐近稳定的。动态输出反馈增益矩阵:  $F_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1, \dots, 2$ 。系统的观测器矩阵: 把求解(7.12)及(7.13)得到的一组可行解  $F_i$ ,  $i=1,2$ ,  $Q_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ ,  $R_i$ ,  $i=2,3,4$ ,  $P_2$ ,  $\tilde{P}_s$ ,  $P_3$ ,  $\bar{P}_4$ ,  $\bar{P}_5$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $i=1, \dots, 5$  代入  $\bar{\Xi}_2 < 0$  ( $\bar{\Xi}_2$  定义看证明中部分), 即可求得  $L$  的可行解。

**证明** 可以看出, 若不等式  $\Xi_i < 0$ ,  $i=1,2$  成立, 且对  $\tau_i$  的自适应律可取为

$$\hat{\tau}_i(t-\tau_2) = -(\hat{\tau}_1(t-\tau_2) - h_1)(y_2^T P_s Q_4 P_s^T y_2 + y_2^T P_s R_4 P_s^T y_2 + \bar{y}_2^T P_s \bar{Q}_3 P_s^T \bar{y}_2), \text{ 即}$$

$$\hat{\tau}_1 = -(\hat{\tau}_1 - h_1)(y_2^T (t+\tau_2) P_s (Q_4 + R_4) P_s^T y_2(t+\tau_2) + \bar{y}_2^T (t+\tau_2) P_s \bar{Q}_3 P_s^T \bar{y}_2(t+\tau_2)) \quad (7.11)$$

此时线性时滞系统(7.1)内部是渐近稳定的, 令  $S_i \triangleq \Xi_i < 0$ , 显然  $\forall \tau_1$ ,  $\tau_1 \leq \tau_1^*$  有  $S_i(\tau_1) \leq S_i(\tau_1^*)$ : 由于  $0 < \tau_1^* - h_1 \leq \bar{\tau}_1$ , 把  $\hat{\tau}_i(t) - h_i$  代入  $\tau_i^* - h_i = \bar{\tau}_i$  记为  $S'_i$ , 可得  $S_i(\tau_1^*) \leq S'_i$ , 这样  $S'_i < 0$  即能保证  $S_i < 0$ . 令  $S_i \triangleq \bar{\Xi}_i < 0$ , 对  $\bar{\Xi}_i < 0$  两边同乘以矩阵  $diag(X_1 \cdots X_3)$ , 其中  $X_1 = P_4^{-1}$ ,  $X_{2,3} = Y = P_s^{-1}$ , 由引理 2.4 可知  $\bar{\Xi}_i < 0$  等价于一维数为  $8n$  的不等式  $\bar{\Xi}_i < 0$ . 由于(7.6)中对  $P_4$ 、 $P_s$  的要求为满足  $E \bar{P}_1^T = \bar{P}_1 E$ , 考虑到计算简便和不影响保守性, 令  $P_4 = n_1/n_2 P_1$ ,  $P_s = 1/n_2 P_1$ , 其中  $n_1$ 、 $n_2$  为正常数, 可得  $\bar{\Xi}_i < 0$  等价于如下不等式 (中间过程略):

$$\tilde{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & \hat{\Xi}_2 & \cdots & \hat{\Xi}_6 \\ \hat{\Xi}_2^T & M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \hat{\Xi}_6^T & & & M_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (7.12)$$

其中  $X = P_1^{-1}$ ,  $\hat{\Xi}_2^T = [0 \ n_2 A_1 X \ n_2 A_1 X]$ ,  $\hat{\Xi}_3^T = [0 \ n_2 B_1 U_1 \ n_2 B_1 U_2 \ 0]$ ,

$$\hat{\Xi}_{i+1}^T = [0 \ n_2 B_2 U_{i-2} \ n_2 B_2 U_{i-2} \ 0_i \ \cdots \ 0_{i-1}], \quad i=3,4, \quad M_i = -(\bar{\tau}_i^*)^{-1} Q_i, \quad i=1, \dots, 4,$$

$$\hat{\Xi}_6^T = [0 \ n_2 A_1 X \ n_2 A_1 X \ 0_i \ \cdots \ 0_4], \quad M_5 = -(\bar{\tau}_5^*)^{-1} Q_5, \quad \tilde{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & \bar{\Xi}_{13} \\ * & \bar{\Xi}_{22} & \bar{\Xi}_{23} \\ * & * & \bar{\Xi}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Xi}_{11} = \frac{n_2}{n_1} (A + A_1) X + \frac{n_2}{n_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i U_j + \frac{n_2}{n_1} X (A + A_1)^T + \frac{n_2}{n_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (B_i U_j)^T + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i^* Q_i + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i^* R_i + \bar{Q}_5$$

$$\bar{\Xi}_{12} = \bar{\Xi}_{13} = \frac{n_2}{n_1} (n_2 - n_1) X + \frac{n_2}{n_1} X (A + A_1)^T + \frac{n_2}{n_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (B_i U_j)^T + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i^* Q_i + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i^* R_i + \bar{Q}_5,$$

$$\bar{\Xi}_{22} = \bar{\Xi}_{23} = -2n_2 X + \sum_{i=1}^4 \bar{\tau}_i^* Q_i + \sum_{i=2}^4 \bar{\tau}_i^* R_i + \bar{Q}_5$$

$$\bar{\Xi}_{33} = -2n_2 X + \sum_{i=1}^3 \bar{\tau}_i^* Q_i + \tau_2 Q_4 + \sum_{i=2}^3 \bar{\tau}_i^* R_i + \tau_2 R_4 + \bar{Q}_5, \quad \bar{\tau}_1^* = \tau_1^*, \quad \bar{\tau}_2^* = \bar{\tau}_1^2, \quad \bar{\tau}_3^* = \tau_2, \quad \bar{\tau}_4^* = \tau_2 + \bar{\tau}_1^2,$$

$\bar{\tau}_i^* = \bar{\tau}_{i+1}^*$ ,  $i=1, 2, 3$ . 这样通过求解(7.12)可得到  $P_1 = X^{-1}$ ,  $F_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1, 2$ ,  $Q_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ .

$\bar{Q}_5$ ,  $R_i$ ,  $i=2, 3, 4$ , 把这些矩阵代入  $\bar{\Xi}_2 < 0$ , 而由引理 2.4 可得  $\bar{\Xi}_2 < 0$  等价于一维数为  $13n$  的不等式  $\bar{\Xi}_2 < 0$ . 令  $\tilde{P}_4 = \tilde{n}_1 / \tilde{n}_2 P_2$ ,  $\tilde{P}_5 = 1 / \tilde{n}_2 P_2$ ,  $\tilde{P}_4 = \tilde{n}_1 / \tilde{n}_2 P_3$ ,  $\tilde{P}_5 = 1 / \tilde{n}_2 P_3$ , 其中  $\tilde{n}_1$ ,  $\tilde{n}_2$ ,  $\tilde{n}_1$ ,  $\tilde{n}_2$  为正常数. 对  $\bar{\Xi}_2 < 0$  两边同乘以矩阵  $diag(\tilde{X}_1 \cdots \tilde{X}_{13})$ , 其中  $\tilde{X}_1 = \tilde{P}_4^{-1}$ ,  $\tilde{X}_{2,3} = \tilde{Y} = \tilde{P}_5^{-1}$ ,  $\tilde{X}_4 = \tilde{P}_4^{-1}$ ,  $\tilde{X}_5 = \tilde{Y} = \tilde{P}_5^{-1}$ ,  $\tilde{X}_i = I$ ,  $i=6, \dots, 13$ . 可得  $\bar{\Xi}_2 < 0$  等价于如下不等式 (中间过程略):

$$\tilde{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_1 & \tilde{\Xi}_2 & \cdots & \tilde{\Xi}_9 \\ \tilde{\Xi}_2^T & \bar{M}_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_9^T & & & \bar{M}_8 \end{bmatrix} < 0 \quad (7.13)$$

其中

$$\tilde{\Xi}_2^T = [0 \ \tilde{n}_2 (A_1 + B_1 F_2) \tilde{X} \ \tilde{n}_2 (A_1 + B_1 F_2) \tilde{X} \ 0 \ 0],$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Xi}_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{n}_2 B_2 F_1 \tilde{X} & \tilde{n}_2 B_2 F_1 \tilde{X} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\Xi}_4^T &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{n}_2 B_2 F_2 \tilde{X} & \tilde{n}_2 B_2 F_2 \tilde{X} & 0 & \cdots & 0_4 \end{bmatrix}, \quad M_i = -(\tilde{\tau}_i^*)^{-1} \bar{Q}_i, \quad i=1,2,3, \\
 \tilde{\Xi}_5^T &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{n}_2 A_1 \tilde{X} & \tilde{n}_2 A_1 \tilde{X} & 0 & \cdots & 0_5 \end{bmatrix}, \quad M_4 = -(\tilde{\tau}_1^*)^{-1} \bar{Q}_4, \\
 M_5 &= -\bar{Q}_5, \quad \bar{M}_{i+4} = -(\tilde{\tau}_i^*)^{-1} R_i, \quad i=2,3,4 \\
 \tilde{\Xi}_6^T &= \left[ 0 \quad \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i F_j \right) \tilde{X} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_7 \right], \quad \tilde{\Xi}_7^T = \left[ 0_1 \quad \cdots \quad 0_4 \quad \tilde{n}_2 B_1 F_2 \tilde{X} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_5 \right], \\
 \tilde{\Xi}_{7+i}^T &= \left[ 0_1 \quad \cdots \quad 0_4 \quad \tilde{n}_2 B_2 F_i \tilde{X} \quad 0_1 \quad \cdots \quad 0_{5+i} \right], \quad i=1,2, \quad \tilde{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \cdots & \tilde{\Xi}_{15} \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & \cdots & \tilde{\Xi}_{25} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \tilde{\Xi}_{55} \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\Xi}_{11} &= \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} (A + A_1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i F_j) \tilde{X} + \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} \tilde{X} (A + A_1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i F_j)^T + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i^* \bar{Q}_i, \quad \tilde{\Xi}_{14} = \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} V, \\
 \tilde{\Xi}_{12} &= \tilde{\Xi}_{13} = \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) \tilde{X} + \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} \tilde{X} (A + A_1 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B_i F_j)^T + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i^* \bar{Q}_i, \quad \tilde{\Xi}_{24} = \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} V, \\
 \tilde{\Xi}_{22} &= \tilde{\Xi}_{23} = -2\tilde{n}_2 \tilde{X} + \sum_{i=1}^3 \tilde{\tau}_i^* \bar{Q}_i, \quad \tilde{\Xi}_{33} = -2\tilde{n}_2 \tilde{X} + \sum_{i=1}^2 \tilde{\tau}_i^* \bar{Q}_i + \tau_2 \bar{Q}_3, \\
 \tilde{\Xi}_{44} &= \tilde{n}_2 / \tilde{n}_1 [(A + A_1) \tilde{X} - V] + \tilde{n}_2 / \tilde{n}_1 [(A + A_1) \tilde{X} - V]^T + \tau_1^* Q_5 + \bar{\tau}_1^* \bar{Q}_4, \\
 \tilde{\Xi}_{45} &= \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} (\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1) \tilde{X} + \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} [(A + A_1) \tilde{X} - V]^T + \tau_1^* Q_5 + \bar{\tau}_1^* \bar{Q}_4, \quad \tilde{\Xi}_{55} = -2\tilde{n}_2 \tilde{X} + \tau_1^* Q_5 + \bar{\tau}_1^* \bar{Q}_4, \\
 V &= LC\tilde{X}.
 \end{aligned}$$

这样通过求解(7.13)可得到  $P_2 = \tilde{X}^{-1}$ ,  $P_3 = \tilde{X}^{-1}$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $i=1,\dots,4$ , 进而可以得到  $\bar{P}_4$ ,  $\bar{P}_5$ ,  $\tilde{P}_4$ ,  $\tilde{P}_5$ , 把这些矩阵全代入  $\tilde{\Xi}_2 < 0$  即可得到矩阵  $L$ , 从而避免了由  $LC = V\tilde{X}^{-1}$  求  $L$  可能会带来的困难(矩阵  $C$  不一定行满秩, 在 matlab 中直接求解通过解线性方程的办法由  $LC$  求  $L$  有可能无解)。这样可得到如下系统(7.1)在基于(7.2)的动态输出反馈控制器下的自适应控制器算法。

### 算法 7.1:

- ① 调整  $n_1$ 、 $n_2$ , 求解 LMI(7.12)得到  $P_1$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $F_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1,2$ ,  $Q_i$ ,  $i=1,\dots,5$ ,  $\bar{Q}_3$ ,  $R_i$ ,  $i=2,3,4$  等矩阵的可行解;
- ② 把由(7.12)得到的一组可行解  $F_i = U_i$ ,  $i=1,2$ ,  $Q_i$ ,  $i=1,\dots,5$ ,  $\bar{Q}_3$ ,  $R_i$ ,  $i=2,3,4$  代

入(7.13), 调整  $\tilde{n}_1$ 、 $\tilde{n}_2$  及  $\bar{n}_1$ 、 $\bar{n}_2$ , 求解 LMI(7.13)看是否可行;

- ③ 如果(7.13)不可行则转到①得到(7.12)的下一组可行解; 如果(7.13)可行则得到  $P_2, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5, P_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{Q}_i, i=1, \dots, 4$  等矩阵的可行解;
- ④ 得到输出反馈阵  $F_i = U_i X^{-1}, i=1, 2$ ;
- ⑤ 把由(7.12), (7.13)得到的可行矩阵  $F_i, i=1, 2, Q_i, i=1, \dots, 5, R_i, i=2, 3, 4, P_2, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5, P_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{Q}_i, i=1, \dots, 5$  代入  $\bar{\Xi}_2 < 0$ , 得到矩阵  $L$  的可行解。

**注 7.1** 由(7.6)可知  $\dot{x}$  和  $\hat{x}$  均分别拆成了  $\hat{x}(t-\tau_2)$  之后的项  $y_1$ 、 $\bar{y}_1$ , 及  $\hat{x}(t-\tau_2)$  之前的项  $y_2$ 、 $\bar{y}_2$ , 因此(7.11)中的  $y_2(t+\tau_2)$ 、 $\bar{y}_2(t+\tau_2)$  不违反因果性。另一方面, 由于系统不可测才引入了观测器, 因此观测器状态向量  $\hat{x}$  是可测量的, (7.11)是可实现的自适应律。

**注 7.2** 和前几章一样, 在求解线性矩阵不等式(7.12)时, 为简单起见, 可令  $n_1=1$ , 而用搜索法求解  $n_2$ : 即对  $n_2$  设一初值, 每经过一微小变化 (如 0.01 为一间隔变化), 直至 LMI(7.12)有可行解为止。同理求解线性矩阵不等式(7.13)时也是令  $\bar{n}_1=\tilde{n}_1=1$ , 而用搜索法求解  $\tilde{n}_2$ 、 $\bar{n}_2$ 。

**注 7.3** 尽管从以上的推导过程来看, 控制器矩阵、观测器矩阵确实可以通过算法 1 得到可行解, 而且由于符合分离性原理, 可以先求解(7.12)得到控制器矩阵再求解(7.13)观测器矩阵——这看似给设计带来了方便, 但是要得到观测器矩阵  $L$  的可行解就必须先得到控制矩阵  $F_i, i=1, 2$  的可行解, 这实际上给  $L$  的求解带来了保守性, 真正的不影响保守性的分离性原理应该是  $L$  与  $F_i, i=1, 2$  的求解互不相关; 此外由于在(7.13)中需要同时调整  $n_2$ 、 $\tilde{n}_2$ 、 $\bar{n}_2$ , 如果逐值调整会耗费很长的时间, 因此根据算法 7.1 求解很难得到所有未知量的可行解, 实用性较差。在下一节中, 通过使用输出反馈带记忆的观测器(7.5), 并使用 [111]及[33]中的一种“凸规划算法”同时求解  $L$  与  $F_i, i=1, 2$  的可行解, 而不用引入算法 7.1 中需要调整的参数  $n_i$ 、 $\tilde{n}_i$ 、 $\bar{n}_i, i=1, 2$ 。

### 7.3.2 使用输出反馈带记忆的基于观测器的对时滞参数的自适应控制

由(7.1), (7.5)及引理 2.5 可得系统(7.1)在使用输出反馈带记忆观测器下的闭环系统:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & L_1 C \\ 0 & A - L_1 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-\tau_1) \\ e(t-\tau_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BK & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t-\tau_2) \\ e(t-\tau_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & L_2 C \\ -A_1 & -L_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-a_1 \hat{\tau}_1(t) - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2)) \\ e(t-a_1 \hat{\tau}_1(t) - (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK & L_3 C \\ -BK & -L_3 C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t-a_2 \hat{\tau}_2(t) - (\hat{\tau}_2(t) - h_2)^2)) \\ e(t-a_2 \hat{\tau}_2(t) - (\hat{\tau}_2(t) - h_2)^2)) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \phi(t) - \psi(t) \end{bmatrix}, t \in [-\tau^*, 0] \end{array} \right. \quad (7.14)$$

其中  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  为观测器状态误差。使用[28]的“descriptor form”，令

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \tilde{x}(t), \text{ 及 } \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = y(t), \text{ 因此} \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + A_1 + BK & (L_1 + L_2 + L_3)C \\ 0 & A + A_1 - (L_1 + L_2 + L_3)C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^0 y(s) ds \\ \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \phi(t) - \psi(t) \end{bmatrix}, t \in [-\tau^*, 0] \end{array} \right. \quad (7.15)$$

其中  $\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1 & A_1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BK & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} A_1 & L_2 C \\ -A_1 & -L_2 C \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_4 = \begin{bmatrix} BK & L_3 C \\ -BK & -L_3 C \end{bmatrix}$ ,

$\tau_3 = a_1 \hat{\tau}_1(t) + (\hat{\tau}_1(t) - h_1)^2$ ,  $\tau_4 = a_2 \hat{\tau}_2(t) + (\hat{\tau}_2(t) - h_2)^2$ 。取闭环系统(7.15)的Lyapunov-Krasovskii泛函为

$$V(x_i) = V_1(x_i) + V_2(x_i) + V_3(x_i) + \frac{l_1}{2} [2(\hat{\tau}_1(t) - h_1) + a_1]^2 + \frac{l_2}{2} [2(\hat{\tau}_2(t) - h_2) + a_2]^2 \quad (7.16)$$

其中  $V_1(x_i) = \tilde{x}^T P \tilde{x} = [\tilde{x}^T \quad y^T] E \bar{P}^T \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ y \end{bmatrix}$ ,  $V_2(x_i) = \sum_{i=1}^4 \int_{-\tau_i}^0 \int_{-\theta}^0 y(s)^T Q_i y(s) ds d\theta$ ,

$V_3(x_i) = \sum_{i=1}^4 \int_{-\tau_i}^0 \tilde{x}(s)^T S_i \tilde{x}(s) ds$ ,  $l_i$ 、 $h_i$ 、 $a_i$ ,  $i=1,2$  为正常数, 矩阵  $P > 0$ ,  $Q_i > 0$ ,  $S_i > 0$ ,

$i=1, \dots, 4$ 。 $V_1(x_i)$  沿闭环系统(7.15)的导数为

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_i(x_i) = 2\tilde{x}^T P y \\
& = 2[\tilde{x}^T \quad y^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \\
& = 2[\tilde{x}^T \quad y^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}\tilde{x} - y \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^t y(s) ds \right\} \\
& = 2[\tilde{x}^T \quad y^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}\tilde{x} - y \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \eta_i
\end{aligned} \tag{7.17}$$

其中  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A + A_1 + BK & (L_1 + L_2 + L_3)C \\ 0 & A + A_1 - (L_1 + L_2 + L_3)C \end{bmatrix}$ ,  $\eta_i = 2[\tilde{x}^T \quad y^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^t y(s) ds$ ,

$P_1$ 、 $P_2$  满足这样的条件: 令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ ,  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}_1 E$ 。由引理

2.3 可得

$$\begin{aligned}
\eta_i & \leq \int_{-\tau_i}^t \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_i & T_i - [0 \quad \bar{A}_i^T] \bar{P}^T \\ * & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} ds \\
& = \int_{-\tau_i}^t y(s)^T R_i y(s) ds + 2 \int_{-\tau_i}^t y(s)^T (T_i - [0 \quad \bar{A}_i^T] \bar{P}^T) \bar{x}(t) ds + \tau_i \bar{x}(t)^T Z_i \bar{x}(t)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

其中  $\bar{x}(t)^T = [\tilde{x}(t)^T \quad y(t)^T]$ ,  $\begin{bmatrix} R_i & T_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0$ , 矩阵  $R_i \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}$ ,  $T_i \in \mathbb{R}^{2m \times 4n}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$ 。注

意到

$$\int_{-\tau_i}^t y(s) ds = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t - \tau_i) \tag{7.19}$$

此外

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t)^T Z_i \bar{x}(t) & = [\tilde{x}^T \quad y^T] \begin{bmatrix} Z_{i1} & Z_{i2} \\ * & Z_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ y \end{bmatrix} \\
& = \tilde{x}^T Z_{i1} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T Z_{i2} y + y^T Z_{i3} y = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & e(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{i1,1} & Z_{i1,2} \\ * & Z_{i1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + 2\tilde{x}^T Z_{i2} y + y^T Z_{i3} y, \quad i = 3, 4 \\
& = \hat{x}(t)^T Z_{i1,1} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & e(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Z_{i1,2} \\ * & Z_{i1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + 2\tilde{x}^T Z_{i2} y + y^T Z_{i3} y
\end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\text{而 } \tau_{i+2}(t) = a_i \hat{\tau}_i(t) + (\hat{\tau}_i(t) - h_i)^2 = \frac{1}{4} \{ [2(\hat{\tau}_i(t) - h_i) + a_i]^2 - a_i^2 + 4h_i a_i \}, \quad i = 1, 2 \tag{7.21}$$

$$\text{除此之外, } \frac{d\left(\int_{-\tau_i}^0 \int_{s+\theta}^0 y(s)^T Q_i y(s) ds d\theta\right)}{dt} = , \quad i=3,4,$$

$$\dot{\tau}_i(t) \bullet \int_{-\tau_i}^0 y(s)^T Q_i y(s) ds + \int_{-\tau_i}^0 [y(t)^T Q_i y(t) - y(t+\theta)^T Q_i y(t+\theta)] d\theta$$

由于  $\hat{\tau}_i(t)[2(\hat{\tau}_i(t)-h_i)+a_i] \leq 0, \quad i=1,2$ , 可得

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{i+2}(t) &= \frac{d\left(a_i \hat{\tau}_i(t) + (\hat{\tau}_i(t)-h_i)^2\right)}{dt}, \quad i=1,2, \text{ 因此} \\ &= a_i \hat{\tau}_i(t) + 2(\hat{\tau}_i(t)-h_i) \hat{\tau}_i(t) = \hat{\tau}_i(t)[a_i + 2(\hat{\tau}_i(t)-h_i)] \leq 0 \\ \dot{V}_2(t) &\leq \sum_{i=1}^4 [\tau_i y(t)^T Q_i y(t) - \int_{-\tau_i}^0 y(s)^T Q_i y(s) ds] \end{aligned} \quad (7.22)$$

而  $V_3(x_i)$  沿系统(7.15)的导数为

$$\dot{V}_3(x_i) = \sum_{i=1}^4 \tilde{x}(t)^T S_i \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t-\tau_i)^T S_i \tilde{x}(t-\tau_i) \quad (7.23)$$

令  $R_i = Q_i, \quad i=1, \dots, 5$ , 由(7.16)-(7.23)及引理 2.4 可得

$$\dot{V}(x_i) \leq \bar{x}^T(t) \Xi_0 \bar{x}^T(t) + \sum_{i=1}^2 [a_i + 2(\hat{\tau}_i(t)-h_i)] \{l_i \hat{\tau}_i(t) + \frac{1}{4} [a_i + 2(\hat{\tau}_i(t)-h_i)] \hat{x}(t)^T Z_{(i+2)1,1} \hat{x}(t)\} \quad (7.24a)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} R_i & T_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1, \dots, 4 \quad (7.24b)$$

其中

$$\bar{x}(t)^T = [\tilde{x}(t)^T \quad y(t)^T \quad \tilde{x}(t-\tau_1)^T \quad \dots \quad \tilde{x}(t-\tau_4)^T],$$

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} \Psi & \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix} - T_1^T & \dots & \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_4 \end{bmatrix} - T_4^T \\ * & -S_1 & \dots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \bar{P} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A}_0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A}_0 & -I \end{bmatrix}^T \bar{P}^T + \sum_{i=1}^2 \tau_i Z_i + \sum_{i=3}^4 \bar{\tau}_i \begin{bmatrix} \bar{Z}_{i1} & Z_{i2} \\ * & Z_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 S_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^4 \tau_i Q_i \end{bmatrix}, \\ &+ \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A & L_1 C \\ 0 & A - L_1 C \end{bmatrix}, \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_{i1} & Z_{i2} \\ * & Z_{i3} \end{bmatrix}, \quad Z_{ii} = \begin{bmatrix} Z_{ii,1} & Z_{ii,2} \\ * & Z_{ii,3} \end{bmatrix}, \quad \bar{Z}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{ii,2} \\ * & Z_{ii,3} \end{bmatrix}, \quad i=3,4.$$

由以上推导可得如下结论：

**定理 7.2** 对于带未知时滞参数的系统(7.1), 如果存在矩阵  $T_i \in R^{2m \times 4n}$ ,  $Z_i \in R^{4m \times 4n}$ ,  $P_1 \in R^{2m \times 2n}$ ,  $P_2 \in R^{2m \times 2n}$ ,  $K \in R^{n \times m}$ ,  $L_i \in R^{n \times n_i}$ ,  $i=1,2,3$ , 及正定矩阵  $P \in R^{2m \times 2n}$ ,  $S_i \in R^{2m \times 2n}$ ,  $Q_i \in R^{2m \times 2n}$ ,  $i=1,\dots,4$  使得线性矩阵不等式(7.26)成立, 其中参数  $h_i$ 、 $a_i$ ,  $i=1,2$  根据相应的未知时滞参数  $\tau_i$  及其接近值  $\bar{\tau}_i$ ,  $i=1,2$  按引理 2.5 取值, 且对未知时滞参数  $\tau_i$ ,  $i=1,2$  的自适应律取为(7.25), 则系统(7.1)在基于观测器的动态输出反馈控制器(7.5)作用下是渐近稳定的。

证明 由(7.24)可以看出, 如果对未知时滞参数  $\tau_i$ ,  $i=1,2$  的自适应律取为

$$\hat{\tau}_i(t) = -\frac{1}{4l_i} [a_i + 2(\hat{\tau}_i(t) - h_i)] \hat{x}(t)^T Z_{(i+2)1,i} \hat{x}(t), \quad i=1,2 \quad (7.25)$$

则有  $\dot{V}(x_i) \leq \bar{x}^T(t)^T \Xi_0 \bar{x}(t)$ , 这样令  $S \triangleq \Xi_0$ , 如果在  $M_i \geq 0$ ,  $i=1,\dots,4$  满足的情况下使  $\Xi_0 < 0$ , 那么由此得到的基于观测器的动态输出反馈控制器(7.5)可使系统渐近稳定。显然,  $\forall \tau_i \leq \tau_i^*$ ,  $i=1,2$  有  $S(\tau_1, \tau_2) \leq S(\tau_1^*, \tau_2^*)$ , 因此  $S(\tau_1^*, \tau_2^*) < 0$  即能保证  $\Xi_0 < 0$  成立。令  $\Xi \triangleq S(\tau_1^*, \tau_2^*)$ , 则  $\Xi < 0$  且  $M_i \geq 0$ ,  $i=1,\dots,4$  成立时有  $\dot{V}(x_i) < 0$ , 这时时滞系统(7.1)是渐近稳定的。根据引理 2.5 把  $h_i = \sqrt{\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_i^2}$ ,  $a_i = 2(\sqrt{\bar{\tau}_i + \bar{\tau}_i^2} - \bar{\tau}_i)$  代入  $\Xi < 0$  及  $M_i \geq 0$ ,  $i=1,\dots,4$  可得如下矩阵不等式

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi & \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix} - T_1^T & \cdots & \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_4 \end{bmatrix} - T_4^T \\ * & -S_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (7.26a)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} Q_i & T_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \quad (7.26b)$$

其中

$$\bar{\Psi} = \bar{P} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A}_0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A}_0 & -I \end{bmatrix}^T \bar{P}^T + \Phi,$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^2 \tau_i^* Z_i + \sum_{i=3}^4 \bar{\tau}_i \begin{bmatrix} \bar{Z}_{i1} & Z_{i2} \\ * & Z_{i3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 S_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^4 \tau_i^* Q_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

证毕

注 7.4 和注 5.3 同理, 对于  $\tau_{i+2} = a_i \hat{\tau}_i(t) + (\hat{\tau}_i(t) - h_i)^2$  ( $i=1,2$ ),  $\hat{\tau}_i(t) \in [\tau_{i*}, \tau_i^*]$ , 可得

$$\frac{d\tau_{i+2}(\hat{\tau}_i(t))}{d(\hat{\tau}_i(t))} = 2\hat{\tau}_i(t) - 2h_i + a_i = 0, \text{ 因此当 } \hat{\tau}_i(t) = \frac{2h_i - a_i}{2}, i=1,2 \text{ 时 } \tau_{i+2}(t) \text{ 能达到极值点,}$$

而  $\tau_{i+2}^*(\frac{2h_i - a_i}{2}) = 2 > 0$ , 因此  $\hat{\tau}_i(t) = \frac{2h_i - a_i}{2} = \bar{\tau}_i$ ,  $i=1,2$  是  $\tau_{i+2}(t)$  的最小值点, 因此

$$\tau_{i+2}^* = \max\{\tau_{i+2}\left(\hat{\tau}_i(t) = \{\tau_{i*}, \tau_i^*\}\right)\}, i=1,2。如果 \bar{\tau}_i \text{ 取的是 } \tau_i^* \text{ 和 } \tau_{i*} \text{ 的中间值, 由函数的对称性可知 } \tau_{i+2}^* = \tau_{i+2}\left(\hat{\tau}_i(t) = \tau_i^*\right) = \tau_{i+2}\left(\hat{\tau}_i(t) = \tau_{i*}\right), i=1,2。$$

由(7.26)可以看出这是双线性矩阵不等式 BMI, 而现在所用的数学工具 MATLAB 软件只能解决线性矩阵不等式 LMI 的问题, 因此有必要把(7.26)转化为可解的 LMI。对此, 通过引理 2.8, 及[111]和[33]中的类似证明, 把(7.26a)中的  $\exists < 0$  写成如下形式

$$J(K, L)' \bar{N} U + U \bar{N} J(K, L) + N < 0 \quad (7.27)$$

$$\text{其中 } U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \Gamma & -T_1^T & \cdots & -T_4^T \\ * & -S_1 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & : \\ * & * & * & -S_4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \Phi,$$

$$J(K, L) = \begin{bmatrix} A_0 & -I & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_4 \\ A_0 & -I & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}, \text{ 由于(7.17)中对 } P_1, P_2 \text{ 只要求满足}$$

$E\bar{P}_1^T = \bar{P}_1 E$ , 因此不妨设  $P_1, P_2$  均为正定矩阵, 这样(7.26a)按(7.27)的分解就与引理 2.8 吻合了。由引理 2.8 可得如下定理:

**定理 7.3** 对于带未知时滞参数的系统(7.1), 如果存在结构为  $2n \times 2n$  的矩阵  $P > 0$ ,  $X_1 > 0$ ,  $X_2 > 0$ ,  $Y_1, Y_2, S_i, Q_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $4n \times 4n$  的矩阵  $Z_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $2n \times 4n$  的矩阵  $T_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , 及  $n_1 \times n$  的矩阵  $K$ 、 $n \times n_2$  的矩阵  $L$ 、正常数  $\alpha > 0$  使得线性矩阵不等式(7.28)成立, 其中参数  $h_i, a_i$ ,  $i=1,2$  根据相应的未知时滞参数  $\tau_i$  及其接近值  $\bar{\tau}_i$ ,

$i=1,2$ 按引理 2.5 取值,且对未知时滞参数  $\tau_i$ ,  $i=1,2$  的自适应律取为(7.25),则系统(7.1)在基于观测器的动态输出反馈控制器(7.5)作用下是渐近稳定的。

$$\begin{bmatrix} U^T X U - N & J^T + \alpha U^T \\ * & Y \end{bmatrix} > 0, \quad i = 0, \dots, 4 \quad (7.28a)$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & T_i \\ * & Z_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (7.28b)$$

其中  $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$ ,  $X = \alpha^2 Y^{-1}$ .

**注 7.5** 定理 7.3 把原来不能用 LMI 工具箱求解的不等式(7.26)变成了 LMI(7.28),但是  $X = \alpha^2 Y^{-1}$  是一个非凸限制,这对(7.28)的通过 LMI 工具箱求解仍能造成困难,对此,可采用如下的类似于[33]中的算法来求解这一非凸问题,在求解过程中可以利用 LMI 工具箱,非凸可行性问题(7.28)也就转化为如下的线性最小值问题。

### 算法 7.2

- 1) 选择正参数  $\alpha$  的初值;
- 2) 对于 LMIs(7.28)及(7.29)求解该组问题的可行解  $X_0$ ,  $Y_0$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & \alpha^{-2} Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.29)$$

- 3) 令  $X_j = X_{j-1}$ ,  $Y_j = Y_{j-1}$ , 求解如下 LMI 最小化问题的下一组可行解  $X_{j+1}$ 、 $Y_{j+1}$ :

满足(7.28)及(7.29)的最小化问题  $\Sigma_j$ :  $\min \text{trace}(X_j Y + X Y_j)$ ;

- 4) 如果程序结束的条件满足,则结束执行程序;如果不满足则让  $j = j + 1$ ,此时如果  $j < c$ ,其中  $c$  为一设定正数,则执行步骤 3),如果  $j = c$  则适当增加  $\alpha$  再执行步骤 2)。

**注 7.6** 如果算法 7.2 中的  $\text{trace}(X_j Y + X Y_j)$  的最小值恰为  $8n \times \alpha^{-2}$ ,那么满足  $X = \alpha^2 Y^{-1}$  的(7.28)的可行解中的  $K$  和  $L$  能使系统(7.1)在基于观测器的动态输出反馈控制器(7.5)及自适应律(7.25)的作用下渐近稳定。但实际上,要使  $\text{trace}(X_j Y + X Y_j)$  的最小值恰为  $8n \times \alpha^{-2}$  是非常困难的,因此可把(7.28)作为算法结束的条件,即把算法 7.2 步骤 3 算得的  $X$ 、 $Y$  代入(7.28)检验是否可行。

**注 7.7** 与定理 5.2 同理,自适应律(7.25)有两个优点:首先,未知时滞参数估计值  $\hat{\tau}_i(t)$ ,

$i=1,2$  不用被限制为不小于其真实值, 即  $\hat{\tau}_i(t) \geq \tau_i$ ,  $i=1,2$ ; 其次, 由于  $a_i$ 、 $b_i$ ,  $i=1,2$  均根据未知时滞参数  $\tau_i$  及其接近值  $\bar{\tau}_i$  按引理 2.5 取值, 因此当  $\hat{\tau}_i(t)$ ,  $i=1,2$  趋于稳定即

$$\hat{\tau}_i(t) \rightarrow \frac{2h_i - a_i}{2} = \bar{\tau}_i, \quad i=1,2 \text{ 时 观 测 器 (7.5) 变 为}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_1\hat{x}(t-\bar{\tau}_1) + Bu(t-\bar{\tau}_2) + L_1[\hat{y}(t) - C\hat{x}(t)] + \sum_{i=1}^2 L_{i+1}[\hat{y}(t-\tau_i) - C\hat{x}(t-\bar{\tau}_i)]$$

即表明观测器中输出反馈的滞后常数与  $\tau_i$ ,  $i=1,2$  已知时的滞后常数相差在有限范围内,

$$\text{即 } 0 \leq |\hat{\tau}_i - \tau_i| = |\bar{\tau}_i - \tau_i| = \max(|\bar{\tau}_i - \tau_i^*|, |\bar{\tau}_i - \tau_{i*}|) = \max(\bar{\tau}_{i1}, \bar{\tau}_{i2})$$

由于基于观测器的动态输出反馈控制器能同时反映当前及滞后的观测器状态, 因此本节的结论要比[49,109,110]保守性要小, 而[82]中的基于观测器的动态输出反馈控制器虽然在时滞参数已知、未知的情况下相同, 但实际上是一个非时滞相关型控制器, 因此在小时滞情况下保守性较本节的时滞相关型控制器要大, 此外本节不需要像[62,81,82]那样需要实现估算观测器误差  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  的欧式范数上界值 (该值实际上在控制前根本无法估算), 因此本节的结论更具实用性。

## 7.4 本章小结

本章首先利用前人的“时滞系统的可分离性原理”设计控制器、观测器矩阵, 同时对未知时滞参数进行新型自适应控制, 尽管不需要像以往基于观测器的对时滞参数自适应控制那样需要实现估算观测器误差的欧式范数上界值, 但是在具体计算时分析可知观测器矩阵的值仍依赖于控制器矩阵的值, 要求解的 LMI 中需要调整的参数较多, 保守性、实用性较差。因此在后面的新方案中, 采用输出反馈带记忆的方法, 不仅使结论比无记忆情况下保守性要小, 而且闭环状态方程的结构也较为简单, 在计算控制器、观测器矩阵时通过一种非凸的线性化方法, 能够同时计算控制器、观测器矩阵, 只需调整一个参数, 是真正可行的基于观测器的新型自适应控制。

本章的部分结果已整理并发表于《中国第 24 届控制会议论文集》, 还有部分结果已整理成文并被 International Symposium on Neural Networks 2007 录用, 并即将发表于论文集 Lecture Notes in Computer Science。

# 第八章 分布时滞系统的 $H^\infty$ 控制与对分布时滞参数的新型自适应控制

## 摘要

本章研究较为复杂的分布时滞系统，当时滞参数精确已知的时候，对一类具有“有限时滞最普通的线性系统”特点的分布时滞系统进行  $H^\infty$  控制，根据该类系统的特点制定相应的基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 范函，在求导时能充分发挥该种系统的特点。针对以往对分布时滞系统只能使用无记忆控制的缺点，通过同时加入以包含分布时滞参数为滞后常数的带记忆项，及分布时滞记忆项，经过推导得到了带记忆控制的非零矩阵；当时滞参数未知的时候，首次在分布时滞带记忆控制的积分下限中引入对未知分布时滞参数的新型自适应控制，相应的带记忆控制项也包含未知时滞参数的估计值。最后通过仿真示例以说明本章方案的有效性。

### 8.1 引言

前几章已经分别对线性时滞系统、带与时滞相关的非线性环节的多时滞系统进行了  $H^\infty$  控制、新型自适应控制，本章研究另一种较为复杂的时滞系统——分布时滞系统。已有的结论<sup>[36,42,44,46,56]</sup>说明，在分布时滞系统中使用基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函仍有效，而在此基础上对于以往的分布时滞系统的镇定控制及  $H^\infty$  控制，往往采用无记忆状态反馈控制<sup>[36,42,44]</sup>，即使采用了含分布时滞的带记忆控制，得到的带记忆控制矩阵却为零解<sup>[56]</sup>，这会在分布时滞参数对系统性能影响较大时无能为力。此外，以往研究的分布时滞系统中分布时滞环节的特点往往不具有“有限时滞最普通的线性系统”的复杂特点，比如文献[117]研究了一类具有分布与离散时滞的控制系统的绝对稳定性的时滞相关准则问题，但所选取的分布环节形式过于简单，问题的一般性较弱。文献[118~120]从神经网络模型的角度研究了一类具有连续分布时滞模型的稳定性，但对分布时滞环节提出了众多约束条件，结论的保守性较大。因此有必要研究该类比以往对象更具一般性的系统。

本章首先对分布时滞环节具有文献[5]中的“有限时滞最普通的线性系统”的特点的分布时滞系统进行  $H^\infty$  控制，在分析以往对分布时滞系统进行带记忆控制为何只能得到零矩阵后，找到了如何提高可解性的方法，即让分布时滞参数同时出现在带记忆控制的记忆项，及分布时滞记忆项的积分下限中，并让这两种带记忆状态反馈控制项的矩阵增

益相同，这样在推导得到的矩阵不等式中，该矩阵增益就不再为零项，从而表现出比无记忆状态反馈控制要高的可解性。而对于具有“有限时滞最普通的线性系统”特点的分布时滞环节，为能在求导过程中充分体现该环节的特点，需要制定出与以往不同的 Lyapunov-Krasovskii 范函，最后得到的线性矩阵不等式也是与该特性相关的时变的线性矩阵不等式。接着，对于一类含未知分布时滞参数的分布时滞系统，仍用上面所述的两个带记忆状态反馈控制项，但其中的分布滞后常数（包括直接带记忆项的滞后常数、分布记忆项的积分下限中的滞后常数）都由原来确定的分布时滞参数变为其相应于第五章中新型自适应控制的估计项，这是首次在分布时滞的下限中引入对未知分布时滞参数的自适应控制，为在分布时滞参数未知的情况下仍能进行带记忆控制带来了便利。最后通过两个仿真示例验证了本章关于上述两类复杂的分布时滞系统控制方案的有效性。

## 8.2 问题的提出

本章研究如下两类分布时滞系统：

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^l A_i x(t - \tau_i) + \int_{-r}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta + B_1 w(t) + B_2 u(t - d) \quad (8.1)$$

其中  $d > 0$  为输入时滞参数， $\tau_i > 0$ ， $i = 0, \dots, l$  为各状态时滞参数，约定  $\tau_0 = 0$ 。为推导简单起见，我们现只考虑如下只含一个状态时滞的系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \int_{-r}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta + B_1 w(t) + B_2 u(t - \tau_2), & t > 0 \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max\{\tau_1, \tau_2, r\} \end{cases} \quad (8.2)$$

其中  $x(t) \in R^n$  是状态向量， $u(t) \in R^m$  为控制输入向量， $w(t)$  为定义在  $[-r, +\infty) \rightarrow R^n$  上的函数， $z(t) \in R^m$  为系统受控向量， $A$ 、 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $C$ 、 $D$  为具有相应适当维数的矩阵。 $\forall t$ ，矩阵函数  $A(t, \theta)$  在  $\theta$  可积，且存在映射在  $(-\infty, +\infty) \mapsto R$  上的函数  $a(t) > 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  的每个紧集上 Lebesgue 可积，使得下式成立

$$0 \leq \left\| \int_{-r}^0 A(t, \theta) \varphi(\theta) d\theta \right\| \leq a(t) \|\varphi\|, \quad t \in R, \varphi \in C([-r, 0], R^n) \quad (8.3)$$

其中  $\|\varphi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|$ 。

针对系统(8.1)研究的目的是：对于给定的常数  $\gamma > 0$ ，如何设计一个带记忆的状态反馈控制器

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - \tau_1) + K_3 [x(t - r) + \int_{-r}^0 x(t + \theta) d\theta] \quad (8.4)$$

使得系统(8.1)是渐近稳定的，且满足  $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$  (这里  $\|\cdot\|_2$  是  $L_2$  范数)。

另外考虑如下带未知时滞常数的分布时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \int_{-\tau}^0 A_r x(t + \theta) d\theta + Bu(t - \tau_2), & t > 0 \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max(\tau_1, \tau_2, r) \end{cases} \quad (8.5)$$

其中  $x(t) \in R^n$  为状态向量， $u(t) \in R^m$  为控制输入向量， $A$ ,  $A_1$ ,  $A_r$ ,  $B$  为适当维数的矩阵。 $\tau_1 \geq 0$  为状态时滞参数， $\tau_2 \geq 0$  为输入时滞参数，分布时滞参数  $r > 0$  不能精确已知，但已知它的上下界，即已知时滞参数  $r_*$  和  $r^*$  使得  $r_* \leq r \leq r^*$  成立。 $\phi(t) \in C[-\tau, 0]$  为系统初始向量，并能找到  $r$  的接近值  $\bar{r}$ ，及正常数  $\bar{r}_1$  和  $\bar{r}_2$  使得  $0 < r^* - \bar{r} \leq \bar{r}_1$  与  $0 < \bar{r}_2 - r_* \leq \bar{r}_2$ ，

$i=1,2$  成立，一般  $\bar{r}$  可取为  $r_*$  与  $r^*$  的中间值，即有  $\bar{r} = \frac{r^* + r_*}{2}$ 。

针对系统(8.4)研究的目的是：如何设计一个带分布记忆且记忆常数含未知分布时滞参数估计值的状态反馈控制器

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t - \tau_1) + K_3 [x(t - ar(t)) - (\hat{r}(t) - h)^2] + \int_{ar(t) - (\hat{r}(t) - h)}^0 x(t + \theta) d\theta \quad (8.6)$$

其中  $a$ 、 $h$ ，根据未知时滞参数  $r$  及其接近值  $\bar{r}$  按引理 2.5 取值， $\hat{r}(t)$  为  $r$  的实时估计值，且满足  $\hat{r}(t)[2(\hat{r}(t) - h) + a] \leq 0$ ， $\forall t \geq 0$ ，使得系统(8.5)渐近稳定，同时制定对  $r$  的自适应律。

### 8.3 主要结果

#### 8.3.1 对含分布与离散时滞的线性时滞控制系统的 $H^\infty$ 控制——时变 LMI 方法

对于系统(8.2)，我们为得到使系统稳定且满足  $H^\infty$  特性的控制解，要选取适当的针对系统特性的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，以往的研究没有考虑到系统特性(8.3)，因为这样的特性会带来 Lyapunov-Krasovskii 泛函选取的难度，根据(2)和(4)可得闭环系统的状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_2 K_2 x(t - \tau_1 - \tau_2) + B_2 K_3 [x(t - r - \tau_2) + \int_{-\tau}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta] \\ \quad + B_2 K_1 x(t - \tau_2) + \int_{-\tau}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta + B_1 w(t) \\ z(t) = (C + D K_1) x(t) + D K_2 x(t - \tau_1) + D K_3 [x(t - r) + \int_{-\tau}^0 x(t + \theta) d\theta] \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\tau, 0], \tau = \max\{\tau_1 + \tau_2, \tau_2 + r\} \end{cases} \quad (8.7)$$

用[28]中的“descriptor form”，令

$$\begin{cases} y(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + B_2 K_2 x(t - \tau_1 - \tau_2) + B_2 K_3 [x(t - r - \tau_2) + \int_{-\tau}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta] \\ \quad + B_2 K_1 x(t - \tau_2) + \int_{-\tau}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta + B_1 w(t) \\ 0 = -y(t) + B_1 w(t) + (A_0 + A_1 + B_2 K) x(t) - \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^0 y(s) ds + B_2 K_3 \int_{-\tau}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta \\ \quad + \int_{-\tau}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta \end{cases} \quad (8.8)$$

其中  $K = \sum_{i=1}^3 K_i$ ,  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ ,  $\tau_4 = r + \tau_2$ ,  $\bar{A}_i = A_i$ ,  $\bar{A}_i = B_2 K_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, 4$ , 对于系统(8.8),

由于原系统(8.2)的特性(8.3)的影响

$$V(x_i, w_i) = V_1(x_i, w_i) + V_2(x_i, w_i) + V_3(x_i, w_i) \quad (8.9)$$

$$\text{其中 } V_1(x_i, w_i) = x^T P x, \quad V_3(x_i, w_i) = \int_{-\tau_2}^0 x(s)^T S_i x(s) ds,$$

$$\begin{aligned} V_2(x_i, w_i) &= \sum_{i=1}^4 \int_{-\tau_i}^0 \int_{-\theta}^0 y(s)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i y(s) ds d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau_2+\alpha}^{-\tau_2} x(\theta)^T \bar{A}_4^T Q_4^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta d\alpha \\ &\quad + l \int_{-\tau}^0 \int_{-\theta}^0 a^2(t) \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|x(\tau + \theta)\|_2^2 d\tau d\theta \end{aligned}$$

$P$ 、 $Q_i$ 、 $R > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $l > 0$  为正常数。则  $V_i(x_i, w_i)$  沿系统(8.8)的导数为

$$\begin{aligned} V_1(x_i, w_i) &= 2x^T P y(t) \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}x - y + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 y(s) ds + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 K_3 \end{bmatrix} \int_{-\tau}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{-\tau}^0 A(t, \theta) x(t + \theta) d\theta \end{bmatrix} \right\} = 2 \begin{bmatrix} x^T & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{A}x - y + B_1 w \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \eta_i + \rho_1 + \rho_2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

其中  $\bar{A} = A_0 + A_1 + B_2 K = \sum_{i=0}^4 \bar{A}_i$ 。令  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 且  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $E \bar{P}^T = \bar{P} E$ 。

对于  $\eta_i(t) = -2 \int_{-r_i}^t [x^T \ y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \bar{A}_i y(s) ds$ , 由引理引理 2.1 得

$$\eta_i \leq r_i [x^T \ y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i [0 \ I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_{-r_i}^t y^T(s) \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i y(s) ds, i=1, \dots, 4 \quad (8.11)$$

同理

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2[x^T \ y^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_4 \end{bmatrix} \int_{-r_1-r}^{r-r_1} x(\theta) d\theta \\ &\leq r [x^T \ y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_1 [0 \ I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_{-r_1-r}^{r-r_1} x(\theta)^T \bar{A}_4^T R_1^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 2[x^T \ y^T] \bar{P} \int_r^0 \begin{bmatrix} 0 \\ A(t, \theta)x(t+\theta) \end{bmatrix} d\theta \\ &\leq [x^T \ y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_6 [0 \ I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left\| \int_r^0 \sqrt{R_6^{-1}} A(t, \theta)x(t+\theta) d\theta \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (8.13)$$

由(8.2)可知, 对于每一个  $t$ , 分布时滞项  $\int_r^0 A(t, \theta)x(t+\theta) d\theta$  中的  $x(t+\theta)$  都  $\in C[-r, 0]$  即关于  $\theta$  的在  $[-r, 0]$  上的连续函数, 这与(8.3)中的函数  $\varphi(\theta)$  是相符的, 因此由(8.3)可得

$$\rho_2 \leq [x^T \ y^T] \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_6 [0 \ I] \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \alpha^2(t) \lambda_{\max}(R_6^{-1}) \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|x(t+\theta)\|_2^2 \quad (8.14)$$

此外

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x_i, w_i) &= \sum_{i=1}^4 \int_{-r_i}^0 [y(t)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i y(t) - y(t+\theta)^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i y(t+\theta)] d\theta + \\ &\quad + rx(t-\tau_2)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t-\tau_2) - \int_{-r_2-r}^{r-\tau_2} x(\theta)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta + \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$I \int_r^0 [\alpha^2(t) \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|x(t)\|_2^2 - \alpha^2(t) \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|x(t+\theta)\|_2^2] d\theta$$

$$\dot{V}_3(x_i, w_i) = x(t)^T S_i x(t) - x(t-\tau_2)^T S_i x(t-\tau_2) \quad (8.16)$$

取  $R_i = Q_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ ,  $R_6^{-1} = rl \bullet I$  即  $\lambda_{\max}(R_6^{-1}) = rl$ , 由(8.9)-(8.16)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_i, w_i) &= \dot{V}_1(x_i, w_i) + \dot{V}_2(x_i, w_i) + \dot{V}_3(x_i, w_i) \leq [x^T \ y^T \ x(t-\tau_2)^T \ w^T] \Xi_0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ x(t-\tau_2) \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\text{其中 } \Xi_0 = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & P_1 B_1 \\ * & \Sigma_3 & 0 & P_2 B_1 \\ * & * & \Sigma_4 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1 + r l \alpha^2(t) I + \sum_{i=1}^6 \tau_i P_1 R_i P_1^T + S_1,$$

$$\Sigma_2 = P - P_1 + \bar{A}^T P_2 + \sum_{i=1}^6 \tau_i P_1 R_i P_2^T,$$

$$\Sigma_3 = -P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^4 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \sum_{i=1}^6 \tau_i P_2 R_i P_2^T, \quad \Sigma_4 = r \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 - S_1, \quad \tau_5 = r, \quad \tau_6 = 1.$$

为研究系统(8.1)的  $H^\infty$  特性, 令初始值  $\phi(t)=0$ , 则对  $T>0$  及给定的常数  $\gamma>0$ , 有

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \\ &\leq \int_0^T (z^T z - \gamma^2 w^T w + \dot{\tilde{V}}_i(x_i, w_i)) dt = \\ &\int_0^T \{[(C + DK_1)x(t) + DK_2x(t - \tau_1) + DK_3(x(t - r) + \int_{-r}^0 x(t + \theta) d\theta)]^T \\ &[(C + DK_1)x(t) + DK_2x(t - \tau_1) + DK_3(x(t - r) + \int_{-r}^0 x(t + \theta) d\theta)] - \gamma^2 w^T w + \dot{\tilde{V}}_i(x_i, w_i)\} dt \end{aligned} \quad (8.18)$$

其中  $\bar{V} = V + \int_{-r}^0 \int_{t+\theta}^0 x^T(s) S_2 x(s) ds d\theta + \int_{-r_1}^0 x(s)^T S_3 x(s) ds + \int_{-r}^0 x(s)^T S_4 x(s) ds$ , 其中  $\bar{S}$  为正定矩阵, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} &= \dot{V} + \int_{-r}^0 [x^T(t) S_2 x(t) - x^T(t + \theta) S_2 x(t + \theta)] d\theta + x(t)^T (S_3 + S_4) x(t) \\ &- x(t - \tau_1)^T S_3 x(t - \tau_1) - x(t - r)^T S_4 x(t - r) \end{aligned} \quad (8.19)$$

把(8.19)代入(8.18)可得

$$\begin{aligned} J_T &\leq \int_0^T \{[r(C + DK_1)x(t) + rDK_2x(t - \tau_1) + DK_3(rx(t - r) + x(t + \theta))]^T \\ &[r(C + DK_1)x(t) + rDK_2x(t - \tau_1) + DK_3(rx(t - r) + x(t + \theta))] - r\gamma^2 w^T w + \\ &r\dot{V} + x^T(t)(S_2 + rS_3 + rS_4)x(t) - x^T(t + \theta)S_2x(t + \theta) - rx(t - \tau_1)^T S_3 x(t - \tau_1) \\ &- rx(t - r)^T S_4 x(t - r)\} d\theta dt \\ &\leq \int_0^T \int_{-r}^0 \tilde{x}^T(t, \theta) \Xi(t, \theta) \tilde{x}(t, \theta) d\theta dt \end{aligned} \quad (8.20)$$

其中  $\tilde{x}^T(t, \theta) = [x^T \quad y^T \quad x^T(t - \tau_1) \quad x^T(t - \tau_2) \quad x^T(t - r) \quad x^T(t + \theta) \quad w^T]$ , 故当  $\Xi(t)<0$  时可得  $J_T<0$ , 由 Schur 补引理可得  $\Xi(t)<0$  等价于如下矩阵不等式成立:

$$\tilde{\Xi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi} & \tilde{\Xi}_1 & \cdots & \tilde{\Xi}_7 \\ \tilde{\Xi}_1^T & M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_7^T & & & M_7 \end{bmatrix} < 0 \quad (8.21)$$

其中  $\tilde{\Xi}_i^T = [0 \ \bar{A}_i \ 0_1 \ \cdots \ 0_{4+i}]$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $M_i = -(r\tau_i)^{-1}Q_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ ,  $M_6 = -r^{-2}Q_5$ ,

$$M_5 = -(Ia^2(t))^{-1}I, \quad \tilde{\Xi}_5^T = [I \ 0_1 \ \cdots \ 0_{10}], \quad \tilde{\Xi}_6^T = [0 \ 0 \ 0 \ \bar{A}_4 \ 0_1 \ \cdots \ 0_8],$$

$$M_7 = -I, \quad \tilde{\Xi}_7^T = [r(C+DK_1) \ 0 \ rDK_2 \ 0 \ rDK_3 \ DK_3 \ 0_1 \ \cdots \ 0_7],$$

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \cdots & \tilde{\Xi}_{1,7} \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & \cdots & \tilde{\Xi}_{2,7} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \tilde{\Xi}_{7,7} \end{bmatrix}, \text{ 其中}$$

$$\tilde{\Xi}_{11} = rP_1\bar{A} + r\bar{A}^TP_1 + r\sum_{i=1}^6\tau_iP_iR_iP_i^T + rS_1 + S_2 + rS_3 + rS_4,$$

$$\tilde{\Xi}_{12} = rP - rP_1 + r\bar{A}^TP_2 + r\sum_{i=1}^6\tau_iP_iR_iP_i^T, \quad \tilde{\Xi}_{33} = -rS_3, \quad \tilde{\Xi}_{44} = -rS_1, \quad \tilde{\Xi}_{55} = -rS_4, \quad \tilde{\Xi}_{66} = -S_2,$$

$$\tilde{\Xi}_{22} = -rP_2 - rP_2^T + r\sum_{i=1}^6\tau_iP_2R_iP_i^T, \quad \tilde{\Xi}_{7,7} = -r\gamma^2I, \quad \tilde{\Xi}_{1,7} = P_1B_1, \quad \tilde{\Xi}_{2,7} = P_2B_1, \quad \text{其余项为0。由}$$

以上推导可得如下结论：

**定理 8.1** 对于一类含同时分布和离散时滞的输入时滞线性时滞系统(8.2), 如果在  $t \in [-\tau, \infty]$  存在矩阵  $U_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ , 正定矩阵  $X(t)$ ,  $Q_i(t)$ ,  $i=1, \dots, 5$ ,  $\bar{S}_j(t)$ ,  $j=1, \dots, 4$  使得线性矩阵不等式(8.23)成立, 则线性时滞系统(8.2)内部是渐近稳定的, 且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ 。每一时刻的反馈增益矩阵:  $K_i(t) = U_i(t)X(t)^{-1}$ ,  $i=1, 2, 3$ 。

**证明** 可以看出, 由引理 2.4 可知  $w(t)=0$  时(8.21)成立包含了系统内部渐近稳定的解 ( $\Xi_0 < 0$ ), 因此此时线性时滞系统(8.2)内部是渐近稳定的, 且  $H^\infty$  性能指标小于给定的界  $\gamma$ 。对  $\tilde{\Xi} < 0$  两边同乘以矩阵  $\text{diag}(X_1 \cdots X_{14})$ , 其中  $X_1 = P_1^{-1}$ ,  $X_2 = Y = P_2^{-1}$ ,  $X_i = X = P^{-1}$ ,  $i=3, \dots, 6$ ,  $X_j = I$ ,  $j=7, \dots, 14$ 。由于(8.10)中只要求  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ , 而没有其他限制, 又考虑到要兼顾保守性和运算简便, 可借鉴[32]中的方法令  $P_1 = n_1/n_2P$ ,  $P_2 = 1/n_2P$ , 即  $X = n_1/n_2X_1 = 1/n_2Y$ , 其中  $n_1$ 、 $n_2$  为正常数。此外, 注意到  $\tilde{\Xi} < 0$  中对应于  $x(t-\tau_2)$  的项只有关于该向量的二次型项  $r^2\bar{A}_4^TQ_5^{-1}\bar{A}_4 - rS_1$ , 而没有该向量与  $\tilde{x}(t, \theta)$  中其

他向量的交叉项, 为方便求解, 可令  $r^2 \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 - rS_1 \leq 0$ , 即

$$\begin{bmatrix} rS_1 & \bar{A}_4^T \\ \bar{A}_4 & r^{-2} Q_5 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.22)$$

对上式两边同乘以矩阵  $\begin{bmatrix} X & \\ & I \end{bmatrix}$ , 结合以上的分析可得  $\tilde{\Xi} < 0$  等价于如下时变 LMI 组

(中间过程略):

$$\tilde{\Xi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi} & \tilde{\Xi}_1 & \cdots & \tilde{\Xi}_6 \\ \tilde{\Xi}_1^T & \bar{M}_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_6^T & & & \bar{M}_6 \end{bmatrix} < 0 \quad (8.23a)$$

$$\begin{bmatrix} r\bar{S}_1 & U_3^T B_2^T \\ B_2 U_3 & r^{-2} Q_5 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.23b)$$

其中  $\tilde{\Xi}_i^T = [0 \ n_2 A_i X \ 0_1 \ \cdots \ 0_4]$ ,  $\tilde{\Xi}_i^T = [0 \ n_2 B_i U_{i-1} \ 0_1 \ \cdots \ 0_{3+i}]$ ,  $i=2,3,4$ ,

$$\tilde{\Xi}_5^T = [n_2/n_1 X \ 0_1 \ \cdots \ 0_9], \quad \bar{M}_i = M_i, \quad i=1,\dots,5, \quad \bar{M}_6 = -I,$$

$$\tilde{\Xi}_6^T = [n_2/n_1 r(CX + DU_1) \ 0 \ rDU_2 \ rDU_3 \ DU_3 \ 0_1 \ \cdots \ 0_6],$$

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \cdots & \tilde{\Xi}_{1,6} \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & \cdots & \tilde{\Xi}_{2,6} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \tilde{\Xi}_{6,6} \end{bmatrix}, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{11} &= m_2/n_1(A_0 + A_1)X + m_2/n_1 \sum_{i=1}^3 B_2 U_i + m_2/n_1 X(A_0 + A_1)^T + \\ &\quad r m_2/n_1 \sum_{i=1}^3 (B_2 U_i)^T + r \sum_{i=1}^3 \tau_i Q_i + l^{-1} I + (n_2/n_1)^2 [r\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + r\bar{S}_3 + r\bar{S}_4] \end{aligned}$$

$$\tilde{\Xi}_{33} = -r\bar{S}_3, \quad \tilde{\Xi}_{44} = -r\bar{S}_4, \quad \tilde{\Xi}_{55} = -\bar{S}_2,$$

$$\tilde{\Xi}_{12} = m_2/n_1(n_2 - n_1)X + m_2/n_1 X(A_0 + A_1)^T + m_2/n_1 \sum_{i=1}^3 (B_2 U_i)^T + r \sum_{i=1}^3 \tau_i Q_i + l^{-1} I,$$

$$\tilde{\Xi}_{22} = -2n_2 r X + r \sum_{i=1}^5 \tau_i Q_i + l^{-1} I, \quad \tilde{\Xi}_{6,6} = -r\gamma^2 I, \quad \tilde{\Xi}_{1,6} = B_1 = \tilde{\Xi}_{2,6}, \quad \bar{S}_i = X S_i X, \quad i=1,\dots,4,$$

用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱可算得矩阵  $U_i(t)$ , 正定矩阵  $X(t)$ , 即可算得  $K_i(t) = U_i(t)X(t)^{-1}$ ,  $i=1,2,3$ 。  
证毕

**注 8.1** 式(8.22)为时变的 LMI，这是原系统在分布时滞参数上的时变特性(8.2)，(8.3)带来的，在求解时要先求解  $a^2(t)$  的值，再代入(8.23)求解得到满足该时刻的 LMI(8.22)的矩阵  $K_j$ ,  $j=1,2,3$ 。

**注 8.2** 本文为研究一类含分布与离散时滞的线性时滞系统(8.2)提出了一种新的镇定方法及求解  $H^\infty$  问题的方法，与前人结果相比，系统更趋于一般性。以往对于分布时滞的研究对象大多是分布时滞矩阵为常矩阵  $A$ ，或时变矩阵  $A(t)$ ，这均与本文“有限时滞最普通的线性系统”分布时滞部分的复杂性(8.3)仍有一定距离。而且以往的研究所用的反馈控制大多是无记忆控制[114,115]或者无记忆积分控制控制  $K \int_0^t x(\tau) d\tau$  [56]，这不能充分反映分布时滞环节  $\int_r^t A(t, \theta) x(t+\theta) d\theta$ ，而且以往的结论即使用了  $K \int_0^t x(\tau) d\tau$ ，得到的结果却是  $K = 0$  [56]。从[56]中可以看出这是因为加上该项后要求的 LMI 尽管包含  $K$ ，但是其可解性与不包含  $K$  是一样的，而本文通过带记忆状态反馈控制器(8.4)，让反映分布时滞的最大时滞常数  $r$  的记忆项  $x(t-r)$  与分布时滞记忆项  $\int_r^t x(t+\theta) d\theta$  的反馈矩阵都为  $K_3$ ，这样我们从(8.21)和(8.23)均能看出，如果不加这两个记忆项，则当这样的不等式有解时，相应的加了这两个记忆项的不等式一定有解（只要令  $K_3 = 0$ ），反之却不一定成立。因此，本文的可解性要比以往的结论要好。

**注 8.3** 尽管由注 8.2 可知，加了带记忆项的控制器比无记忆控制器的可解性要好，但是如果带记忆控制器中没有分布时滞记忆项即控制器(8.4)变为

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 x(t-\tau_1) + K_3 x(t-r)$$

那么经过和定理 8.1 类似的推导，可知最后要求解的线性矩阵不等式中没有有关  $Q_3$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  的项，而体现  $H^\infty$  特性的(8.23)中的  $DU_3$  只有对应  $x(t-r)$  的位置才有（对应  $x(t+\theta)$  的位置没有了），因此无法直接判断这样求解的可解性是否要比带了分布时滞记忆项的控制器(8.4)要好。在具体实践中，应该通过具体计算比较这两种带了分布时滞参数的控制器到底哪一种能使  $H^\infty$  特性常数  $\gamma$  较小。

### 8.3.2 含未知分布时滞参数的分布时滞系统对时滞参数的自适应控制

由于  $a$ 、 $h$ ，根据未知时滞参数  $r$  及其接近值  $\bar{r}$  按引理 2.5 取值，由(8.5)和(8.6)，及引理 2.5 中的(2.22)可得闭环系统如下

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \int_{-\tau_1}^0 A_r x(t + \theta) d\theta + B[K_1 x(t - \tau_2) + K_2 x(t - \tau_1 - \tau_2) \\ \quad + K_3 x(t - \tau_2 - ar(t - \tau_2) - (\hat{r}(t - \tau_2) - h)^2) + K_3 \int_{ar(t - \tau_2) - (\hat{r}(t - \tau_2) - h)^2}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta] \\ x(t) = \phi(t), \forall t \in [-\bar{\tau}, 0], \bar{\tau} = \max(\tau_1, \tilde{\tau}_1^2 + 2r'(\sqrt{\tilde{r}} + \tilde{r}^2) - \tilde{r}) + \tau_2 \end{cases} \quad (8.24)$$

使用[28]中的“descriptor form”，并令  $\dot{x}(t) = y(t) + z(t)$ ，其中

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + \int_{-\tau_1}^0 A_r x(t + \theta) d\theta, \\ z(t) &= B[K_1 x(t - \tau_2) + K_2 x(t - \tau_1 - \tau_2) + K_3 x(t - \tau_2 - ar(t - \tau_2) - (\hat{r}(t - \tau_2) - h)^2) \\ &\quad + K_3 \int_{ar(t - \tau_2) - (\hat{r}(t - \tau_2) - h)^2}^0 x(t - \tau_2 + \theta) d\theta] \end{aligned} \quad (8.25a)$$

即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = y(t) + z(t) &= (A_0 + A_1 + BK_1 + BK_2 + BK_3)x(t) - \sum_{i=1}^4 \bar{A}_i \int_{-\tau_i}^{0} (y(s) + z(s)) ds \\ &\quad + \bar{A}_4 \int_{-\tau_4(t)}^{-\tau_1} x(\theta) d\theta + \int_{-\tau_1}^0 A_r x(t + \theta) d\theta \end{aligned} \quad (8.25b)$$

其中  $\bar{A}_1 = A_1$ ,  $\bar{A}_{i+1} = BK_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\tau_4(t) = \tau_2 + ar(t - \tau_2) + (\hat{r}(t - \tau_2) - h)^2$ ,  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ .

对于系统(8.25b)，取 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x_i) = V_1(t) + V_2(x_i) + V_3(x_i) + \frac{l}{2} [2(\hat{r}(t - \tau_2) - h) + a]^2 \quad (8.26)$$

其中  $V_1(t) = x^T P x$ ,  $V_3(x_i) = \int_{-\tau_1}^0 x(s)^T \tilde{S} x(s) ds$ ,

$$\begin{aligned} V_2(x_i) &= \sum_{i=1}^4 \int_{-\tau_i}^0 \int_{-\theta}^0 (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds d\theta + \\ &\quad \int_{-\tau_4(t) + \tau_1}^0 \int_{-\tau_1 + \alpha}^{-\tau_2} x(\theta)^T \bar{A}_4^T Q_3^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta d\alpha + \int_{-\tau_1}^0 \int_{-\theta}^0 x(\alpha + \theta)^T A_r^T Q_6^{-1} A_r x(\alpha + \theta) d\alpha d\theta \end{aligned}$$

$P$ ,  $Q_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $\tilde{S} > 0$  为待定正定矩阵,  $l$  为正常数,  $V_1(x_i)$  沿系统(8.25a)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2x^T P(y + z) \\ &= 2[x^T (y + z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2[x^T (y + z)^T] \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} y + z \\ \bar{A}x - y - z \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ BK_3 \end{bmatrix} \int_{-\tau_1 - \tau_4(t)}^{-\tau_1} x(\theta) d\theta + \int_{-\tau_1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ A_r \end{bmatrix} x(t + \theta) d\theta \right\} \end{aligned}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y+z \\ \bar{A}x - y - z \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^4 \eta_i + \rho_1 + \rho_2 \quad (8.27)$$

其中  $\bar{A} = A_0 + A_1 + B(K_1 + K_2 + K_3)$ ,  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ , 且  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$ ,

$$\begin{aligned} \eta_i &= 2 \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_i \end{bmatrix} \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s)) ds, \\ \rho_1 &= 2 \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_4 \end{bmatrix} \int_{-\tau_4(t)}^{0} x(\theta) d\theta, \\ \rho_2 &= 2 \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \int_r^0 \begin{bmatrix} 0 \\ A_r \end{bmatrix} x(t+\theta) d\theta. \end{aligned}$$

由引理 2.1 可得

$$\eta_i \leq \tau_i \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T R_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds \quad (8.28)$$

$$\rho_1 \leq (\tau_4(t) - \tau_2) \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_5 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \int_{-\tau_4(t)}^{0} x(\theta)^T \bar{A}_4^T R_5^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta \quad (8.29)$$

$$\rho_2 \leq r \begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_6 \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} + \int_r^0 x(t+\theta)^T A_r^T R_6^{-1} A_r x(t+\theta) d\theta \quad (8.30)$$

注意到

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x^T & (y+z)^T \end{bmatrix} \bar{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{P}^T \begin{bmatrix} x \\ y+z \end{bmatrix} \\ &= x^T P_i R_i P_i^T x + 2x^T P_i R_i P_i^T (y+z) + (y+z)^T P_i R_i P_i^T (y+z), \quad i=4,5 \\ &= x^T P_i R_i P_i^T x + 2x^T P_i R_i P_i^T (y+z) + 2z^T P_2 R_2 P_2^T y + y^T P_2 R_2 P_2^T y + z^T P_2 R_2 P_2^T z \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\tau_4(t) = \tau_2 + \hat{a}r(t-\tau_2) + (\hat{r}(t-\tau_2) - h)^2 = \frac{1}{4}\{[2(\hat{r}(t-\tau_2) - h) + a]^2 - a^2 + 4ha\} + \tau_2 \quad (8.32)$$

且

$$\begin{aligned} &\frac{d \left( \int_{-\tau_4(t)}^0 \int_{t+\theta}^0 \dot{x}(s)^T \bar{A}_4^T Q_4^{-1} \bar{A}_4 \dot{x}(s) ds d\theta \right)}{dt} = \\ &\dot{\tau}_4(t) \int_{-\tau_4(t)}^0 \dot{x}(s)^T \bar{A}_4^T Q_4^{-1} \bar{A}_4 \dot{x}(s) ds + \int_{-\tau_4(t)}^0 [\dot{x}(t)^T \bar{A}_4^T Q_4^{-1} \bar{A}_4 \dot{x}(t) - \dot{x}(t+\theta)^T \bar{A}_4^T Q_4^{-1} \bar{A}_4 \dot{x}(t+\theta)] d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d \left( \int_{-\tau_4(t)+\tau_2}^0 \int_{-\tau_2+\theta}^{-\tau_2} x(s)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(s) ds d\theta \right)}{dt} = \\
 & \dot{\tau}_4(t) \int_{-\tau_4(t)}^{-\tau_2} x(s)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(s) ds + \int_{-\tau_4(t)+\tau_2}^0 [x(t-\tau_2)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t-\tau_2) \\
 & - x(t-\tau_2+\theta)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t-\tau_2+\theta)] d\theta \\
 \text{而} \quad & \dot{\tau}_4(t) = \frac{d \left( \tau_2 + ar(t-\tau_2) + (\hat{r}(t-\tau_2) - h)^2 \right)}{dt} \\
 & = ar(t-\tau_2) + 2(\hat{r}(t-\tau_2) - h)\hat{r}(t-\tau_2) = \hat{r}(t-\tau_2)[a + 2(\hat{r}(t-\tau_2) - h)] \leq 0
 \end{aligned}$$

由于  $\hat{r}_1(t)$  变化的方向与  $[2(\hat{r}_1(t) - h_1) + a_1]$  的符号相反，也即  $\hat{r}_1(t-\tau_2)$  变化的方向与  $[a_1 + 2(\hat{r}_1(t-\tau_2) - h_1)]$  的符号相反，因此

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(x_i) & \leq \sum_{i=1}^4 [\tau_i(y(t) + z(t))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(t) + z(t)) - \int_{-\tau_i}^0 (y(s) + z(s))^T \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i (y(s) + z(s)) ds] \\
 & + (\tau_4(t) - \tau_2)x(t-\tau_2)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t-\tau_2) - \int_{-\tau_4(t)}^{-\tau_2} x(\theta)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(\theta) d\theta + \\
 & rx(t)^T A_r^T Q_6^{-1} A_r x(t) - \int_{-r}^0 x(t+\theta)^T A_r^T Q_6^{-1} A_r x(t+\theta) d\theta
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

此外

$$\dot{V}_3(x_i) = x(t)^T \tilde{S}x(t) - x(t-\tau_2)^T \tilde{S}x(t-\tau_2) \tag{8.34}$$

取  $R_i = Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ,  $\frac{1}{4}(4ha - a^2) \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 \leq \tilde{S}$ , 由引理 2.5 及(8.26)-(8.34)可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_i) & \leq \tilde{x}^T(t)^T \Xi_0 \tilde{x}(t) + [a + 2(\hat{r}(t-\tau_2) - h)] \{ \hat{r}(t-\tau_2) + \\
 & \frac{1}{4}[a + 2(\hat{r}(t-\tau_2) - h)][z^T P_2(R_4 + R_3)P_2^T z + x(t-\tau_2)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t-\tau_2)] \}
 \end{aligned} \tag{8.35a}$$

$$S' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -\tilde{S} & \bar{A}_4^T \\ \bar{A}_4 & -[\frac{1}{4}(4ha - a^2)]^{-1} Q_5 \end{bmatrix} \leq 0 \tag{8.35b}$$

其中

$$\tilde{x}(t)^T = [x^T \quad y^T \quad z^T], \quad \Xi_0 = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} \\ * & * & \Xi_{33} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{11} = P_1 \bar{A} + \bar{A}^T P_1^T + \sum_{i=1}^6 \tau_i P_i Q_i P_i^T + r A_r^T Q_6^{-1} A_r + \tilde{S}, \quad \Xi_{12} = P - P_1 + \bar{A}^T P_2^T + \sum_{i=1}^6 \tau_i P_i Q_i P_2^T = \Xi_{13},$$

$$\tau_5 = \tau_4(t) - \tau_2, \quad \tau_6 = r, \quad \Xi_{23} = \sum_{i=1}^6 \tau_i P_i Q_i P_2^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^6 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i = \Xi_{22},$$

$$\Xi_{33} = \sum_{i=1}^3 \tau_i P_2 Q_i P_2^T + \tau_6 P_2 Q_6 P_2^T - P_2 - P_2^T + \sum_{i=1}^4 \tau_i \bar{A}_i^T Q_i^{-1} \bar{A}_i + \frac{1}{4} (4ha - a^2) P_2 (Q_4 + Q_5) P_2^T \\ + \tau_2 P_2 Q_4 P_2^T$$

由上述推导可得如下结论:

**定理 8.2** 对于含未知分布时滞参数  $r$  的分布时滞线性时滞系统(8.5), 如存在正定矩阵  $X$ ,  $Q_i$ ,  $i=1, \dots, 6$ ,  $\bar{S}$ , 矩阵  $U_j$ ,  $j=1, 2, 3$ , 使得线性矩阵不等式(8.37)成立, 可取形如(8.6)的带记忆的状态反馈控制器(其中的参数  $a$ 、 $h$ , 根据未知时滞参数  $r$  及其接近值  $\bar{r}$  按引理 2.5 取值), 且对  $r$  的自适应律可取为式(8.36)。反馈增益矩阵为:  $K_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1, 2, 3$ 。这时整个闭环系统(8.5)的解是渐近稳定的。并且当  $\hat{r}(t)$  趋于稳定时, 带记忆状态反馈控制(8.6)中以  $K_3$  为系数的带记忆项的时滞常数、带记忆的分布时滞项的时滞常数与  $r$  的差值在有限范围内。

**证明** 根据以上推导我们可以看出, 若  $\Xi_0 < 0$  成立且对  $r$  的自适应律取为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}(t - \tau_2) &= -\frac{1}{4l} [a + 2(\hat{r}(t - \tau_2) - h)] [z^T P_2 (R_4 + R_5) P_2^T z, \text{ 即} \\ &\quad + x(t - \tau_2)^T \bar{A}_4^T Q_5^{-1} \bar{A}_4 x(t - \tau_2)] \\ \dot{\hat{r}}(t) &= -\frac{1}{4l} [a + 2(\hat{r}(t) - h)] [z(t + \tau_2)^T P_2 (Q_4 + Q_5) P_2^T z(t + \tau_2) \\ &\quad + x(t)^T (BK_3)^T Q_5^{-1} BK_3 x(t)] \end{aligned} \quad (8.36)$$

且当  $\tilde{S}' \triangleq \Xi_0 < 0$  及  $S' \leq 0$  时系统是渐近稳定的。显然  $\forall r$ ,  $r \leq r^*$  有  $\tilde{S}'(r) \leq \tilde{S}'(r^*)$ , 因此令  $\Xi \triangleq \tilde{S}'(r^*)$ , 则  $\Xi < 0$  且  $S' \leq 0$  成立时有  $\dot{V}(x_t) < 0$ , 这时时滞系统(8.5)是渐近稳定的。对  $\Xi < 0$  两边同乘以矩阵  $diag(X_1, X_2, X_3)$ , 其中  $X_1 = P_1^{-1} = X$ ,  $X_2 = X_3 = P_2^{-1}$ 。由于(8.27)中只要求  $P_1$ 、 $P_2$  满足  $E\bar{P}^T = \bar{P}E$  即可, 考虑到计算简便和不影响保守性, 可令  $P_1 = n_1/n_2 P$ ,  $P_2 = 1/n_2 P$ , 把引理 2.5 中的  $h = \sqrt{\bar{r} + \bar{r}^2}$ , 代入  $a = 2(\sqrt{\bar{r} + \bar{r}^2} - \bar{r})$  并由引理 2.4 可得  $\Xi < 0$  等价于如下不等式:

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi} & \tilde{\Xi}_1 & \cdots & \tilde{\Xi}_5 \\ \tilde{\Xi}_1^T & M_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Xi}_5^T & & & M_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (8.37a)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{S} & U_3^T B^T \\ BU_3 & -\frac{1}{4}(4ha-a^2)+\tau_2 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (8.37b)$$

其中  $\tilde{\Xi}_i^T = [0 \ n_2 A_i X \ n_2 A_i X]$ ,  $\tilde{\Xi}_{i+1}^T = [0 \ n_2 B_2 U_i \ n_2 B_2 U_i \ 0_1 \ \cdots \ 0_{n_1}]$ ,  $i=1,2,3$ ,

$$X = P^{-1}, \ M_i = -(\tau_i)^{-1} Q_i, \ i=1,2,3, \ M_4 = -(\tau_4^*)^{-1} Q_4, \ M_5 = -(r^*)^{-1} Q_5,$$

$$\tilde{\Xi}_i^T = [n_2/n_1 A_i X \ 0_1 \ \cdots \ 0_1], \ U_j = K_j X, \ j=1,2, \ \tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \tilde{\Xi}_{13} \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & \tilde{\Xi}_{23} \\ * & * & \tilde{\Xi}_{33} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Xi}_{11} = \frac{n_2}{n_1} (A_0 + A_1) X + \frac{n_2}{n_1} \sum_{i=1}^3 B_2 U_i + \frac{n_2}{n_1} X (A_0 + A_1)^T + \frac{n_2}{n_1} \sum_{i=1}^3 (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^6 \tau_i^* Q_i + (\frac{n_2}{n_1})^2 \bar{S},$$

$$\tilde{\Xi}_{12} = n_2/n_1 (n_2 - n_1) X + n_2/n_1 X (A_0 + A_1)^T + n_2/n_1 \sum_{i=1}^3 (B_2 U_i)^T + \sum_{i=1}^6 \tau_i^* Q_i = \tilde{\Xi}_{13},$$

$$\tilde{\Xi}_{23} = \sum_{i=1}^6 \tau_i^* Q_i - 2n_2 X = \tilde{\Xi}_{22}, \ \tilde{\Xi}_{33} = \sum_{i=1}^3 \tau_i^* Q_i - 2n_2 X + (\bar{r} + \tau_2) Q_4 + \bar{r} Q_5 + r^* Q_6, \ \bar{S} = X \bar{S} X.$$

用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱可算得矩阵  $U_i$ ,  $i=1,2,3$ , 正定矩阵  $X$ ,  $Q_4$ , 即可算得  $K_i = U_i X^{-1}$ ,  $i=1,2,3$ 。由于  $a$ ,  $h$  按引理 2.5 取值, 由引理 2.5 可知, 当  $\hat{r}(t)$  趋于稳定时, 带记忆状态反馈控制(8.5)中以  $K_i$  为系数的带记忆项的时滞常数、带记忆的分布时滞项的时滞常数  $\tilde{\tau} \triangleq \hat{a}\hat{r}(\infty) + (\hat{r}(\infty) - h)^2 \rightarrow \bar{r}$ , 即

$$0 \leq |\tilde{r} - r| = |\bar{r} - r| \leq \max(|\bar{r} - r^*|, |\bar{r} - r_*|) = \max(\bar{r}_1, \bar{r}_2). \quad \text{证毕}$$

注 8.4 与注 5.3 同理, 由于  $\tau_4(t) = \hat{a}\hat{r}(t-\tau_2) + (\hat{r}(t-\tau_2) - h)^2$ , 因此对于  $\hat{r}(t-\tau_2) \in [\bar{r}_*, \bar{r}^*]$ ,

$$\frac{d\tau_4(\hat{r}(t-\tau_2))}{d(\hat{r}(t-\tau_2))} = 2\hat{r}(t-\tau_2) - 2h + a = 0, \text{ 因此 } \hat{r}(t-\tau_2) = \frac{2h-a}{2} \text{ 时 } \tau_4(t) \text{ 取得极值点, 而}$$

$$\tau_4''(\frac{2h-a}{2}) = 2 > 0, \text{ 因此 } \hat{r}(t-\tau_2) = \frac{2h-a}{2} = \bar{r} \text{ 是 } \tau_4(t) \text{ 的最小值点, 因此}$$

$\tau_4^* = \max\{\tau_4(\hat{r}(t-\tau_2) = r^*), \tau_4(\hat{r}(t-\tau_2) = r_*)\}$ 。如果  $\bar{r}$  选取的是  $r^*$  和  $r_*$  的中间值, 由函数的对称性可知

$$\tau_4^* = \tau_4(\hat{r}(t-\tau_2) = r^*) = \tau_4(\hat{r}(t-\tau_2) = r_*), \text{ 且 } \tau_5^* = \tau_4^* - \tau_2.$$

注 8.5 由(8.25)可见,  $\dot{x}$  被分成  $x(t-\tau_2)$  之后的项  $y$  及  $x(t-\tau_2)$  之前的项  $z$  两部分, 因此(8.36)

中的 $z(t+\tau_2)$ 并不违反系统的因果性，(8.36)是可以实现的。

**注 8.6** 与 5.3.2 小节同理，本节实现的对未知分布时滞参数的自适应控制不需要对时滞参数估计值进行必须大于其真实值的限制，而且带记忆控制能一直反映未知时滞参数，特别是带记忆的分布时滞状态反馈控制  $K_3 \int_{\theta=r(t)-\hat{r}(t)-h}^0 x(t+\theta) d\theta$  也能一直反映未知分布时滞参数，充分体现了分布时滞系统的特点，因此在分布时滞参数未知的情况下进行带记忆控制带来了方便。

## 8.4 仿真示例

**例 1** 考虑与(8.1)相符的时滞系统，其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.85 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.85 \end{bmatrix},$$

$B_1^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ ,  $B_2^T = [0 \ 5 \ 0 \ 0]$ ,  $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ,  $D = 1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ ,  $\tau_2 = 0.008$ ,  $r = 1$ , 在某一时刻  $t \in [-r, \infty]$  对于(8.3)中的  $a(t) = 0.0201$ ,  $\gamma = 0.46$ , 把这些数据代入(8.23), 令  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0.1$  按小间隔变化(0.01)直到该时刻的 LMI(8.23)有可行解

$$K_1 = U_1 X^{-1} = [-0.1156 \ -0.5625 \ 0.4739 \ 0.7844],$$

$$K_2 = U_2 X^{-1} = 1.0e-003 * [-0.0362 \ -0.3002 \ 0.1165 \ 0.1558],$$

$K_3 = U_3 X^{-1} = 1.0e-004 * [-0.0115 \ -0.1922 \ 0.0107 \ -0.1534]$ 。如果控制器中没有反映分布时滞的记忆项  $K_3[x(t-r) + \int_{-r}^0 x(t+\theta) d\theta]$ , 则当  $\gamma = 0.47$  时才能有解。

**例 2** 考虑与(8.1)相符的时滞系统，其中  $A_0 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ -0.5556 & 0 & -0.5556 & 0.5556 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$A_1 = A_r = \begin{bmatrix} -0.85 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.85 \end{bmatrix}, \quad B^T = [0 \ 5 \ 0 \ 0]。已知时滞参数 \tau_1 = 0.1,$$

$\tau_2=0.008$ , 分布时滞参数  $r$  未知,  $r^*=1.2$ ,  $r_c=0.8$ , 取  $r$  的接近值为  $\bar{r}=\frac{r^*+r_c}{2}=1$ . 而

根据引理 2.5 取  $h=\sqrt{\bar{r}+\bar{r}^2}=1.414$ , 代入  $a=2(\sqrt{\bar{r}+\bar{r}^2}-\bar{r})=0.828$ . 把这些数据代入 LMI(8.37), 令  $n_1=1$ ,  $n_2=0.1$  按小间隔变化 (0.01) 直到 LMI(8.37) 有可行解为:

$$X = \begin{bmatrix} 0.0328 & -0.0059 & -0.0018 & 0.0315 \\ -0.0059 & 0.0370 & 0.0064 & -0.0229 \\ -0.0018 & 0.0064 & 0.0032 & -0.0042 \\ 0.0315 & -0.0229 & -0.0042 & 0.0407 \end{bmatrix}, U_1 = [0.0312 \ -0.0318 \ -0.0045 \ 0.0439],$$

$$U_2 = 1.0e-003 * [0.4648 \ -0.4776 \ -0.0676 \ 0.6566],$$

$$U_3 = 1.0e-005 * [0.0819 \ -0.6863 \ -0.1251 \ 0.3896],$$

$$Q_4 = Q_5 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0030 & 0.0005 & -0.0012 \\ 0.0000 & 0.0005 & 0.0002 & -0.0002 \\ 0.0001 & -0.0012 & -0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}。这样，可得$$

$$K_1 = U_1 X^{-1} = [0.4061 \ -0.6115 \ 0.6988 \ 0.4917],$$

$$K_2 = U_2 X^{-1} = [0.0059 \ -0.0091 \ 0.0102 \ 0.0075],$$

$K_3 = U_3 X^{-1} = 1.0e-003 * [0.0263 \ -0.2024 \ -0.0243 \ -0.0409]$ . 取初值  $\hat{r}(0)=0.85$ , 初始函

$$\text{数为 } \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \\ \phi_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin(4\pi-\bar{r})/\bar{r} \\ 2\sin(4\pi-\bar{r})/\bar{r} \\ -3\sin(4\pi-\bar{r})/\bar{r} \\ -3\sin(4\pi-\bar{r})/\bar{r} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \bar{r} = \max(\tau_1, \bar{r}_1^2 + 2r^*(\sqrt{\bar{r}+\bar{r}^2}-\bar{r})) + \tau_2 = 2.035, \text{ 仿}$$

真过程中经过调整得到  $l=0.04$ , 所得系统状态  $x(t)$  和参数估计  $\hat{r}(t)$  分别见图 8.1(a)、(b)。

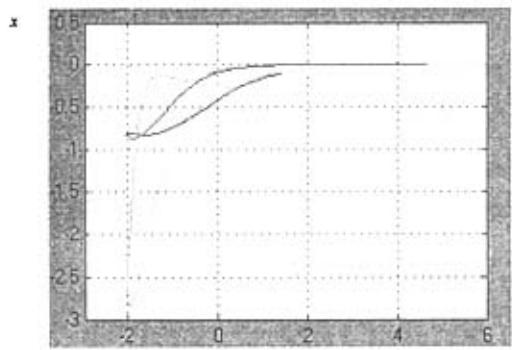


图 8.1(a) 系统状态

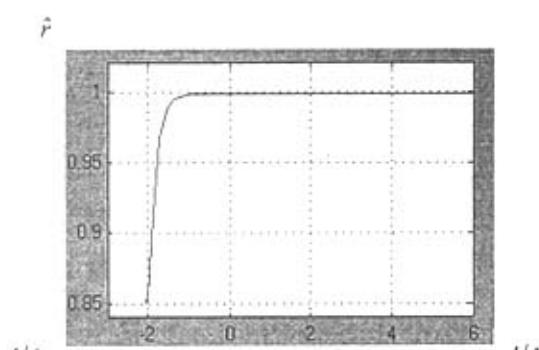


图 8.1(b) 未知时滞参数估计

Fig.8.1 (a) state vector of the system      Fig.8.1(b) estimate value for the unknown delay parameter  
从图中可以看出, 在带分布时滞的记忆控制器作用下, 即使分布时滞参数未知, 在分布

时滞记忆项的积分下限引入对分布时滞参数的估计值，仍能实现较好的自适应控制。

## 8.5 本章小结

本章对同时带离散时滞和分布时滞的系统进行了  $H^\infty$  控制和自适应控制，在分布时滞参数已知的情况下，不仅让系统的分布时滞部分更一般化（泛函也为在求导后充分利用分布时滞部分的特点而进行了针对性的选取），而且通过让反映分布时滞的最大时滞常数的记忆项与分布时滞记忆项的反馈矩阵相同，这样最后求得的带记忆分布时滞状态反馈控制阵不为零，让系统分布时滟能反映在控制中比以往的无记忆反馈控制保守性要小；在分布时滞参数未知的情况下，继续使用该种带记忆反馈控制，只是记忆常数不管是直接的带记忆状态反馈控制的滞后常数，还是分布时滞带记忆的状态反馈控制的积分下界，都采用第五章中的经过改进的新型自适应控制的形式，泛函的选取对于该种控制也具有针对性。最后的控制矩阵均能通过求解一个线性矩阵不等式组获得，这就使得在时滞常数无论已知、未知的情况下均能采用反映系统分布时滞特点的带记忆控制带来了方便。

本章的部分结果已整理成文章并投至《系统工程理论与实践》，还有部分结果已整理成文章投至“Time-Delay Systems” Special Issue of Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms

## 第九章 总结与展望

### 9.1 全文总结

本文主要研究时滞系统的  $H^\infty$  控制与自适应控制，主要有如下创新点：

- ① 对在使用基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，及徐胜元的不需要放大任何交叉项的泛函方法的基础上求解时滞稳定界、控制矩阵的各种算法进行了保守性、实时性的比较，对有问题的算法进行了改进，对可行性进行了分析，最后得到各种具体情况下该如何选择适当算法以使得保守性、实时性的组合达到期望值。在后面的内容中，主要使用一般情况下较简便的算法来解决时滞系统对未知时滞参数的自适应控制。
- ② 对以往的自适应控制进行了三步改进：采用基于“descriptor form”的 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，并通过选择适当的放大形式体取出以未知时滞参数与估计值之差为系数的二次型，消除了以往自适应控制中为得到适当形式的自适应律而附加的不等式放大，并应用在线性时滞系统及含与时滞相关的非线性环节的多时滞系统中；第二步改进是通过一种新型的带记忆反馈控制，使得对时滞参数的自适应律能与其当前值和该时滞参数的一接近值之差成反方向变化，从而实现了新型自适应控制——只要时滞参数估计值落在其上下界之间，最终总能趋于该时滞参数的接近值，突破了以往自适应控制必须限制估计值大于其真实值的保守性，也不用计算为使该限制在整个控制过程中始终保持而需要事先估计的很难计算的“调整常数”；在此基础上进行了第三步改进——分析该种新型自适应控制方法的利弊，通过增加两个可以确定的参数使带记忆控制始终能反映未知时滞参数，实现了带记忆的新型自适应控制。
- ③ 研究了一类较复杂的非线性时滞系统——不仅输入时滞参数未知，而且非线性环节的范数上界与各时滞状态范数相关的系数未知，要同时对这两种未知参数进行新型自适应  $H^\infty$  控制，除了在带记忆控制的滞后常数中实现对未知时滞参数的新型自适应  $H^\infty$  控制，还在带记忆控制的控制矩阵中实现对非线性环节上界的新型自适应  $H^\infty$  控制，不仅把新型自适应控制从对时滞参数拓展到了对其他参数组成的向量，而且为该类较为一般的非线性时滞系统在两种参数未知的情况下实现带记忆控制提供了方便。
- ④ 在状态不可测的情况下对时滞系统进行了基于观测器的新型自适应控制，不仅无需

计算以往结论中需要事先确定的观测器状态误差的范数等未知常数，而且分析了分离性原理在计算控制器、观测器矩阵过程中的局限性，弃用前几章使用的较为简便的算法，选用一种 cone 补线性化算法从而避免了原算法需要调整多对参数的困难，同时在观测器中使用带记忆的输出反馈控制，闭环系统的结构也更加简单。

⑤ 研究了另一类复杂的时滞系统——分布时滞系统，在分布时滞环节满足“最一般时滞系统”特点的情况下进行  $H^\infty$  控制，针对以往结论中只能进行无记忆分布时滞控制的缺点，采用直接带记忆控制与分布时滞带记忆控制的控制矩阵相同的方法，实现了能体现分布时滞系统特点的带记忆控制；在分布时滞参数未知的情况下，仍采用该中带记忆控制，而且其中的未知滞后常数部分无论是直接带记忆控制还是分布时滞带记忆控制都使用之前提出的新型自适应控制形式，为在分布时滞参数未知情况下仍能进行自适应控制带来便利。

以上的研究内容最终的控制矩阵都是通过求解线性矩阵不等式来获取，均可以使用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱。本文对主要的设计方案进行了仿真研究，仿真结果表明，本文所提出的关于时滞参数的新型自适应控制方案以及关于复杂时滞系统（非线性时滞系统、分布时滞系统、状态不可测的时滞系统）的  $H^\infty$  控制方案、自适应控制方案均可以获得良好的控制效果。

## 9.2 尚需进一步解决的问题

尽管我们研究解决了一些时滞系统特别是时滞参数未知情况下的自适应控制问题，但我认为仍有一些不足之处以及有待于解决的新问题值得研究：

① 本文所研究的新型自适应控制需要知道未知时滞参数的上下界，或者与该时滞参数较为接近的值，否则无法实现该种自适应律，如果第三个参数与前两个参数中至少一个参数同时未知时，该如何实现对未知时滞参数的自适应控制，此时是否需要引入自适应辨识，如果解决了该问题即能在镇定系统的同时最终得到时滞参数的值，具有很高的理论、实用价值。

② 本文研究的时滞系统中的各系统矩阵均为确定的常数矩阵，如果系统矩阵为不确定矩阵，除了很多研究中的不确定形式，还存在与未知时滞参数的不确定部分，此时该如何进行自适应控制，是一个相当困难的问题，如果解决了将使得研究对象更一般化。

③ 本文所研究的  $H^\infty$  控制中定义的控制输出  $y$  均为系统状态  $x$ 、控制输入  $u$  的线性组

合形式，在较为复杂的工程背景下（特别是对于非线性、随机时滞系统）， $y$  与  $x$ 、 $u$  的关系是否可以采取为非线性控制的形式，如果出现该种情况该如何解决，这对实际应用有很大的意义。

④本文研究的时滞参数均为常时滞参数，如果时滞参数为时变参数，该如何进行  $H^\infty$  控制及该时滞参数未知情况下的自适应控制，如果该时变时滞参数可用一定的状态方程来描述，又该如何解决，这又使研究对象趋于一般化，对实践有着重大意义。

⑤本文研究的均为连续状态下的时滞系统，对于用离散状态方程描述的时滞系统，本文的相关结论又该怎样，因为在实际应用中，离散控制比连续控制更方便实用，如果解决了这类问题，将具有很高的实用价值。

⑥本文所给出的设计条件都仅是充分的，能否找到控制器存在的充要条件，这将是一个全新而有意义的问题。

除此之外，还有诸如关于时滞系统的鲁棒控制、优化控制，以及所有这些控制在实践中的应用（如网络控制），都需要我们去不断研究和完善。

## 致 谢

本论文是在导师费树岷教授的悉心指导下完成的。从论文的选题到撰写的每一步工作都倾注了导师的汗水与心血。近三年来，导师在学术研究中所表现出的那种精辟的见解、深刻地分析、思想的严谨、渊博的知识背景、把握全局的高超技术、系统而严密的构思、勇于创新的精神深深感染着学生，对学生工作、学习、生活等方面所给予的无微不至的关怀与严格的要求，以及以身作则、为人师表的人格魅力，学生将终身难忘。导师那种学术上与事业上孜孜不倦、永不停息的进取精神定将激励我在今后的科研中不断取得更好的成绩。藉此论文完成之际，学生谨以崇高的心情向导师费树岷教授致以最诚挚的谢意！

作者同时感谢刘怀博士后、张玉民博士后、孙长银博士后、沈捷博士、邵汉勇博士、翟军勇博士、龙飞博士、周颖博士、郑敏博士、付主木博士、丛屾博士、邓丽博士、李涛博士以及实验室的其他同学，本文写作期间，在他们的帮助与讨论中，得到不少启发，受益匪浅。

在东大求学期间，作者还得到了冯纯伯院士、张侃健教授、郭雷教授、叶桦教授、宋文忠教授、戴先中教授、达飞鹏教授、沈英老师、朱蔚萍老师，以及系所其他老师、同学多方面的关心与帮助，在此由衷地感谢！

特别感谢这些年来一直默默关心我、支持我的父母、爱人全家以及爱人，尤其是爱人罗骏硕士毕业工作后一直鼓励我好好读博士，在经济上、精神上都给予我极大的支持，没有他们无私奉献，本文是难以完成的！

谨以此文献给所有关心、支持和帮助过我的朋友！

## 参考文献

- [1] Volterra V.. Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1913
- [2] Volterra V.. Theory of Functionals and Integral and Integro-Differential Equations[M]. New York: Dover, 1959
- [3] Volterra V.. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires[J]. F. Math. Paris, 1928, Vol. 7, fasc. III, 249-298
- [4] Krasovskii N. N.. Certain Problems in the Theory of Stability of Motion[M], Moscow, 1959; English translation: Stability of Motion, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1963
- [5] Jack Hale. Theory of Functional differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, c1977.
- [6] Bellman R., Cooke K. L. Differential-Differential Equations[M]. Academic Press, 1963
- [7] Bellman R.. A survey of the theory of the boundness stability and asymptotic behavior of solutions of linear and nonlinear differential and difference equations[M]. Washington, D. C.: Office of Naval Research, 1949
- [8] Bellman R., Danshkin J. M.. A survey of mathematical theory of time lag, retarded control and hereditary processes[J]. RAND Corp., 1956, Rept. No. R-256
- [9] Bellman R., Danshkin J. M., and Glicksberg I.. A bibliography of the theory and application of differential-difference equations[J]. RAND Corp., 1952, Rept. Memo. No. RM-688
- [10] Elsgolts L. E.. Qualitative Methods in Mathematical Analysis[J]. AMS Translation of Math. Monography, 1964, Vol. 12
- [11] Hahn W., Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen[J]. Fehresber., DMV, 1954, Vol. 57, 55-84
- [12] Halanay A.. Differential Equation: Stability, Oscillations, Time Lags[M]. New York: Academic Press, 1966
- [13] Wright E. M.. The linear differential equation with constant coefficients[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 1949, Vol. 62, Part IV(No. 40), 387-393
- [14] Wright E. M.. The stability of solutions of nonlinear difference-differential equations[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 1950, Sect. A, 1949, Vol. 63, Part I(No. 2), 18-26

- [15] Wright E. M.. A nonlinear difference-differential equation[J]. *F. Reine Angew. Math.*, 1955, Vol. 194, 66-87
- [16] Zubov W. I.. *Vibration in Nonlinear Control Systems*[M]. Leningrad,1962
- [17] Callender A., Hartree D. R., and Porter A.. Time-lag in a control system[J]. *Trans. R. Soc., Series A*, 1935, Col. 235, 415-444 and 1937, Vol. 161, 460-476
- [18] Bateman H.. The control of an elastic fluid [J]. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1964, Vol. 51, 601-646, Also in selected papers on Mathematical Trends in Control Theory, R. Bellman and R. Kalala(Eds.), 1964,18-64, Dover
- [19] Weiss R.. Transportation lag-an annotated bibliography[J]. *IRE Trans. on Aut. Control*, 1959, Vol. AC-4, 56-68
- [20] Chosky N. H.. Time-lag systems-a bibliography[J]. *IRE Trans. on Aut. Control*, 1960, Vol. AC-5, 66-70
- [21] Choi H H, Chung M J. Memoryless  $H^\infty$  controller design for linear systems with delayed state and control[J]. *Automatica*, 1995, 31(4): 917-919
- [22] Ge J H, Frank P M and Lin C F.  $H^\infty$  Control via output feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *Int. J. Control*, 1996, 64(1): 1-7
- [23] Ge J H, Frank P M and Lin C F. Robust  $H^\infty$  Control state feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1183-1185
- [24] Petersen I R, Hollot Christopher V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4):397-411
- [25] 姜偕富,费树岷,冯纯伯,线性时滞系统  $H^\infty$  控制——线性矩阵不等式方法[J].安庆师范学院学报(自然科学版),1999,5(1):8-11.
- [26] 姜偕富,费树岷,冯纯伯,线性时滞系统依赖于时滞的  $H^\infty$  状态反馈控制,自动化学报[J],2001,27(1):109-114.
- [27] Vladimir B. Kolmanovskii, Jean-Pierre Richard. Stability of linear systems with delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(5):984-989
- [28] E.Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, (43): 309-319
- [29] E.Fridman, Uri Shaked. A descriptor system approach to  $H^\infty$  control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(2):253-270
- [30] E.Fridman, Uri Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay

- systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(11):1931-1937
- [31] E. Fridman, Uri Shaked. New bounded real lemma representations for time-delay systems and their applications[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2001, 46 (12), 1973-1979
- [32] Shin Kanno, Gan Chen, Hiroshi Shibata, and Fujinaka. Stabilization of input delayed systems via static state-feedback[C]. SICE Annual Conference in Fukui, Japan: University, August 4-6, 2003, 162-166
- [33] Payan Naghshtabrizi, João P. Hespanha. Designing an observer-based controller for a network control system[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005, Seville, Spain, December 12-15, 2005, 848-853
- [34] Huijun Gao, Changhong Wang. Comments and further results on “A descriptor systems approach to  $H^\infty$  control of linear time-delay systems”[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2003, 48 (3), 520-525
- [35] 柴琳, 费树岷。一类输入时滞的线性时滞系统的自适应  $H^\infty$  控制[J]。系统工程理论与实践, 2006, 26 (3): 61-67
- [36] Dong Yue, James Lam. Suboptimal robust mixed  $H_2 / H_\infty$  controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays[J]. Computers & Mathematics with Application: An International Journal, 47, (2004) 1041-1055
- [37] W. H. Chen, Z. H. Guan, X. M. Lu, and X. F. Yang. Delay-dependent absolute stability of uncertain Lur'e systems with time delays[J]. Acta Automatica Sinica, 2004; 30(2), 235-238
- [38] E. Fridman. Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach[J]. J. Math. Anal. App., 2002, 273(1): 24-44
- [39] E. Fridman, Uri Shaked. Delay-dependent stability and  $H^\infty$  control: constant and time-varying delays[J]. Int. J. Control, 2003, 76 (1): 48~ 60.
- [40] E. Fridman. A new Lyapunov technique for robust control of systems with uncertain non-small delays[J]. IMA Journal of Math. Control & Information, 2006, 23(2): 165-179
- [41] Suplin V., Fridman E. and Shaked U. H infinity control of linear uncertain time-delay systems - a projection approach[J]. IEEE Trans. on Automatic control, 2006, 51(4): 680-685
- [42] Dong Yue, Q-L Han. Delay-Dependent Robust  $H^\infty$  Controller Design for Uncertain Descriptor Systems with Time-Varying Discrete and Distributed Delays[J]. IEE Proc.

- Control Theory Appl., 2005, 152(6): 628-638
- [43] Dong Yue, Q-L Han, and James Lam. Network-based robust  $H^\infty$  control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007
- [44] Dong Yue, Qing-Long Han. Robust  $H^\infty$  filter design of uncertain descriptor systems with discrete and distributed delays[C]. IEEE Transactions on Signal Processing, 52, (2004) 3200-3212
- [45] Dong Yue, James Lam. Suboptimal robust mixed  $H_2/H_\infty$  controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays[J]. Computers & Mathematics with Application: An International Journal, 2004, 47(6-7): 1041-1055
- [46] Qing-Long Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays[J]. Automatica, 2004, Vol.40, 1791 - 1796.
- [47] Qing-Long Han, Keqin Gu, and Xinghuo Yu. An Improved Estimate of the Robust Stability Bound of Time-Delay Systems with Norm-Bounded Uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(9): 1629-1635.
- [48] Dong Yue, Qing-Long Han. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay[J]. Automatica, 2005, Vol. 41, 233 – 240
- [49] Zidong Wang, James Lam, and K. J. Burnham. Stability Analysis and Observer Design for Neutral Delay Systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2002, 47(3): 478-483
- [50] Xin- Jun Ma, Bugong Xu, Qing-Yang Wang, and Da-Zhou Peng. A Stability Criterion for Linear Uncertain Systems with Multiple Delays[C]. 2004 8th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision Kunming, China, 64th December 2004, 2010-2013
- [51] Bugong Xu, Xiu-Xiang Liu, and Xin-Jun Ma. A Stability Criterion of Linear Neutral Delay-differential Systems Based on Frequency-Domain[C]. 2004 8th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision Kunming, China, 64th December 2004, 2006-2009
- [52] Xin-Jun Ma, Bugong Xu, Senior Member, IEEE, Da-Zhou Peng, and Xiu-xiang Liu. Absolute Stability of Uncertain Lurie Indirect Control Systems with Multiple Time-varying Delays[C]. 2005 International Conference on Control and Automation (ICCA2005) June 27-29, 2005, Budapest, Hungary, 359-362
- [53] Bugong Xu, Yun-Hui Liu. Delay-Dependent/Delay-Independent Stability of Linear Systems With Multiple Time-Varying Delays[J]. IEEE Transactions on Automatic

- Control, 2003, 48(4): 697-701
- [54] Xiuxiang Liu, Bugong Xu, and Dazhou Peng. Delay-dependent Stability Criteria for Impulsive Differential Systems with Delay[C]. 2005 International Conference on Control and Automation (ICCA2005) June 27-29, 2005, Budapest, Hungary, 363-367
- [55] Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., and Walther H. -O.. Delay Equations[M]. New York: Spinger-Verlag, 1995
- [56] L. Xie, E. Fridman, and U. Shaked. Robust  $H^\infty$  control of distributed delay systems with application to combustion control[J]. IEEE transactions on automatic control, 2001, 46(12): 1930-1935
- [57] 秦元勋, 刘永清, 王联, 郑祖麻。带有时滞的动力系统的稳定性[M]。科学出版社, 1989
- [58] Kalecki M.. A macrodynamic theory of business cycle[J]. Econometrica, 1935, Vol. 3, 327-344
- [59] Bailey F. N., Reeve E. B.. Mathematical models describing the distribution of I-albumin in Man[J]. J. Lab. Clin. Med., 1962, Vol.60, 923-943
- [60] Bailey F. N., Williams M. Z.. Some results on the difference equation
- $$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^N A_i X(t-T_i) [J]. J. Math. Ana. Appl., 1996, Vol.15, 569-589$$
- [61] Boffi V., Scozzafava R.. Sull'equazione functionale lineare  $f'(x) = -A(x)f(x-1)$  [J]. Rend. Math. e Appl., 1966, 25(5):402-410
- [62] 姜偕富。线性时滞系统的鲁棒及自适应控制[D]: [博士学位论文]。南京: 东南大学自动控制系, 2002
- [63] P. Park. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1999, Vol.44, 876-877
- [64] Y. S. Moon, P. Park, and W. H. Kwon, Y. S. Lee. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. Int. J. Control, 2001, Vol.74, 1447-1455
- [65] Shengyuan Xu, James Lam. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 2005, 50(3): 384-387
- [66] Zames G.. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, 301-320
- [67] Francis, B. A., Zames G.. On  $H^\infty$  optimal sensitivity theory for SISO feedback systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, Vol.29, 9-16

- [68] Francis, B. A., Helton J. W., and Zames G.  $H^\infty$  optimal feedback controllers for linear multivariable systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, Vol.29, 888-900
- [69] Glover K.. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_\infty$ -error bounds[J]. Internation Journal of Control, 1984, Vol.39, 1115-1193
- [70] Doyle J.. Advance in multivariable control[M]. Lecture Note at ONR/Honeywell Workshop, 1984
- [71] Doyle J., Glover K., Khargonekar P, Francis B A. State space solution to standard  $H^\infty$  and  $H^2$  control problem[J]. IEEE Trans. Automat. Contr. 1989, 34(8): 831-842
- [72] 申铁龙。  $H^\infty$  控制理论及应用[M]。北京：清华大学出版社，1996
- [73] Doyle J. C., Francis, B.A.. A course in  $H^\infty$  control theory, lecture notes in control and information science[M]. New York: Springer-verlag, 1987
- [74] Basar T, Bernhard P..  $H^\infty$ -optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach[M]. Birkhar, 1991
- [75] Tadmor G. Math. Contr. Syst. Signal Processing, 1989, 28(5): 1190-1208
- [76] Kimura K. Conjugation, interpolation and model-matching in  $H^\infty$  [J]. International Journal of Control, 1989, Vol.49, 269-307
- [77] 冯纯伯, 田玉平, 忻欣。鲁棒控制系统设计[M], 南京: 东南大学出版社, 1995
- [78] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯。线性时滞系统依赖于时滞的反馈控制[J]. 东南大学学报, 2000, 30 (2): 62-66
- [79] 费树岷, 姜偕富, 冯纯伯。线性时滞系统对时滞参数的自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2001, 18 (5): 686-690
- [80] 贾秋玲, 何长安, 一类不确定多时滞非线性系统的自适应  $H^\infty$  鲁棒控制[J]. 西北工业大学学报, 2002, 20 (4): 532-535
- [81] Xiefu Jiang, Shumin Fei, and Chun-bo Feng. Observer-based control design with adaptation to delay-parameters for time-delay system[C]. IFAC, 2002
- [82] Xiefu Jiang, Wenli Xu, and Qing-Long Han. Observer-based fuzzy control design with adaptation to delay parameter for time-delay systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, Vol.152, 637-649.
- [83] Michiru SUGIMOTO, Hiromitsu OHMORI and Akira SANO. Continuous-Time Adaptive Observer for Linear System with Unknown Time Delay[C]. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia December, 2000, 1104-1109

- [84] 杨富文。对时滞系统的  $H^\infty$  状态反馈控制[J]. 控制与决策, 1997, 12 (1): 68-72
- [85] 田连江, 高为炳, 程勉。线性时滞不确定系统的鲁棒性研究[J]. 控制理论与应用, 1993, 10 (6): 718-723
- [86] Jian-Hua Ge, P. M. Frank, and Ching-Fang Lin.  $H^\infty$  Control via output feedback for state delayed systems[J]. INT. J. CONTROL, 1996, 64(1): 1-7
- [87] 程储旺, 汤兵勇。范数有界不确定性时滞系统的鲁棒控制—LMI方法[C]. 中国控制与决策学术年会论文集, 1998, 200-204
- [88] K. Kokame, H. Kobayashi, and T. Mori. Robust  $H^\infty$  performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties[J]. IEEE AC-43, 1998, No.2, 223-226
- [89] Eun tae Jeung, Tong Hae Kim, and Hong Bae Park.  $H^\infty$ -output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state[J]. IEEE AC-43, 1998, No.7, 971-974
- [90] Boyd S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnam. Linear matrix inequalities in system and control theory[C]. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994
- [91] Doyle J. C., A. Packard and K. Zhou. Review of LFTs LMIs and  $\mu$  [C]. Proc. IEEE Conf. Decision Contr., 1991, 1227-1232
- [92] Skelton R E and Iwaski T. Increased roles of linear algebra in control education[C]. IEEE Control Systems, 1995, Aug., 76-90
- [93] Iwasaki T., Skelton R. E.. All Controllers for the general  $H^\infty$  control problem: LMI existence condition and state space formulas[J].
- [94] Chilali M, P. Gahinet.  $H^\infty$  Design with pole placement constraints: an LMI approach[J]. IEEE Trans. AC, 1996, Vol.41, 358-367
- [95] Gahinet P.. Explicit controller formulas for LMI-based  $H^\infty$  synthesis[J]. Automatica, 1996, Vol.32, 1007-1014
- [96] Iwasaki T.. A unified matrix inequality approach to linear control design[D]: Ph. D. dissertation, Purdue University, 1993
- [97] Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory[J]. Soviet Math. Dokl., 1962, 3:620-623
- [98] Yakubovich. The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems[J].
- [99] L. E. Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization

- algorithm for static output-feedback and related problems[J]. IEEE Trans. on Automat. Contr., 42(8):1171-1176
- [100] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron and Venkataraman Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, SIAM, 1994
- [101] 柴琳, 费树岷, 辛云冰。一种输入时滞的线性时滞系统的新型自适应控制[J]。系统科学与数学, 录用待发表
- [102] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯。时滞线性系统的  $H^\infty$  控制[J]。控制与决策, 1999, 14 (6): 712-715
- [103] 姜偕富, 徐立文。不确定输入时滞系统的滞后相关型鲁棒  $H^\infty$  控制[J]。清华大学学报(自然科学版), 2003, 43 (7): 912-915
- [104] Keqin Gu, Silviu-Iulian Niculescu. Additional dynamics in transformed time-delay systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2000, 45(3): 572-575
- [105] Shin Kanno, Gan Chen, Hiroshi Shibata, and Fujinaka. Stabilization of input delayed systems via memoryless state-feedback[C]. 5<sup>th</sup> Asian Control Conference in Grand Hyatt, Australia: The University of Melbourne, July 20-23, 2004, 983-988
- [106] 姜偕富, 费树岷, 冯纯伯。具有状态时滞线性系统对时滞参数的自适应控制[J]。控制理论与应用, 2002, 19 (5): 704-707.
- [107] L. El Chaoui, F. Oustry, M. A. Rami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, Vol. 42, 1171-1176
- [108] Takehito Azuma, Seiichi Sagara. Output feedback via control synthesis for linear time-delay systems infinite-dimensional LMI approach[C]. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003, 4206-4231
- [109] Shuping Ma and Zhaolin Cheng. Observer design for discrete time-delay singular systems with unknown inputs[C]. 2005 American Control Conference June 8-10, 2005. Portland, OR, USA, 4215-4219
- [110] 柴琳, 费树岷, 罗骏。一类输入时滞的线性时滞系统的基于观测器的对时滞参数的自适应控制[C]。第24届中国控制会议论文集, 2005, 中国, 广州, 775-781
- [111] M. C. de oliveira, J. F. Camino, and R. E. Skelton. A convexifying algorithm for the design of structured linear controllers[C]. Proc. of the 39<sup>th</sup> Conf. on Decision and Contr,

- Dec 2000, 2781-2786.
- [112] Feng Zheng , Paul M. Frank. Robust control of uncertain distributed delay systems with application to the stabilization of combustion in rocket motor chambers[J]. Automatica, 2002, Vol. 38, 487 ~ 497
- [113] Zidong Wang, Yurong Liu, Xiaohui Liu. On global asymptotic stability of neural networks with discrete and distributed delays[J]. Physics Letters, 2005, A 345, 299–308
- [114] Erik I. Verriest. Stochastic stability of a class of distributed delay Systems[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain, December 12-15, 2005, pp. 5048-5053
- [115] Frédéric Gouaisbaut. Stability and stabilization of distributed time delay Systems[C]. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain, December 12-15, 2005, pp. 1379-1385
- [116] Xiangqian Liu, Hongze Xu. Delay-dependent stability condition for systems with distributed delays[C]. Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation, Hangzhou, P.R. China, June 15-19, 2004, pp. 881-883
- [117] 杨斌, 陈绵云。一类具有分布与离散时滞的控制系统的绝对稳定性[J]. 控制与决策, 2001, 16 (3): 362~364
- [118] 周东明, 曹进德。一类具有连续分布时滞模型的稳定性[J]. 生物数学学报, 1998, 13 (3): 292~295
- [119] Cao Jinde. Stability in a Class of Continuously Distributed Delays Model[J]. Journal of Engineer in Mathematics, 1999, 16 (3): 37~42
- [120] Li Qiong, Zhou Dongming. Stability of a Continuously Distributed Delays Model[J]. Journal of Yunnan University, 1997, 19 (5): 451~455
- [121] 郑敏, 费树岷。一种新型的多时滞系统  $H^\infty$  状态反馈控制[C]。第25届中国控制会议论文集, 2006, 中国, 黑龙江
- [122] Silviu-Iulian Niculescu. Delay Effects on Stability: a Robust Control Approach[M]. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milano; Paris; Singapur; Tokyo; Springer, 2001
- [123] Hale, J.: Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer Verlag, 1<sup>st</sup> edition: 1971, 2<sup>nd</sup> edition: 1977

## 作者简介

柴琳，女，1978年9月生，中共预备党员。参与研究的课题有：国家自然科学基金(60574006)、教育部高校博士学科点专项科研基金(20030286013)、江苏省自然科学基金(BK2003405)，一直从事时滞系统特别是对时滞参数的自适应控制的理论与应用研究，现已录用、发表论文九篇（其中已被SCI、EI & ISTP 等检索4篇次）。

### 学习和工作简历及所获荣誉

2004 年3 月—至今 东南大学自动化研究所攻读博士学位，期间获《东南大学报》学年“优秀记者”奖，并由自动化学院推荐申请了宝钢优秀学生奖（正在评审之中）。  
 2002 年9 月—2004 年1 月 东南大学自动控制系攻读硕士学位，期间获校研究生综合奖学金2等奖、校研究生学位课程单项奖、东南大学第十一届大学生课外学术科技作品竞赛优秀作品奖等奖励。  
 1997 年9 月—20001年6 月 东南大学自动控制系获学士学位，期间多次获学校二、三等奖学金。

### 作者攻读博士期间完成的论文

1. 柴琳, 费树岷, 辛云冰, 一类带未知输入时滞的多时滞非线性系统的对时滞参数的自适应  $H^\infty$  无穷控制, 自动化学报, 2006, 32(2): 237-245 (EI 收录)
2. 柴琳, 费树岷, 一类输入时滞的线性时滞系统的自适应  $H^\infty$  控制, 系统工程理论与实践, 2006, 26(3): 61-67 (EI 收录)
3. 柴琳, 费树岷, 辛云冰, 线性时滞系统的新型自适应控制的研究, 南京理工大学学报(自然科学版), 2005, A5, 50-54 (EI 收录)
4. 柴琳, 费树岷, 一类改进的输入时滞的线性时滞系统的  $H^\infty$  控制, 控制理论与应用, 2006, 23(5): 800-804 (EI)
5. 柴琳, 费树岷, 一类输入时滞的不确定多时滞非线性系统的自适应  $H^\infty$  无穷控制(编号 05070), 系统科学与数学, 录用待发表
6. 柴琳, 费树岷, 辛云冰, 一种输入时滞的线性时滞系统的新型自适应控制。系统科学与数学(编号 05116), 录用待发表
7. 柴琳, 费树岷, 罗骏, 一类输入时滞的线性时滞系统的基于观测器的对时滞参数的自适应控制, 第 24 届中国控制会议论文集, 2005, 775-781 (ISTP 收录)
8. 柴琳, 费树岷, 一类含分布与离散时滞的线形时滞控制系统的  $H^\infty$  控制——分段控制的时变 LMI 方法, 已投系统工程理论与实践
9. Lin Chai, Shumin Fei. An Improved Approach of Adaptive Control for Time-Delay Systems Based on Observer, International Symposium on Neural Networks 2007, Springer Lecture Notes Computer Science, accepted (SCI&EI, 录用)

10. Lin Chai, Shumin Fei. Feedback Control with Memory for Distributed Time-Delay System with Adaptation to Distributed Delay Parameter, submitted to "Time-Delay Systems " Special Issue of Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms
11. Chai Lin, Fei Shumin, Yong ZhaiJun. A Type of Adaptive Control for Time-delay Systems with Delay Parameter in System Matrixes, submitted to the 5<sup>th</sup> IIGSS Workshop
12. Min Zheng, Lin Chai, Shumin Fei. A  $H^\infty$  Control Method for Lur'e Control Systems with Time-delay, The International Journal of Information and Systems Sciences Conference, 2006, China: Qin Huang Dao, Aug. 13-16, accepted.