



Y1776247

**Dissertation Submitted to Zhejiang University of Technology  
for the Degree of Master**

**Singularity at Axisymmetric Interface Wedge of Bonded  
Dissimilar Transversely Isotropic Piezoelectric Materials  
Considering Dimension Effects**

**Candidate:**

**Advisor:**

**College of Mechanical Engineering  
Zhejiang University of Technology  
April 2010**

# 浙江工业大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经加以标注引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不含为获得浙江工业大学或其它教育机构的学位证书而使用过的材料。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人承担本声明的法律责任。

作者签名：王英

日期：2010年5月31日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权浙江工业大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

2、不保密□

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：王英 日期：2010年5月31日

导师签名：王汉清 日期：2010年6月1日

# 考慮尺寸效应的橫观各向同性压电结合材料 轴对称界面端的奇异行为

## 摘 要

界面是结合压电材料极为重要的微观结构，目前压电结合材料的结构和应用中存在许多的轴对称界面端和圆柱界面裂纹，通常是材料破坏的起点。由于界面端的应力奇异性与电位移奇异性，要建立适合结合材料的强度和可靠性的评价方法，必须首先求出表征界面端的参数，如应力奇异性次数，电位移奇异性次数，应力角函数和电位移角函数以及应力强度系数等。

本文提出了一种分析横观各向同性压电结合材料轴对称界面端的奇异应力场和奇异电位移场的特征值法。主要工作和成果如下：

1. 基于各向同性弹性结合材料，压电/导体及压电/压电结合材料空间轴对称问题的旧坐标系 $(\rho, \psi, z)$ 下的基本方程，通过坐标变换，导出了新坐标系 $(r, \psi, \theta)$ 下的基本方程。基于轴对称界面端奇异场的渐近展开一阶近似假设，利用分离变量形式的位移和电势角函数，导出了关于应力和电位移奇异性指数的奇异性特征方程，并用无网格法对其进行了数值离散。求解离散化的特征方程，可以得到横观各向同性结合压电材料轴对称界面端的各阶应力奇异性指数、电位移奇异性次数、相应的位移角函数、电势角函数、电位移角函数和应力角函数。

2. 讨论了径向尺寸与轴对称界面端的应力奇异性支配区域大小的相对比值对奇异行为的影响。结果表明当半径比奇异性支配区域大小高两个数量级以上时，特征值法得到的一阶近似结果与准一阶的解析解的结果一致；而半径相对奇异性支配区域的大小低于两个两级时，准一阶近似的理论结果不能准确描述奇异点附近的应力奇异行为，此时，必须要考虑尺寸效应的影响。

**关键词：**轴对称界面端，应力奇异性，电位移奇异性，特征值

# SINGULARITY AT AXISYMMETRIC INTERFACE WEDGE OF BONDED DISSIMILAR TRANSVERSELY ISOTROPIC PIEZOELECTRIC MATERIALS CONSIDERING DIMENSION EFFECTS

## ABSTRACT

Interfaces are important microstructures of piezoelectric composites. Many axisymmetric interface wedge and axisymmetric cylindrical interface cracks exist in the structures of piezoelectric composites, and these usually become the initial damage points, as a result of the singular stress field and the singular electric displacement field near the axisymmetric interface wedges, the parameters such as the order of stress singularity and the order of electric displacement singularity, the angle function of stress and electric displacement, and the coefficient of stress intensity must be resolved, in order to find reliable evaluative method which apply to piezoelectric composites.

An eigenvalue method was proposed to study the singular stress field and the singular electric displacement field at the axisymmetric interface of the piezoelectric composites. The major work of this paper is as follows:

Based on the fundamental equations of the special axisymmetric problem of the transversely isotropic piezoelectric materials and the first-order approximation assumption, the discrete characteristic equation was derived by using of the displacement functions and electric potential functions with separated variables and the meshless method. The eigenvalue is relative to the order of stress singularity and electric displacement singularity, and the associated eigenvector is with respect to the stress angular variations and electric displacement angular variations. The order of stress singularity and electric displacement singularity, the associated displacement, the electric displacement, the stress and the electric potential angular variations was obtained.

The influences of dimensionless parameter  $\delta$ , which denoting the ratio of the distance to interface wedge to the singular dominated region were discussed. The results show: when the ratio

is more than two orders of magnitude. the parameters obtained by eigenvalue method are in good agreement with those by first-order approximation, when the ratio is less than two orders of magnitude, the parameters obtained by first-order approximation can not describe the singular stress and electric displacement near the singularity points, and then the influences of  $\delta$  must be considered.

**Key Words:** axisymmetric interface wedge, stress singularity, electric displacement singularity, eigenvalue method

# 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 摘要 .....                      | i  |
| 第 1 章 绪论 .....                | 5  |
| 1.1 研究背景及意义 .....             | 5  |
| 1.1.1 研究背景 .....              | 5  |
| 1.1.2 研究意义 .....              | 6  |
| 1.2 研究现状与分析 .....             | 6  |
| 1.2.1 关于平面问题的研究 .....         | 7  |
| 1.2.2 空间轴对称问题 .....           | 7  |
| 1.2.3 压电问题 .....              | 8  |
| 1.3 本文的主要工作 .....             | 9  |
| 第 2 章 双材料轴对称界面端的奇异性特征方程 ..... | 10 |
| 2.1 空间轴对称问题的基本方程 .....        | 10 |
| 2.1.1 各向同性弹性材料 .....          | 10 |
| 2.1.2 横观各向同性压电材料 .....        | 11 |
| 2.2 轴对称界面端模型 .....            | 13 |
| 2.3 奇异性特征方程 .....             | 21 |
| 2.4 小结 .....                  | 24 |
| 第 3 章 奇异性特征方程的无网格法求解 .....    | 25 |
| 3.1 无网格法 .....                | 25 |
| 3.1.1 无网格法函数近似 .....          | 25 |
| 3.1.2 形函数构造 .....             | 26 |
| 3.1.3 权函数 .....               | 26 |
| 3.2 轴对称界面端的奇异性特征方程 .....      | 28 |
| 3.2.1 各向同性弹性结合材料轴对称界面端 .....  | 28 |
| 3.2.2 压电/导体结合材料轴对称界面端 .....   | 31 |
| 3.2.3 压电/压电结合材料轴对称界面端 .....   | 33 |
| 3.3 小结 .....                  | 34 |
| 第 4 章 算例 .....                | 35 |
| 4.1 材料属性 .....                | 35 |
| 4.2 各向同性弹性材料 .....            | 36 |
| 4.3 压电/导体结合材料 .....           | 39 |
| 4.4 压电/压电结合材料 .....           | 43 |
| 4.5 小结 .....                  | 46 |
| 第 5 章 结论与展望 .....             | 47 |
| 5.1 结论 .....                  | 47 |

|                  |     |
|------------------|-----|
| 5.2 展望.....      | 47  |
| 参考文献.....        | 48  |
| 致谢.....          | 51  |
| 攻读学位期间发表的论文..... | 512 |

## 符 号 说 明

|                           |           |
|---------------------------|-----------|
| $r$                       | 离奇异点的距离   |
| $\theta$                  | 界面端角坐标    |
| $\sigma_{ij}(r, \theta)$  | 奇异点奇异应力   |
| $D_i$                     | 奇异点电位移    |
| $u_i(r, \theta)$          | 奇异点位移     |
| $\phi$                    | 电势        |
| $s$                       | 奇异特征值     |
| $\Lambda_i^\varepsilon$   | 位移和电势角函数  |
| $\Sigma_{ij}^\varepsilon$ | 应力角函数     |
| $\Sigma_i$                | 电位移角函数    |
| $c_y$                     | 弹性常数      |
| $e_y$                     | 压电常数      |
| $\chi_{ij}$               | 介电常数      |
| $E$                       | 弹性模量      |
| $\nu$                     | 泊松比       |
| $\lambda$                 | Lame 常数   |
| $\mu$                     | Lame 常数   |
| $\delta = d / r$          | 界面端尺寸     |
| $\varphi_0$               | 界面结合角     |
| $\varphi_1$               | 材料 1 界面端角 |

|                     |   |
|---------------------|---|
| $\varphi_2$         | 材料 2 界面端角                                     |
| $n_k$               | 材料 $k$ 所属区域内的离散节点个数                           |
| $N_{j,k}(\theta_i)$ | 函数中心固定于 $\theta_i$ 且相应于区域 $k$ 的第 $j$ 个离散点的插值函 |
| $N_k(\theta_i)$     | 未知的节点电势和位移角函数列向量                              |
| $N'_k(\theta_i)$    | 插值函数行向量的一阶导数                                  |
| $N''_k(\theta_i)$   | 插值函数行向量的二阶导数                                  |

# 第1章 绪论

## 1.1 研究背景及意义

### 1.1.1 研究背景

某些电介质，当沿着一定方向对其施力而使它变形时，内部就产生极化现象，同时在它的两个表面上便产生符号相反的电荷，当外力去掉后，又重新恢复到不带电状态，这种现象称为压电效应。西元 1880 年居里兄弟皮尔与杰克斯发现电气石具有压电效应后，压电材料才正式被世人所认知。具有压电效应的压电材料，可以实现机械能和电能的相互转化。居里兄弟发现：电石、罗息盐和石英晶体这类压电晶体，在外力作用下变形时，会在其特定的相对表面上产生异号电荷。这种有应变或应力产生的极化现象称为正压电效应。此外，当在电介质极化方向施加电场，这些电介质也会产生几何变形，即电致伸缩效应机械能转化为电能，称为逆压电效应。正压电效应和逆压电效应统称为压电效应。在近代科学中，压电效应被严格定义为电介质在纯粹机械力作用下发生极化而在两相对表面间出现大小相等，符号相反的束缚电荷。

压电材料已经广泛的应用在我们周边生活当中，种类甚多。大致可以分为五类：1. 单晶，如石英。2. 薄膜，如氧化锌。3. 聚合物，如 PVDF。4. 陶瓷，如 PZT。5. 复合材料。

一个多世纪以来，压电材料的制造以及工程上的应用技术得到了长足的发展，从最早的石英晶体，复合钙钛矿结构类压电陶瓷材料等，发展到今天广泛应用的固溶压电材料（锆钛酸铅 PZT），聚氟乙烯（PVDF, PVF<sub>2</sub>），压电材料的性能也越来越优越，如 PVDF 及其共聚物的化学性能极其稳定，且柔性很好，可广泛用于制造薄膜制品，而且由于其声阻易于水及生物体的声阻相匹配，被广泛应用于超声换能器，生物传感器，热释电器等器件。利用压电现象，人们可以进行精密器件的设计，如传感器，超声马达等。近几十年来，新型压电材料不断涌现，压电器件广泛应用于各技术领域，它们在智能材料和智能结构中扮演着重要角色。其中压电陶瓷因易于制成任何形状、组成方式可多样化、耐高温、耐酸和高机电耦合系数等特点，因此大量运用于军事、光电、医学、资讯、动力产品等，如智慧型结构中的感测器与制动器，在实际应用中主要起着精确定位，振动分离和噪声控制的作用。为了达到有效地控制结构的目的，往往要在执行器上施加大的交变电压，致使压电材料表现出很强的非线性，同时也使压电陶瓷容易发生断裂和失效。

压电材料因具有机电耦合的特性，常与其他材料组成各种不同结构，由于设计上的要求，使该结构会有几何不连续或材料不连续的现象，将导致在界面端奇异点处的应力及电位移变成无穷大，即应力和电位移是奇异的。如果结构在服役期间受到不利环境或载荷的影响，该处极易诱发损伤，形成裂纹核最终导致整个结构失稳。如图 1.1 所示。轴对称结构的奇异点 S(图 1.1 虚线圆区域)将会造成该结构发生裂纹或脱层的破坏现象，所以为了防止结构产生破坏的现象，必须先了解应力分布状况与结合结构的力学行为。

应力奇异性次数可能为实数或者复数。若为复数，则奇异点处的应力会有振荡现象。

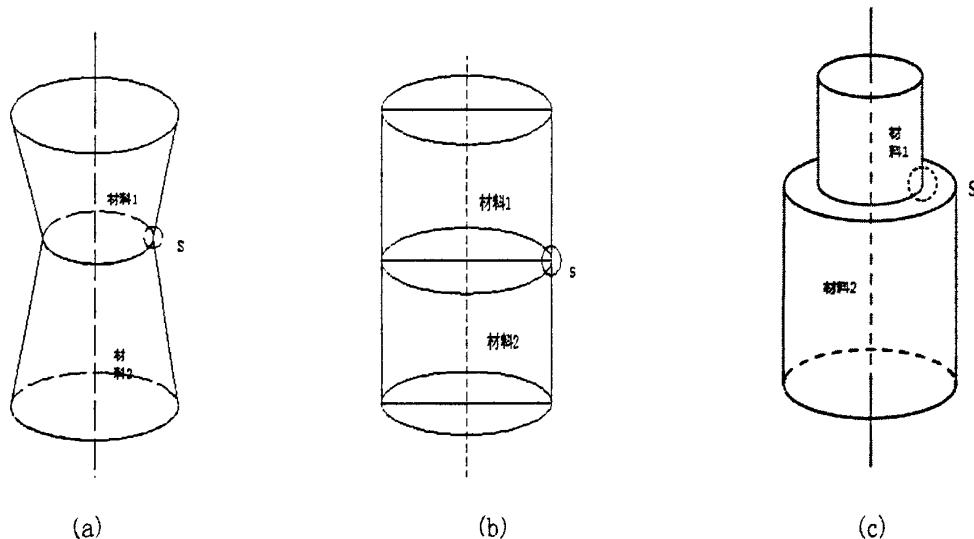


图 1-1 轴对称双材料结构几何示意图

### 1.1.2 研究意义

当压电材料和其他的材料复合时会出现界面端，界面端往往是材料破坏的起点，所以研究界面端的奇异行为对预测材料的破坏有重要的意义。由于压电复合材料的复杂性，对其理论方程求解更为复杂，本文应用数值解法得到界面端的应力奇异性指数和电位移奇异性指数以及相应的应力角函数，从而得到压电复合材料界面端应力和电位移的分布状况。

## 1.2 研究现状与分析

近些年来，结合材料和复合材料的应用已远远超出其早期作为功能材料的范围，而逐渐被当作结构材料越来越广泛地应用在航天、航空、核电站、汽车、电子等方面，而压电复合材料在工业领域应用的也越来越广泛，所以对其界面端的奇异行为研究，对预测材料的破坏有很重要的意义。然而，目前界面力学的研究主要集中在平面问题方面，近年来，

空间轴对称和三维问题的研究，也引起了众多研究者的兴趣。

### 1.2.1 关于平面问题的研究

1959年Williams<sup>[1]</sup>首先利用特征展开法<sup>[2,3]</sup>分析了界面裂纹，并且得到了裂纹尖端的应力奇异性指数是一个复数，得到了裂纹尖端存在振荡奇异性的结果，开创了界面力学研究的先河。随后， Erdogan<sup>[4-6]</sup>, England<sup>[7]</sup>, Sih 和 Rice<sup>[8]</sup>, Rice 和 Sih<sup>[9]</sup>等人采用各种方法研究了平面问题中的界面裂纹问题；England<sup>[10]</sup>还对平面问题中的圆弧形界面裂纹进行了分析。Comninou<sup>[11]</sup>首先提出了在界面裂纹尖端附近引入光滑接触区域的模型，从而消除了裂纹面相互嵌入的不合理现象，得到了没有振荡应力奇异性的结果。Rice<sup>[12]</sup>提出小范围屈服的条件下，可以用弹性振荡应力场的界面裂纹强度因子来对界面裂纹进行强度评价。

1963年Zak 和 Williams<sup>[13]</sup>又利用特征展开法研究了裂纹垂直遇到双材料的裂尖应力奇异性。1971年Bogy<sup>[14]</sup>利用 Mellin 变换对裂纹从任意方向遇到双材料界面的平面问题进行了研究，并就一些特殊方向的裂纹尖端的应力奇异性作了详细的讨论，得到了当裂纹面为自由表面时裂尖具有振荡奇异性的结果，界面裂纹被看作是该模型的一个特例。接着，Bogy<sup>[15]</sup>又对层合复合材料中垂直界面的裂纹进行了分析。

### 1.2.2 空间轴对称问题

Erdogan 和 Ozbek<sup>[16]</sup>最早对圆柱形界面端裂纹的轴对称变形问题进行了研究，得到圆柱形界面端裂纹尖端具有振荡奇异性的结果。戴瑛等<sup>[17]</sup>采用逐次渐近法，对轴对称圆柱界面裂纹的应力奇异性作了近似分析，结果同样具有振荡奇异性。Itou<sup>[18]</sup>通过将裂纹面上的位错进行级数展开，消除了振荡奇异性。Zbib<sup>[19]</sup>则利用位错叠加法，考虑裂纹尖端附近不存在振荡奇异性，分析了圆柱形界面裂纹。王清等<sup>[20]</sup>利用积分方程对纤维与基体之间脱粘时的轴对称圆柱界面裂纹进行了分析，分析结果表明，在裂纹尖端附近，裂纹尖端则没有振荡奇异性。刘一华等从空间轴对称问题的通解出发，研究了轴对称界面端<sup>[21]</sup>和轴对称界面裂纹尖端<sup>[22]</sup>的应力奇异性，给出了奇异性特征方程和奇异应力场的解析解形式。傅丽鹃等<sup>[23]</sup>运用渐近展开法，导出了横观各向同性材料轴对称界面端的应力奇异性特征方程，并给出了纤维拔出和压入两种模型的应力奇异性次数。

Erdogan<sup>[24]</sup>利用奇异性积分方程研究了两个粘结的半无限弹性介质界面的币形和环形界面裂纹。郑白林等<sup>[25]</sup>对纤维复合材料中的环形基体裂纹扩展到纤维与基体界面的问题进行了分析。Pagano 和 Kaw<sup>[26]</sup>研究了平面应变问题中垂直于界面裂纹尖端附近的奇异应力

场，并且将其扩展到轴对称问题中垂直于圆柱形界面的币形和环形裂纹情况。Wang 等<sup>[27]</sup>则采用奇异积分法分析了垂直于横观各向同性双材料圆柱形界面的币形裂纹。

Zak<sup>[28]</sup>首先利用特征展开法分析了一半无限圆柱体埋入在半无限刚体内和一半无限圆柱体粘结在半无限刚体上的界面端的应力奇异性。Gecit<sup>[29]</sup>则研究了一半无限圆柱杆与半无限体的无摩擦接触问题。Tsuji 等<sup>[30]</sup>考虑了一弹性半无限圆柱杆与另一半径不同的弹性半无限圆柱杆对接时的界面端的应力奇异性。Noda 和 Tsuji<sup>[31]</sup>利用特征展开法分析了两个半无限轴对称体对接时的界面端的应力奇异性，他们都得到了与平面应变问题相应模型应力奇异性相同的结果。

### 1.2.3 压电问题

自从 Curie 兄弟 1880 年发现压电效应以来，由于压电材料具有机电耦合特性，被作为功能部件，广泛用于制作传感器、发生器、检控器等高新科技器件。压电陶瓷是一种横观各向同性材料压电材料，具有良好的压电性能，是广泛应用的压电材料之一。随着压电材料越来越广泛的应用，促使人们对其力学与电学性能的研究。近年来，对双压电材料问题的研究也受到了关注，例如，Kuo 和 Barnett<sup>[32]</sup>，Suo 和 Kuo 等人<sup>[33]</sup>，Beom 和 Atluri<sup>[34]</sup>研究了界面裂纹的平面问题；Chen 和 Yu<sup>[35]</sup>则研究了界面裂纹的反平面问题；而 Qin 和 Yu<sup>[36]</sup>分析了裂纹遇到界面的平面问题；Chung 和 Ting<sup>[37]</sup>研究了各向异性压电复合材料尖劈在线力，电荷以及位错作用下力学问题；Xu 和 Jajapakse<sup>[38]</sup>考察了极化轴在平面内时的压电复合材料尖劈和接头处的应力奇异性指数；Chue 和 Chen<sup>[39]</sup>从三维理论出发讨论了广义平面变形作用下压电复合材料尖劈和接头处的应力奇异性指数；王效贵和许金泉<sup>[40]</sup>则对特征值为二重根的横观各向同性压电材料异材界面端的奇异性问题进行了分析；许金泉等<sup>[42]</sup>对横观各向同性压电材料结合的界面端奇异性进行了研究；李玉阑<sup>[42]</sup>对轴对称复合材料的应力奇异性分析进行了研究；李玉阑<sup>[43]</sup>对圆柱形结合材料界面端进行了研究；戴文芳等<sup>[44]</sup>对中心裂纹压电材料板断裂问题进行了研究；王海涛等<sup>[45]</sup>对双压电材料界面力学耦合奇异场进行了研究；段士杰等<sup>[46]</sup>对含不可渗透边裂纹压电材料反平面问题进行了研究；冯晓霞等<sup>[47]</sup>对双裂纹压电材料无限长条的反平面问题进行了研究；王海涛和杨笑梅<sup>[48]</sup>对用裂纹单元分析双压电材料界面力学耦合奇异场进行了研究；Chen<sup>[49]</sup>等对各向异性弹性压电问题进行了研究；Sosa 等<sup>[50]</sup>对裂纹压电材料进行了分析；Stroh<sup>[51]</sup>对压电弹性材料的稳定性进行了研究；Ting 等<sup>[52]</sup>对横观各向同性轴对称载荷下奇异点进行了研究。

目前关于压电材料的界面问题的研究方法大都是解析法。然而，电力学耦合问题的解

析解推导一般只适用于简单的几何图形和材料，并且研究者本身还须具有高超的数学才能。因此，多数实际工程问题还有赖于数值方法。本章所用的特征值法可以应用于比较复杂的问题研究。

### 1.3 本文的主要工作

本文基于弹性力学空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设，利用分离变量形式的位移角函数及电势角函数和无网格算法，提出了一种分析各向同性弹性结合材料、压电/导体和压电/压电结合材料轴对称界面端的奇异行为的特征值法。利用该方法对各向同性弹性结合材料轴对称界面端的奇异应力场、压电/导体及压电/压电结合材料轴对称界面端的奇异应力场和奇异电位移场进行了讨论。研究了奇异点附近的各阶应力奇异性指数和电位移奇异性指数，以及相应的位移、电位移、应力和电势角函数。并讨论了尺寸效应对界面端奇异行为的影响。

本文的工作如下：

**第1章：绪论。**阐述了论文选题的工程背景和研究意义，通过文献综述说明了界面力学的国内外研究现状，提出了本文的研究思路和主要研究内容。

**第2章：双材料轴对称界面端的奇异性特征方程。**基于各向同性弹性结合材料、压电/导体结合材料及压电/压电结合材料空间轴对称变形问题的基本方程，利用特征展开法，得到了各向同性弹性结合材料轴对称界面端奇异点附近的位移场和奇异应力场、压电/导体和压电/压电结合材料轴对称界面端奇异点附件的奇异应力场、奇异电位移场、位移场及电位移场。

**第3章：奇异性特征方程的无网格法求解。**介绍了无网格法的基本理论，并采用无网格技术中的固定核重构法构造形函数，离散基本方程后的得到了用无网格节点上的场变量表示的离散化的特征方程，数值求解特征方程可得出各向同性弹性结合材料轴对称界面端应力奇异性指数及其相应的角函数、压电/导体结合材料和压电/压电结合材料轴对称界面端应力和电位移奇异性指数及相应的角函数。

**第4章：算例。**各向同性弹性结合材料轴对称界面端、压电/导体及压电/压电结合材料轴对称界面端奇异行为的具体算例，数值求解出应力和电位移奇异性指数及相应的角函数，并讨论了尺寸效应对奇异行为的影响。

**第5章：结论与展望。**概述本论文的主要研究结论，并指出可以进一步研究的内容。

## 第2章 双材料轴对称界面端的奇异性特征方程

### 2.1 空间轴对称问题的基本方程

#### 2.1.1 各向同性弹性材料

圆柱坐标系( $\rho, \psi, z$ )的径向、环向和轴向坐标分别为 $\rho$ 、 $\psi$ 和 $z$ 。无体积力作用情况下，各向同性弹性材料空间轴对称变形问题在圆柱坐标系( $\rho, \psi, z$ )中的基本方程为

#### 1. 几何方程

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \varepsilon_{\psi\psi} &= \frac{u_\rho}{\rho} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_\rho &= \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\end{aligned}\tag{2-1}$$

#### 2. 本构方程

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\psi\psi} + \varepsilon_z) + \varepsilon_{\rho\rho}\right) \\ \sigma_{\psi\psi} &= 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\psi\psi} + \varepsilon_z) + \varepsilon_{\psi\psi}\right) \\ \sigma_z &= 2\mu\left(\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\psi\psi} + \varepsilon_z) + \varepsilon_z\right) \\ \tau_\rho &= \mu\gamma_\rho\end{aligned}\tag{2-2}$$

#### 3. 平衡方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_\rho}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\psi\psi}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_\rho}{\rho} &= 0\end{aligned}\tag{2-3}$$

式中  $\varepsilon_{\rho\rho}$ 、 $\varepsilon_{\psi\psi}$ 、 $\varepsilon_z$  和  $\gamma_\mu$  为应变分量， $u_\rho$  和  $u_z$  为位移分量， $\sigma_{\rho\rho}$ 、 $\sigma_{\psi\psi}$ 、 $\sigma_z$  和  $\tau_\mu$  为应力分量， $\mu$  为剪切弹性模量， $\nu$  为泊松比。

将(2-1)代入(2-2)和(2-3)，可得到用位移分量  $u_\rho$  和  $u_z$  表示的本构方程

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{u_\rho}{\rho} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{\psi\psi} &= 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{u_\rho}{\rho} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{u_\rho}{\rho} + 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_\mu &= \mu \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial \rho}\end{aligned}\tag{2-4}$$

以及用  $u_\rho$  和  $u_z$  表示的平衡方程为

$$\begin{aligned}2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} + 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\rho \partial \rho} - 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{u_\rho}{\rho^2} &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} + 2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-2\nu} \frac{\partial u_\rho}{\rho \partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\rho \partial \rho} &= 0\end{aligned}\tag{2-5}$$

### 2.1.2 横观各向同性压电材料

横观各向同性压电材料的弹性主轴(1, 2, 3)与全局圆柱坐标系( $\rho, \psi, z$ )的坐标轴的对应关系为：1→ $\rho$ ，2→ $\psi$  和 3→ $z$ ，各向同性材料平面平行于( $\rho, \psi$ )面，极化方向沿着轴对称轴 $z$ 。无体积力和点电荷作用情况下，圆柱坐标系( $\rho, \psi, z$ )中的基本方程为

#### 1. 几何方程

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}$$

$$\varepsilon_{\psi\psi} = \frac{u_\rho}{\rho}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\rho} &= \frac{\partial u_{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \\ E_{\rho} &= -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \\ E_z &= -\frac{\partial \phi}{\partial z}\end{aligned}\tag{2-6}$$

## 2. 本构方程

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= c_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}\varepsilon_{\psi\psi} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z \\ \sigma_{\psi\psi} &= c_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}\varepsilon_{\psi\psi} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{\rho\rho} + c_{13}\varepsilon_{\psi\psi} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z \\ \sigma_{\rho z} &= c_{44}\sigma_{\rho z} - e_{15}E_{\rho} \\ D_{\rho} &= e_{15}\sigma_{\rho z} + \zeta_{11}E_{\rho} \\ D_z &= e_{31}\varepsilon_{\rho\rho} + e_{31}\varepsilon_{\psi\psi} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \zeta_{33}E_z\end{aligned}\tag{2-7}$$

## 3. 平衡方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\psi\psi}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial D_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial D_{zz}}{\partial z} + \frac{D_{\rho\rho}}{\rho} &= 0\end{aligned}\tag{2-8}$$

式中,  $\varepsilon_{\rho\rho}$ 、 $\varepsilon_{\psi\psi}$ 、 $\varepsilon_{zz}$  和  $\varepsilon_{\rho z}$  为应变分量,  $E_{\rho}$  和  $E_z$  为电场强度分量,  $u_{\rho}$  和  $u_z$  为位移分量,  $\phi$  为电势,  $\sigma_{\rho\rho}$ 、 $\sigma_{\psi\psi}$ 、 $\sigma_{zz}$  和  $\tau_{\rho z}$  为应力分量,  $D_{\rho}$  和  $D_z$  为电位移分量,  $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{13}$ 、 $c_{33}$  和  $c_{44}$  为弹性刚度常数,  $e_{11}$ 、 $e_{15}$ 、 $e_{31}$  和  $e_{33}$  为压电常数,  $\zeta_{11}$  和  $\zeta_{33}$  为介电常数。

将式(2-6)代入式(2-7)和(2-8), 得到由位移  $u_{\rho}$ 、 $u_z$  和电势  $\phi$  表示的本构方程

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho} &= c_{11} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_{\rho}}{\rho} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \sigma_{\psi\psi} &= c_{12} \frac{\partial u_{\rho}}{\partial \rho} + c_{11} \frac{u_{\rho}}{\rho} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{13} \frac{u_\rho}{\rho} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\
\sigma_{\rho\rho} &= c_{44} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \\
D_\rho &= e_{15} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) - \zeta_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \\
D_z &= e_{31} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + e_{31} \frac{u_\rho}{\rho} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \zeta_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2-9}$$

以及由位移  $u_\rho$ 、 $u_z$  和电势  $\phi$  表示的平衡方程

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho \partial z} + c_{11} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - \frac{u_\rho}{\rho^2} \right) &= 0 \\
c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} + (c_{13} + c_{44}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + c_{44} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} &= 0 \\
e_{15} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \rho^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial z} + (e_{31} + e_{15}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + e_{15} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_z}{\partial \rho} &= 0 \\
-e_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} - e_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_{11} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} &= 0
\end{aligned} \tag{2-10}$$

## 2.2 轴对称界面端模型

圆柱坐标系  $(\rho, \psi, z)$  下的双材料轴对称界面端的一般模型如图 1 所示, 材料 1 和 2 为横观各向同性压电材料或各向同性弹性材料。为了研究奇异点  $O'$  附近的位移场和奇异应力场, 特作如下坐标变换

$$\rho = d + r \sin \theta = r(\delta + \sin \theta), \quad z = r \cos \theta, \quad \psi = \psi
\tag{2-11}$$

式中,  $d$  表示界面端  $O'$  到轴对称轴  $z$  的距离, 无量纲参数  $\delta$  定义为  $d/r$ 。在界面端奇异性支配区域内,  $\delta$  可看做为  $d$  与奇异性支配区域大小的相对比值。在新坐标系  $(r, \psi, \theta)$  下, 结合角分别为  $\varphi_1 = -\theta_1 - \theta_0$  和  $\varphi_2 = \theta_2 - \theta_0$ , 界面角为  $\varphi_0 = -\theta_0$ , 材料 1 和材料 2 占据的区域分别为  $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_0$  和  $\varphi_0 \leq \theta \leq \varphi_2$ 。

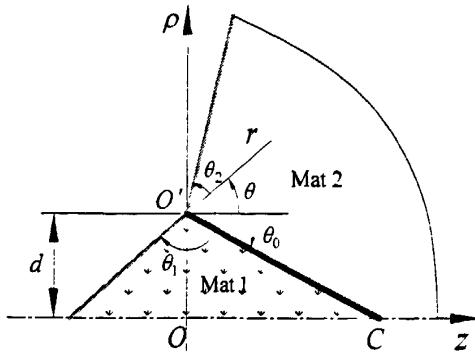


图 1 双材料轴对称界面端

对于各向同性弹性结合材料，界面  $O'C$  上的连续条件为

$$\begin{aligned} u_{r,1}(r, \varphi_0) &= u_{r,2}(r, \varphi_0) \\ u_{\theta,1}(r, \varphi_0) &= u_{\theta,2}(r, \varphi_0) \\ \sigma_{\theta\theta,1}(r, \varphi_0) &= \sigma_{\theta\theta,2}(r, \varphi_0) \\ \sigma_{r\theta,1}(r, \varphi_0) &= \sigma_{r\theta,2}(r, \varphi_0) \end{aligned} \quad (2-12)$$

自由表面条件为

$$\sigma_{\theta\theta,k}(r, \varphi_k) = \sigma_{r\theta,k}(r, \varphi_k) = 0 \quad (2-13)$$

对于压电/导体组成的结合材料，界面  $O'C$  上的连续条件为

$$\begin{aligned} u_{r,1}(r, \varphi_0) &= u_{r,2}(r, \varphi_0) \\ u_{\theta,1}(r, \varphi_0) &= u_{\theta,2}(r, \varphi_0) \\ \phi_2(r, \varphi_0) &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta,1}(r, \varphi_0) &= \sigma_{\theta\theta,2}(r, \varphi_0) \\ \sigma_{r\theta,1}(r, \varphi_0) &= \sigma_{r\theta,2}(r, \varphi_0) \end{aligned} \quad (2-14)$$

自由表面条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta,k}(r, \varphi_k) &= \sigma_{r\theta,k}(r, \varphi_k) = 0 \\ D_{r,2}(r, \varphi_k) &= D_{\theta,2}(r, \varphi_k) = 0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

对于压电/压电结合材料，界面  $O'C$  上的连续条件为

$$\begin{aligned} u_{r,1}(r, \varphi_0) &= u_{r,2}(r, \varphi_0) \\ u_{\theta,1}(r, \varphi_0) &= u_{\theta,2}(r, \varphi_0) \\ \phi_1(r, \varphi_0) &= \phi_2(r, \varphi_0) \\ \sigma_{\theta\theta,1}(r, \varphi_0) &= \sigma_{\theta\theta,2}(r, \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta,1}(r,\varphi_0) &= \sigma_{r\theta,2}(r,\varphi_0) \\ D_{\theta,1}(r,\varphi_0) &= D_{\theta,2}(r,\varphi_0)\end{aligned}\quad (2-16)$$

自由表面条件为

$$\sigma_{\theta\theta,k}(r,\varphi_k) = \sigma_{r\theta,k}(r,\varphi_k) = D_{\theta,k}(r,\varphi_k) = 0 \quad (2-17)$$

其中，下标  $k=1,2$  分别表示材料 1 和材料 2。

新坐标系  $(r,\psi,\theta)$  下，各向同性弹性材料的本构方程(2-4)变换为

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda e + \frac{2\mu}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\psi\psi} &= \lambda e + \frac{2\mu}{r} \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)\end{aligned}\quad (2-18)$$

径向  $\rho$  和轴向  $z$  方向的平衡方程(2-5)变换为

$$a_{k1} + a_{k2} + b_{k1} + b_{k2} + c_{k1} + c_{k2} = 0 \quad (k=\rho,z) \quad (2-19)$$

其中， $\lambda$  和  $\mu$  表示 Lame 材料常数， $e$  为体积应变，且有

$$\begin{aligned}e &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \\ a_{\rho 1} &= \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ a_{\rho 2} &= \cos \theta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ a_{z1} &= \frac{2(1-\nu) \cos \theta}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ a_{z2} &= -\sin \theta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ b_{\rho 1} &= \frac{1}{r} \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{2(1-\nu) \sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) \\ b_{\rho 2} &= \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{1-2\nu} \left( \frac{2(1-\nu) \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{z1} &= \frac{1}{r} \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{(1-\nu)\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) \\
b_{z2} &= \frac{1}{r} \frac{1}{\delta + \sin \theta} \left( \frac{\cos^2 \theta}{1-2\nu} - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \\
c_{\rho 1} &= \frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{(\delta + \sin \theta)^2} - \sin \theta \right) u_r \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1-2\nu} \left( (3-4\nu) \cos \theta + \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} \\
c_{\rho 2} &= -\frac{1}{r^2} \cos \theta \left[ 1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta} + \frac{1}{(\delta + \sin \theta)^2} \right) \right] u_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{2(1-\nu) \cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - (3-4\nu) \sin \theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cos \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \\
c_{z1} &= \frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( 2 \cos \theta + \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right) u_r \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - \frac{(3-4\nu) \sin \theta}{1-2\nu} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\
c_{z2} &= \frac{1}{r^2} \left( \sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \right) u_\theta \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \left( 3-4\nu + \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{\delta + \sin \theta} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sin \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \tag{2-20}$$

相应于局部坐标系( $r, \psi, \theta$ )，横观各向同性压电材料的本构方程(2-9)可表示为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\psi\psi} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \\ D_r \\ D_\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a'_r(\theta) & a_r^\theta(\theta) & a_r^\phi(\theta) \\ a'_{\psi\psi}(\theta) & a_{\psi\psi}^\theta(\theta) & a_{\psi\psi}^\phi(\theta) \\ a'_{\theta\theta}(\theta) & a_{\theta\theta}^\theta(\theta) & a_{\theta\theta}^\phi(\theta) \\ a'_{r\theta}(\theta) & a_{r\theta}^\theta(\theta) & a_{r\theta}^\phi(\theta) \\ a'_r(\theta) & a_r^\theta(\theta) & a_r^\phi(\theta) \\ a'_\theta(\theta) & a_\theta^\theta(\theta) & a_\theta^\phi(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b'_r(\theta) & b_r^\theta(\theta) & b_r^\phi(\theta) \\ b'_{\psi\psi}(\theta) & b_{\psi\psi}^\theta(\theta) & b_{\psi\psi}^\phi(\theta) \\ b'_{\theta\theta}(\theta) & b_{\theta\theta}^\theta(\theta) & b_{\theta\theta}^\phi(\theta) \\ b'_{r\theta}(\theta) & b_{r\theta}^\theta(\theta) & b_{r\theta}^\phi(\theta) \\ b'_r(\theta) & b_r^\theta(\theta) & b_r^\phi(\theta) \\ b'_\theta(\theta) & b_\theta^\theta(\theta) & b_\theta^\phi(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} d'_r(\theta) & d_r^\theta(\theta) & 0 \\ d'_{\psi\psi}(\theta) & d_{\psi\psi}^\theta(\theta) & 0 \\ d'_{\theta\theta}(\theta) & d_{\theta\theta}^\theta(\theta) & 0 \\ d'_{r\theta}(\theta) & d_{r\theta}^\theta(\theta) & 0 \\ d'_r(\theta) & d_r^\theta(\theta) & 0 \\ d'_\theta(\theta) & d_\theta^\theta(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r} u_r \\ \frac{1}{r} u_\theta \\ \frac{1}{r} \phi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-21}$$

式中，矩阵元素  $a_\xi^r(\theta)$ 、 $b_\xi^r(\theta)$  和  $d_\xi^r(\theta)$  只与材料常数和角坐标  $\theta$  有关( $\xi = rr, \psi\psi, \theta\theta, r\theta, r, \theta$ )。

$\tau = r, \theta, \psi$  ), 其详细表达式为

$$\Gamma_s = \frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta}$$

$$\Gamma_c = \frac{\cos \theta}{\delta + \sin \theta}$$

$$a_{rr}^r(\theta) = c_{11} \sin^4 \theta + c_{33} \cos^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$a_{rr}^\theta(\theta) = (c_{11} - c_{13} - 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta + (c_{13} + 2c_{44} - c_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$a_{rr}^\phi(\theta) = e_{33} \cos^3 \theta + (e_{31} + 2e_{15}) \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$b_{rr}^r(\theta) = a_{rr}^\theta(\theta)$$

$$b_{rr}^\theta(\theta) = c_{13} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$b_{rr}^\phi(\theta) = (2e_{15} - e_{33}) \sin \theta \cos^2 \theta - e_{31} \sin^3 \theta$$

$$d_{rr}^r(\theta) = b_{rr}^\theta(\theta) + (c_{13} \cos^2 \theta + c_{12} \sin^2 \theta) \Gamma_s$$

$$d_{rr}^\theta(\theta) = -a_{rr}^\theta(\theta) + (c_{13} \cos^2 \theta + c_{12} \sin^2 \theta) \Gamma_c$$

$$a_{\theta\theta}^r(\theta) = c_{13} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$a_{\theta\theta}^\theta(\theta) = (c_{13} - c_{33} + 2c_{44}) \sin^3 \theta \cos \theta + (c_{11} - c_{13} - 2c_{44}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$a_{\theta\theta}^\phi(\theta) = (e_{33} - 2e_{15}) \sin^2 \theta \cos \theta + e_{31} \cos^3 \theta$$

$$b_{\theta\theta}^r(\theta) = a_{\theta\theta}^\theta(\theta)$$

$$b_{\theta\theta}^\theta(\theta) = c_{33} \sin^4 \theta + c_{11} \cos^4 \theta + 2(c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$b_{\theta\theta}^\phi(\theta) = -e_{33} \sin^3 \theta - (e_{31} + 2e_{15}) \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$d_{\theta\theta}^r(\theta) = b_{\theta\theta}^\theta(\theta) + (c_{13} \sin^2 \theta + c_{12} \cos^2 \theta) \Gamma_s$$

$$d_{\theta\theta}^\theta(\theta) = -a_{\theta\theta}^\theta(\theta) + (c_{13} \sin^2 \theta + c_{12} \cos^2 \theta) \Gamma_c$$

$$a_{\psi\psi}^r(\theta) = c_{12} \sin^2 \theta + c_{13} \cos^2 \theta$$

$$a_{\psi\psi}^\theta(\theta) = (c_{12} - c_{13}) \sin \theta \cos \theta$$

$$a_{\psi\psi}^\phi(\theta) = e_{31} \cos \theta$$

$$b_{\psi\psi}^r(\theta) = a_{\psi\psi}^\theta(\theta)$$

$$b_{\psi\psi}^\theta(\theta) = c_{12} \cos^2 \theta + c_{13} \sin^2 \theta$$

$$b_{\psi\psi}^\phi(\theta) = -e_{31} \sin \theta$$

$$d_{\psi\psi}^r(\theta) = b_{\psi\psi}^\theta(\theta) + c_{11} \Gamma_s$$

$$\begin{aligned}
d_{vv}^{\theta}(\theta) &= -a_{vv}^{\theta}(\theta) + c_{11}\Gamma_c \\
a_{r\theta}^r(\theta) &= a_{rr}^{\theta}(\theta) \\
a_{r\theta}^{\theta}(\theta) &= (c_{11} - 2c_{13} + c_{33} - 2c_{44})\sin^2\theta\cos^2\theta + c_{44}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
a_{r\theta}^{\phi}(\theta) &= (e_{31} - e_{33} + e_{15})\sin\theta\cos^2\theta - e_{15}\sin^3\theta \\
b_{r\theta}^r(\theta) &= a_{r\theta}^{\theta}(\theta) \\
b_{r\theta}^{\theta}(\theta) &= a_{\theta\theta}^{\theta}(\theta) \\
b_{r\theta}^{\phi}(\theta) &= (e_{33} - e_{31} - e_{15})\sin^2\theta\cos\theta + e_{15}\cos^3\theta \\
d_{r\theta}^r(\theta) &= b_{r\theta}^{\theta}(\theta) + (c_{12} - c_{13})\Gamma_s \sin\theta\cos\theta \\
d_{r\theta}^{\theta}(\theta) &= -a_{r\theta}^{\theta}(\theta) + (c_{12} - c_{13})\Gamma_s \cos^2\theta \\
a_r^r(\theta) &= (2e_{15} + e_{31})\sin^2\theta\cos\theta + e_{33}\cos^3\theta \\
a_r^{\theta}(\theta) &= (e_{31} - e_{33} + e_{15})\sin\theta\cos^2\theta - e_{15}\sin^3\theta \\
a_r^{\phi}(\theta) &= -\zeta_{11}\sin^2\theta - \zeta_{33}\cos^2\theta \\
b_r^r(\theta) &= a_r^{\theta}(\theta) \\
b_r^{\theta}(\theta) &= e_{31}\cos^3\theta + (e_{33} - 2e_{15})\sin^2\theta\cos\theta \\
b_r^{\phi}(\theta) &= (\zeta_{33} - \zeta_{11})\sin\theta\cos\theta \\
d_r^r(\theta) &= b_r^{\theta}(\theta) + e_{31}\Gamma_s \cos\theta \\
d_r^{\theta}(\theta) &= -a_r^{\theta}(\theta) + e_{31}\Gamma_c \cos\theta \\
a_{\theta}^r(\theta) &= (2e_{15} - e_{33})\sin\theta\cos^2\theta - e_{31}\sin^3\theta \\
a_{\theta}^{\theta}(\theta) &= e_{15}\cos^3\theta + (e_{33} - e_{31} - e_{15})\sin^2\theta\cos\theta \\
a_{\theta}^{\phi}(\theta) &= (\zeta_{33} - \zeta_{11})\cos\theta\sin\theta \\
b_{\theta}^r(\theta) &= a_{\theta}^{\theta}(\theta) \\
b_{\theta}^{\theta}(\theta) &= -(2e_{15} + e_{31})\sin\theta\cos^2\theta - e_{33}\sin^3\theta \\
b_{\theta}^{\phi}(\theta) &= -\zeta_{11}\cos^2\theta - \zeta_{33}\sin^2\theta \\
d_{\theta}^r(\theta) &= b_{\theta}^{\theta}(\theta) - e_{31}\Gamma_s \sin\theta \\
d_{\theta}^{\theta}(\theta) &= -e_{15}\cos^3\theta + (e_{31} + e_{15} - e_{33})\sin^2\theta\cos\theta - e_{31}\Gamma_c \sin\theta
\end{aligned} \tag{2-22}$$

径向力平衡方程、轴向力平衡方程和径向电位移平衡方程(2-10)可表示为 ( $\xi = \rho, z, d$ )

$$\begin{aligned} & \left[ f_{\xi}^r(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( g_{\xi}^r(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + h_{\xi}^r(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( l_{\xi}^r(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + m_{\xi}^r(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + n_{\xi}^r(\theta) \right) \right] u_r \\ & + \left[ f_{\xi}^{\theta}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( g_{\xi}^{\theta}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + h_{\xi}^{\theta}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( l_{\xi}^{\theta}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + m_{\xi}^{\theta}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + n_{\xi}^{\theta}(\theta) \right) \right] u_{\theta} \\ & + \left[ f_{\xi}^{\phi}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( g_{\xi}^{\phi}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + h_{\xi}^{\phi}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( l_{\xi}^{\phi}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + m_{\xi}^{\phi}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \phi = 0 \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中

$$f_{\rho}^r(\theta) = c_{11} \sin^3 \theta + (2c_{44} + c_{13}) \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$g_{\rho}^r(\theta) = (2c_{11} - 3c_{44} - c_{13}) \sin^2 \theta \cos \theta + (c_{13} + c_{44}) \cos^3 \theta$$

$$h_{\rho}^r(\theta) = (c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta + (3c_{11} - 4c_{44} - 2c_{13}) \sin \theta \cos^2 \theta + c_{11} \Gamma_s \sin \theta$$

$$l_{\rho}^r(\theta) = c_{44} \sin^3 \theta + (c_{11} - c_{44} - c_{13}) \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$m_{\rho}^r(\theta) = (3c_{13} + 7c_{44} - 2c_{11}) \sin^2 \theta \cos \theta + (2c_{11} - c_{44} - c_{13}) \cos^3 \theta + c_{11} \Gamma_c \cos \theta$$

$$n_{\rho}^r(\theta) = (4c_{44} + 2c_{13} - 3c_{11}) \sin \theta \cos^2 \theta - (c_{13} + 2c_{44}) \sin^3 \theta + c_{11} (\Gamma_c^2 \delta + \Gamma_s^2 \sin \theta) - c_{12} \Gamma_s^2 \delta$$

$$f_{\rho}^{\theta}(\theta) = (c_{11} - c_{44} - c_{13}) \sin^2 \theta \cos \theta + c_{44} \cos^3 \theta$$

$$g_{\rho}^{\theta}(\theta) = (c_{13} + c_{44}) \sin^3 \theta + (2c_{11} - 3c_{44} - c_{13}) \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$h_{\rho}^{\theta}(\theta) = (2c_{13} + 5c_{44} - 2c_{11}) \sin^2 \theta \cos \theta + (c_{11} - c_{44} - c_{13}) \cos^3 \theta + c_{11} \Gamma_s \cos \theta$$

$$l_{\rho}^{\theta}(\theta) = (2c_{44} + c_{13}) \sin^2 \theta \cos \theta + c_{11} \cos^3 \theta$$

$$m_{\rho}^{\theta}(\theta) = (5c_{44} + 3c_{13} - 4c_{11}) \sin \theta \cos^2 \theta - (c_{13} + 3c_{44}) \sin^3 \theta + c_{11} \Gamma_c \cos \theta$$

$$\begin{aligned} n_{\rho}^{\theta}(\theta) &= [(2c_{11} - 5c_{44} - 2c_{13}) \sin^2 \theta + (c_{13} + c_{44} - c_{11}) \cos^2 \theta - (c_{11} + c_{12}) \Gamma_s + c_{12} \Gamma_s^2] \cos \theta \\ &- c_{11} \Gamma_c^2 / \cos \theta \end{aligned}$$

$$f_{\rho}^{\phi}(\theta) = (e_{15} + e_{31}) \cos \theta \sin \theta$$

$$g_{\rho}^{\phi}(\theta) = (e_{15} + e_{31}) \cos 2\theta$$

$$h_{\rho}^{\phi}(\theta) = -f_{\rho}^{\phi}(\theta)$$

$$l_{\rho}^{\phi}(\theta) = -f_{\rho}^{\phi}(\theta)$$

$$m_{\rho}^{\phi}(\theta) = -g_{\rho}^{\phi}(\theta)$$

$$f_z^r(\theta) = c_{33} \cos^3 \theta + (c_{13} + 2c_{44}) \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$g_z^r(\theta) = -(c_{13} + c_{44}) \sin^3 \theta + (c_{13} - 2c_{33} + 3c_{44}) \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$h_z^r(\theta) = [(c_{13} + 2c_{44}) \cos^2 \theta - (2c_{13} + 4c_{44} - 3c_{33}) \sin^2 \theta + (c_{13} + 2c_{44}) \Gamma_s] \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
l_z^r(\theta) &= c_{44} \cos^3 \theta + (c_{33} - c_{13} - c_{44}) \sin^2 \theta \cos \theta \\
m_z^r(\theta) &= [(c_{13} + c_{44} - 2c_{33}) \sin^2 \theta + (2c_{33} - 7c_{44} - 3c_{13}) \cos^2 \theta - (c_{13} + c_{44}) \Gamma_s] \sin \theta + c_{44} \Gamma_c \cos \theta \\
n_z^r(\theta) &= [-(c_{13} + 2c_{44}) \cos^2 \theta + (2c_{13} + 4c_{44} - 3c_{33}) \sin^2 \theta - 2(c_{13} + c_{44}) \Gamma_s + c_{13} \Gamma_c^2] \cos \theta \\
f_z^\theta(\theta) &= -c_{44} \sin^3 \theta + (c_{13} + c_{44} - c_{33}) \sin \theta \cos^2 \theta \\
g_z^\theta(\theta) &= (c_{13} + c_{44}) \cos^3 \theta - (c_{13} - 2c_{33} + 3c_{44}) \sin^2 \theta \cos \theta \\
h_z^\theta(\theta) &= [(c_{13} - c_{33} + c_{44}) \sin^2 \theta + (2c_{33} - 5c_{44} - 2c_{13}) \cos^2 \theta - c_{44} \Gamma_s] \sin \theta + (c_{13} + c_{44}) \Gamma_c \cos \theta \\
l_z^\theta(\theta) &= -c_{33} \sin^3 \theta - (c_{13} + 2c_{44}) \sin \theta \cos^2 \theta \\
m_z^\theta(\theta) &= [-(c_{13} + 3c_{44}) \cos^2 \theta + (3c_{13} + 5c_{44} - 4c_{33}) \sin^2 \theta - (c_{13} + 2c_{44}) \Gamma_s] \cos \theta \\
n_z^\theta(\theta) &= [(c_{33} - c_{13} - c_{44}) \sin^2 \theta + (2c_{13} + 5c_{44} - 2c_{33}) \cos^2 \theta + (c_{13} + c_{44}) \Gamma_s + c_{13} \Gamma_c^2] \sin \theta \\
&\quad - (c_{13} + c_{44}) \Gamma_c \cos \theta \\
f_d^\phi(\theta) &= e_{33} \cos^2 \theta + e_{15} \sin^2 \theta \\
g_d^\phi(\theta) &= (e_{15} - e_{33}) \sin 2\theta \\
h_d^\phi(\theta) &= e_{15} \cos^2 \theta + e_{33} \sin^2 \theta + e_{15} \Gamma_s \\
l_d^\phi(\theta) &= e_{15} \cos^2 \theta + e_{33} \sin^2 \theta \\
m_d^\phi(\theta) &= -g_d^\phi(\theta) + e_{15} \Gamma_c \\
f_d^r(\theta) &= (2e_{15} + e_{31}) \sin^2 \theta \cos \theta + e_{33} \cos^3 \theta \\
g_d^r(\theta) &= (3e_{15} - 2e_{33} + e_{31}) \sin \theta \cos^2 \theta - (e_{15} + e_{31}) \sin^3 \theta \\
h_d^r(\theta) &= (3e_{33} - 4e_{15} - 2e_{31}) \sin^2 \theta \cos \theta + (2e_{15} + e_{31}) \cos^3 \theta + (2e_{15} + e_{31}) \Gamma_s \cos \theta \\
l_d^r(\theta) &= e_{15} \cos^3 \theta + (e_{33} - e_{31} - e_{15}) \sin^2 \theta \cos \theta \\
m_d^r(\theta) &= [(2e_{33} - 7e_{15} - 3e_{31}) \cos^2 \theta + (e_{15} + e_{31})(\sin^2 \theta - \Gamma_s)] \sin \theta - 2e_{33} \sin^3 \theta + e_{15} \Gamma_c \cos \theta \\
n_d^r(\theta) &= [(4e_{15} + 2e_{31} - 3e_{33}) \sin^2 \theta - (2e_{15} + e_{31}) \cos^2 \theta - 2(e_{15} + e_{31}) \Gamma_s + e_{31} \Gamma_s^2] \cos \theta \\
f_d^\theta(\theta) &= (e_{15} + e_{31} - e_{33}) \sin \theta \cos^2 \theta - e_{15} \sin^3 \theta \\
g_d^\theta(\theta) &= (2e_{33} - e_{31} - 3e_{15}) \sin^2 \theta \cos \theta + (e_{15} + e_{31}) \cos^3 \theta \\
h_d^\theta(\theta) &= [(2e_{33} - 5e_{15} - 2e_{31}) \cos^2 \theta - e_{15} \Gamma_s] \sin \theta + (e_{15} + e_{31} - e_{33}) \sin^3 \theta + (e_{15} + e_{31}) \Gamma_c \cos \theta \\
l_d^\theta(\theta) &= -e_{33} \sin^3 \theta - (2e_{15} + e_{31}) \sin \theta \cos^2 \theta \\
m_d^\theta(\theta) &= (5e_{15} + 3e_{31} - 4e_{33}) \sin^2 \theta \cos \theta - (3e_{15} + e_{31}) \cos^3 \theta - (2e_{15} + e_{31}) \Gamma_s \cos \theta \\
n_d^\theta(\theta) &= [(5e_{15} + 2e_{31} - 2e_{33}) \cos^2 \theta + (e_{33} - e_{15} - e_{31}) \sin^2 \theta + (e_{15} + e_{31}) \Gamma_s + e_{31} \Gamma_c^2] \sin \theta \\
&\quad - (e_{15} + e_{31}) \Gamma_c \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_d^\phi(\theta) &= -\zeta_{11} \sin^2 \theta - \zeta_{33} \cos^2 \theta \\
g_d^\phi(\theta) &= (\zeta_{33} - \zeta_{11}) \sin 2\theta \\
h_d^\phi(\theta) &= -\zeta_{11} \cos^2 \theta - \zeta_{33} \sin^2 \theta - \zeta_{11} \Gamma_s \\
l_d^\phi(\theta) &= -\zeta_{11} \cos^2 \theta - \zeta_{33} \sin^2 \theta \\
m_d^\phi(\theta) &= (\zeta_{11} - \zeta_{33}) \sin 2\theta - \zeta_{11} \Gamma_c
\end{aligned} \tag{2-24}$$

### 2.3 奇异性特征方程

基于轴对称界面端奇异场的渐近展开一阶近似假设, 奇异点附近的位移场和电势可表示成如下变量分离的级数形式

$$u_r(r, \theta) = r^s \Lambda_r(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^s \Lambda_\theta(\theta), \quad \phi(r, \theta) = r^s \Lambda_\phi(\theta) \tag{2-25}$$

式中,  $s$  是奇异特征值,  $\Lambda_r(\theta)$  和  $\Lambda_\theta(\theta)$  分别表示  $r$  向和  $\theta$  向的位移角函数,  $\Lambda_\phi(\theta)$  表示电势角函数。

将式(2-25)应用于各向同性弹性材料的本构方程(2-18), 可得变量分离形式的应力分量

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{rr}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{vv}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) \end{Bmatrix} &= r^{s-1} \begin{Bmatrix} \Sigma_{rr}(\theta) \\ \Sigma_{\theta\theta}(\theta) \\ \Sigma_{vv}(\theta) \\ \Sigma_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix} = r^{s-1} \begin{bmatrix} \lambda[1 + \zeta_1(\theta)] & \lambda\zeta_2(\theta) \\ \lambda[1 + \zeta_1(\theta)] + 2\mu & \lambda\zeta_2(\theta) \\ \lambda + (\lambda + 2\mu)\zeta_1(\theta) & (\lambda + 2\mu)\zeta_2(\theta) \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Lambda_r(\theta) \\ \Lambda_\theta(\theta) \end{Bmatrix} \\
&+ r^{s-1} s \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ \lambda & 0 \\ \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Lambda_r(\theta) \\ \Lambda_\theta(\theta) \end{Bmatrix} + r^{s-1} \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & \lambda + 2\mu \\ 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Lambda_r(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Lambda_\theta(\theta)}{\partial \theta} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-26}$$

其中

$$\zeta_1(\theta) = \frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta}, \quad \zeta_2(\theta) = \frac{\cos \theta}{\delta + \sin \theta} \tag{2-27}$$

同理, 将式(2-25)应用于平衡方程(2-19), 消除公因子  $r^{s-2}$  后可得

$$(\tilde{a}_{k1} + \tilde{a}_{k2})s^2 + (\tilde{b}_{k1} + \tilde{b}_{k2})s + \tilde{c}_{k1} + \tilde{c}_{k2} = 0 \tag{2-28}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{\rho 1} &= \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{1-2\nu} \Lambda_r(\theta) \\
\tilde{a}_{\rho 2} &= \cos \theta \Lambda_\theta(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{z1} &= \frac{2(1-\nu)\cos\theta}{1-2\nu}\Lambda_r(\theta) \\
\tilde{a}_{z2} &= -\sin\theta\Lambda_\theta(\theta) \\
\tilde{b}_{\rho 1} &= \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{2(1-\nu)\sin^2\theta}{\delta+\sin\theta}\Lambda_r(\theta)+\cos\theta\frac{\partial\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta}\right) \\
\tilde{b}_{\rho 2} &= \frac{\sin\theta}{1-2\nu}\left(\frac{2(1-\nu)\cos\theta}{\delta+\sin\theta}\Lambda_\theta(\theta)+\frac{\partial\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta}\right) \\
\tilde{b}_{z1} &= \frac{\sin\theta}{1-2\nu}\left(\frac{2(1-\nu)\cos\theta}{\delta+\sin\theta}\Lambda_r(\theta)-\frac{\partial\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta}\right) \\
\tilde{b}_{z2} &= \frac{1}{\delta+\sin\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{1-2\nu}-\sin^2\theta\right)\Lambda_\theta(\theta)+\frac{\cos\theta}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta^2} \\
\tilde{c}_{\rho 1} &= \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{(\delta+\sin\theta)^2}-\sin\theta\right)\Lambda_r(\theta) \\
&\quad +\frac{1}{1-2\nu}\left((3-4\nu)\cos\theta+\frac{\sin 2\theta}{\delta+\sin\theta}\right)\frac{\partial\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta^2} \\
\tilde{c}_{\rho 2} &= \frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{2(1-\nu)\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}-(3-4\nu)\sin\theta\right)\frac{\partial\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta} \\
&\quad -\cos\theta\left[1+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\sin\theta}{\delta+\sin\theta}+\frac{1}{(\delta+\sin\theta)^2}\right)\right]\Lambda_\theta(\theta)+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cos\theta\frac{\partial^2\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta^2} \\
\tilde{c}_{z1} &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(2\cos\theta+\frac{\sin 2\theta}{\delta+\sin\theta}\right)\Lambda_r(\theta)+\frac{1}{\delta+\sin\theta}\left(\cos^2\theta-\frac{\sin^2\theta}{1-2\nu}\right)\frac{\partial\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta} \\
&\quad -\frac{(3-4\nu)\sin\theta}{1-2\nu}\frac{\partial\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta}+\cos\theta\frac{\partial^2\Lambda_r(\theta)}{\partial\theta^2} \\
\tilde{c}_{z2} &= \left(\sin\theta-\frac{\cos^2\theta}{\delta+\sin\theta}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\sin^2\theta}{\delta+\sin\theta}\right)\Lambda_\theta(\theta) \\
&\quad -\frac{1}{1-2\nu}\left((3-4\nu)\cos\theta+\frac{(1-\nu)\sin 2\theta}{\delta+\sin\theta}\right)\frac{\partial\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta}-\frac{2(1-\nu)\sin\theta}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Lambda_\theta(\theta)}{\partial\theta^2}
\end{aligned} \tag{2-29}$$

将式(2-25)应用于横观各向同性压电材料的本构方程(2-21), 可得变量分离形式的应力和电位移分量

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \sigma_{rr}(r, \theta) \\ \sigma_{vv}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) \\ D_r(r, \theta) \\ D_\theta(r, \theta) \end{array} \right] = r^{s-1} \left[ \begin{array}{c} \Sigma_{rr}(\theta) \\ \Sigma_{vv}(\theta) \\ \Sigma_{\theta\theta}(\theta) \\ \Sigma_{r\theta}(\theta) \\ \Sigma_r(\theta) \\ \Sigma_\theta(\theta) \end{array} \right] = r^{s-1} \left[ \begin{array}{ccc} b_{rr}'(\theta) & b_{rr}^\theta(\theta) & b_{rr}^\phi(\theta) \\ b_{vv}'(\theta) & b_{vv}^\theta(\theta) & b_{vv}^\phi(\theta) \\ b_{\theta\theta}'(\theta) & b_{\theta\theta}^\theta(\theta) & b_{\theta\theta}^\phi(\theta) \\ b_{r\theta}'(\theta) & b_{r\theta}^\theta(\theta) & b_{r\theta}^\phi(\theta) \\ b_r'(\theta) & b_r^\theta(\theta) & b_r^\phi(\theta) \\ b_\theta'(\theta) & b_\theta^\theta(\theta) & b_\theta^\phi(\theta) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \Lambda^r(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Lambda^\theta(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Lambda^\phi(\theta)}{\partial \theta} \end{array} \right] \\
& + r^{s-1} \left[ \begin{array}{c} a_{rr}'(\theta) & a_{rr}^\theta(\theta) & a_{rr}^\phi(\theta) \\ a_{vv}'(\theta) & a_{vv}^\theta(\theta) & a_{vv}^\phi(\theta) \\ a_{\theta\theta}'(\theta) & a_{\theta\theta}^\theta(\theta) & a_{\theta\theta}^\phi(\theta) \\ a_{r\theta}'(\theta) & a_{r\theta}^\theta(\theta) & a_{r\theta}^\phi(\theta) \\ a_r'(\theta) & a_r^\theta(\theta) & a_r^\phi(\theta) \\ a_\theta'(\theta) & a_\theta^\theta(\theta) & a_\theta^\phi(\theta) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} d_{rr}'(\theta) & d_{rr}^\theta(\theta) & d_{rr}^\phi(\theta) \\ d_{vv}'(\theta) & d_{vv}^\theta(\theta) & d_{vv}^\phi(\theta) \\ d_{\theta\theta}'(\theta) & d_{\theta\theta}^\theta(\theta) & d_{\theta\theta}^\phi(\theta) \\ d_{r\theta}'(\theta) & d_{r\theta}^\theta(\theta) & d_{r\theta}^\phi(\theta) \\ d_r'(\theta) & d_r^\theta(\theta) & d_r^\phi(\theta) \\ d_\theta'(\theta) & d_\theta^\theta(\theta) & d_\theta^\phi(\theta) \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \Lambda^r(\theta) \\ \Lambda^\theta(\theta) \\ \Lambda^\phi(\theta) \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{2-30}$$

同理，将式(2-25)应用于平衡方程(2-23)，消除公因子  $r^{s-2}$  后可得

$$(s^2 \mathbf{A} + s\mathbf{B} + \mathbf{C}) \{ \Lambda_r(\theta) \quad \Lambda_\theta(\theta) \quad \Lambda_\phi(\theta) \}^T = 0 \tag{2-31}$$

其中，矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  的元素可表示为

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\zeta^\tau &= f_\zeta^\tau(\theta) \\
\mathbf{B}_\zeta^\tau &= g_\zeta^\tau(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - f_\zeta^\tau(\theta) + h_\zeta^\tau(\theta) \\
\mathbf{C}_\zeta^\tau &= l_\zeta^\tau(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + m_\zeta^\tau(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + n_\zeta^\tau(\theta)
\end{aligned} \tag{2-32}$$

对于各向同性弹性结合材料，联立式(2-12)和(2-13)，可得仅用角函数表示的界面连续条件和自由表面条件

$$\begin{aligned}
\Lambda_{r,1}(\phi_0) &= \Lambda_{r,2}(\phi_0) \\
\Lambda_{\theta,1}(\phi_0) &= \Lambda_{\theta,2}(\phi_0) \\
\Sigma_{\theta\theta,1}(\phi_0) &= \Sigma_{\theta\theta,2}(\phi_0) \\
\Sigma_{r\theta,1}(\phi_0) &= \Sigma_{r\theta,2}(\phi_0) \\
\Sigma_{\theta\theta,k}(\phi_k) &= \Sigma_{r\theta,k}(\phi_k) = 0
\end{aligned} \tag{2-33}$$

对于压电/导体结合材料，联立式(2-14)和(2-15)，可得仅用角函数表示的界面连续条件和自由表面条件

$$\begin{aligned}
\Lambda_{r,1}(\phi_0) &= \Lambda_{r,2}(\phi_0) \\
\Lambda_{\theta,1}(\phi_0) &= \Lambda_{\theta,2}(\phi_0) \\
\Lambda_{\phi,2}(\phi_0) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\theta\theta,1}(\varphi_0) &= \Sigma_{\theta\theta,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{r\theta,1}(\varphi_0) &= \Sigma_{r\theta,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{\theta\theta,k}(\varphi_k) &= \Sigma_{r\theta,k}(\varphi_k) = \Sigma_{r,2}(\varphi_2) = \Sigma_{\theta,2}(\varphi_2) = 0\end{aligned}\quad (2-34)$$

对于压电/压电结合材料，联立式(2-16)和(2-17)，可得仅用角函数表示的界面连续条件和自由表面条件

$$\begin{aligned}\Lambda_{r,1}(\varphi_0) &= \Lambda_{r,2}(\varphi_0) \\ \Lambda_{\theta,1}(\varphi_0) &= \Lambda_{\theta,2}(\varphi_0) \\ \Lambda_{\phi,1}(\varphi_0) &= \Lambda_{\phi,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{\theta\theta,1}(\varphi_0) &= \Sigma_{\theta\theta,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{r\theta,1}(\varphi_0) &= \Sigma_{r\theta,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{\theta,1}(\varphi_0) &= \Sigma_{\theta,2}(\varphi_0) \\ \Sigma_{\theta\theta,k}(\varphi_k) &= \Sigma_{r\theta,k}(\varphi_k) = \Sigma_{\theta,k}(\varphi_k) = 0\end{aligned}\quad (2-35)$$

界面连续条件、自由边界条件和降阶后的平衡方程，构成了一个与角变量  $\theta$  以及奇异特征值  $s$  有关的一维边值问题，即奇异性特征方程。

## 2.4 小结

本章从弹性力学各向同性弹性结合材料和导体/压电结合及横观各向同性压电/压电结合材料空间轴对称问题的基本方程出发，基于轴对称界面端的奇异性支配区域内的位移场和电势的一阶近似假设，利用坐标变换和变量分离技术，导出了双材料轴对称界面端的奇异性特征方程。

## 第3章 奇异性特征方程的无网格法求解

### 3.1 无网格法

无网格法起源于 20 世纪 70 年代，是最近 10 多年计算力学领域最活跃的研究热点之一。无网格法回避了有限元计算中的网格畸变带来的困难，并且容易局部地嵌入与主体数学物理模型相关联的其他计算模型，使得它在解决裂纹扩展、冲击破坏、材料失效、局部相变、局部大变形失稳，以及多尺度耦合等问题方面显示出了越来越大的潜力。

无网格法的基本思想是在求解域上任意设置有限个节点，采用节点权函数（或核函数）来表征节点及其领域内的物理和力学量，即利用节点权函数近似地表示其影响域内的位移函数和物理场函数，进而形成与节点位移和节点物理场相关的系统刚度方程，进行求解。无网格法与有限元法和有限差分法的根本区别在于它免除了定义在求解域上的网格结构，不受网格约束，可以方便的在求解区域内增加和减少节点，从而可以极大地改善局部区域内的求解精度。

无网格法的基本计算步骤为：(1)将求解域按节点进行离散；(2)确定节点影响域的权函数或形函数；(3)计算节点刚度矩阵并集合成总体刚度矩阵，形成系统总刚度方程组；(4)施加边界条件，求解场变量。

#### 3.1.1 无网格法函数近似

无网格法的形函数是局部支持的，即形函数只通过一小局部域中的一组场节点构造，该形函数不能用于该局部域之外。位于不同位置的点的场变量，由于其局部支持域各不相同，其插值形函数各自不同。

求解域中的任一点  $x = (x, y, z)$  处场变量  $u$  用该点的局部支持域中的场节点的函数值插值为

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i, \quad (3-1)$$

式中， $n$  为包含在点  $x$  的局部支持域中的节点常量， $u_i$  为节点  $i$  的节点场变量， $\phi_i(x)$  为点  $x$  支持域中节点  $i$  的形函数。另外，对于同一点  $x$  的场变量，可以选用不同的支持域构造其

插值形函数，通常为矩形或圆形。

### 3.1.2 形函数构造

本文所用的无网格法为固定核重构法<sup>[53]</sup>。对于支持域  $\Omega$  上定义的函数  $u$ ，当固定核位于点  $(x_k, y_k)$  时，函数用修正核函数积分近似为

$$u^a(x, y) = \int_{\Omega} P^T(x, y) M^{-1} P(s, t) \varphi(x_k - s, y_k - t) u(s, t) ds dt \quad (3-2)$$

其离散形式为

$$u^a(x, y) = \sum_{I=1}^n N_I(x, y) u_I \quad (3-3)$$

其中， $n$  为支持域内的所有节点数， $u_I$  为未知节点场变量， $N_I(x, y)$  为固定核插值函数，具体为

$$N_I(x, y) = P^T(x, y) M^{-1} P(x_1, y_1) \varphi(x_k - x_1, y_k - y_1) \Delta V_I \quad (3-4)$$

$\Delta V_I$  为节点  $I$  的节点体积，可设置为单位体积 1。 $P^T(s, t) = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  为  $m \times 1$  维基函数，对于上面所示二维问题，一阶基函数为

$$P^T(s, t) = [1, s, t] \quad (3-5)$$

二阶基函数为

$$P^T(s, t) = [1, s, t, s^2, st, t^2] \quad (3-6)$$

$M$  为与基函数相关的  $m \times m$  阶矩阵，具体计算公式为

$$M_{ij} = \sum_{I=1}^n P_i(x_I, y_I) \varphi(x_k - x_I, y_k - y_I) P_j(x_I, y_I) \Delta V_I \quad (3-7)$$

其中， $\varphi(x, y)$  为权函数。

### 3.1.3 权函数

权函数是构造形函数的核心，权函数选择是否得当，直接影响了问题求解的好坏。如在求解域上  $\Omega$ ，分布有若干节点，节点  $x_I$  具有圆形或者矩形的权函数影响域  $\Omega_I$ 。假设有权函数  $\varphi(x - x_I)$ ，其中  $x$  为求解域中任意点对应的坐标， $x_I$  是求解域中节点  $I$  对应的节点坐标，则权函数的选择应满足下列条件：

(1)  $\varphi(x - x_i) > 0$  (在影响域  $\Omega_i$  内)

(2)  $\varphi(x - x_i) = 0$  (在影响域  $\Omega_i$  外)

(3)  $\int_{\Omega} \varphi(x - x_i) d\Omega = 0$  (在整个域  $\Omega_i$  上)

(4)  $\varphi(x - x_i)$  为单调减函数, 即它随着  $x$  到  $x_i$  的距离的增加而减小

可以看出, 权函数是一个紧支函数, 即它只在对于节点  $x_i$  生成的  $\varphi(x - x_i) \neq 0$  的局部区域内有定义, 而在其它区域为零。使权函数有定义的局部区域一般称为紧支撑域或者权函数影响域。权函数与空间距离有关, 假设

$$\varphi(x - x_i) = \varphi(d) \quad (3-8)$$

其中,  $d$  为计算域中任意点到节点  $x_i$  的距离, 即  $d = \|x - x_i\|$ 。对于圆形权函数影响域, 设其半径为  $a$ , 对式(4-8)的自变量做无量纲处理, 可得

$$\varphi(d/a) = \varphi(\bar{d}) \quad (3-9)$$

式中,  $\bar{d} = d/a$  为无量纲权函数影响半径。根据权函数的选取原则, 可以构造出许多满足这些条件的权函数, 其中在数值计算中常见的有:

(1) 幂权函数

$$\varphi(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-(\bar{d}/\alpha)} & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-10)$$

其中,  $\alpha$  的通常取值为  $\alpha = 0.4$ 。

(2) 三次样条函数

$$\varphi(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-11)$$

(3) B 样条插值函数

$$\varphi(\bar{d}) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 6\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ (1 - \bar{d})^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-12)$$

### 3.2 轴对称界面端的奇异性特征方程

采用无网格法，数值求解第二章的一维边值问题。取二阶基函数为

$$P^T(x) = [1, x, x^2] \quad (3-13)$$

权函数为

$$\varphi(x_K - x_I) = \frac{1}{d} \begin{cases} 0 & 2 < z_I \\ (2 - z_I)^3 / 6 & 1 < z_I \leq 2 \\ (2/3) - z_I^2(1 - z_I/2) & 0 \leq z_I \leq 1 \end{cases} \quad (3-14)$$

其中， $z_I = |(x_K - x_I)/d|$ ， $d$  表示支持域在  $x$  方向的大小。

无网格法离散双材料轴对称界面端模型时，每种材料占据的区域具有各自独立的离散节点分布。位于双材料界面上的坐标相同的节点对，由于分属于不同的离散节点分布，因而插值函数不同。用  $n_k$  表示材料  $k$  所属区域的离散节点个数， $N_{j,k}(\theta_i)$  表示核函数的中心固定于  $\theta_i$  且相应于区域  $k$  的第  $j$  个离散节点的插值函数， $N'_{j,k}(\theta_i)$  和  $N''_{j,k}(\theta_i)$  分别表示插值函数的一阶和二阶导数。位移和电势角函数及其导数的无网格近似形式为<sup>[53-55]</sup>

$$\begin{aligned} \Lambda_{\zeta,k}(\theta_i) &= N_{j,k}(\theta_i) \cdot \Lambda_{\zeta,k}^j = \mathbf{N}_k(\theta_i) \cdot \mathbf{\Lambda}_{\zeta,k} \\ \left. \frac{\partial \Lambda_{\zeta,k}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_i} &= N'_{j,k}(\theta_i) \cdot \Lambda_{\zeta,k}^j = \mathbf{N}'_k(\theta_i) \cdot \mathbf{\Lambda}_{\zeta,k} \\ \left. \frac{\partial^2 \Lambda_{\zeta,k}(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_i} &= N''_{j,k}(\theta_i) \cdot \Lambda_{\zeta,k}^j = \mathbf{N}''_k(\theta_i) \cdot \mathbf{\Lambda}_{\zeta,k} \end{aligned} \quad (3-15)$$

式中， $\Lambda_{\zeta,k}(\zeta = r, \theta, \phi)$  表示未知的节点位移和电势角函数列向量， $\mathbf{N}_k(\theta_i)$ 、 $\mathbf{N}'_k(\theta_i)$  和  $\mathbf{N}''_k(\theta_i)$  分别表示插值函数行向量及其一阶、二阶导数，重复指标  $j$  在  $1 \sim n_k$  范围内求和。

#### 3.2.1 各向同性弹性结合材料轴对称界面端

将式(3-15)应用于降阶形式的平衡方程(2-19)，可得

$$\begin{aligned}
& s^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{z,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,2}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,2}^\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{A}}_{z,2}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{z,2}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} + s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{z,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,2}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,2}^\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{B}}_{z,2}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{z,2}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{z,1}^\theta & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,2}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,2}^\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\mathbf{C}}_{z,2}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{z,2}^\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{3-16}$$

其中

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{\rho,k}^r]_{ij} = \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \sin \theta_i N_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{\rho,k}^\theta]_{ij} = \cos \theta_i N_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{z,k}^r]_{ij} = \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cos \theta_i N_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{A}}_{z,k}^\theta]_{ij} = -\sin \theta_i N_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{B}}_{\rho,k}^r]_{ij} = \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{2(1-\nu_k)}{\delta + \sin \theta_i} \sin^2 \theta_i N_{j,k}(\theta_i) + \frac{1}{1-2\nu_k} \cos \theta_i N'_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{B}}_{\rho,k}^\theta]_{ij} = \frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} N_{j,k}(\theta_i) + \frac{\sin \theta_i}{1-2\nu_k} N'_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{B}}_{z,k}^r]_{ij} = \frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} N_{j,k}(\theta_i) - \frac{\sin \theta_i}{1-2\nu_k} N'_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{B}}_{z,k}^\theta]_{ij} = \frac{1}{\delta + \sin \theta_i} \left( \frac{\cos^2 \theta_i}{1-2\nu_k} - \sin^2 \theta_i \right) N_{j,k}(\theta_i) + \frac{\cos \theta_i}{1-2\nu_k} N''_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{C}}_{\rho,k}^r]_{ij} = \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left( \frac{\cos^2 \theta_i}{\delta + \sin \theta_i} - \frac{\sin \theta_i}{(\delta + \sin \theta_i)^2} - \sin \theta_i \right) N_{j,k}(\theta_i)$$

$$+ \frac{1}{1-2\nu_k} \left( (3-4\nu_k) \cos \theta_i + \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} \right) N'_{j,k}(\theta_i) + \sin \theta_i N''_{j,k}(\theta_i)$$

$$[\tilde{\mathbf{C}}_{\rho,k}^\theta]_{ij} = -\frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \left( \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} + \frac{2 \cos \theta_i}{(\delta + \sin \theta_i)^2} \right) N_{j,k}(\theta_i) - \cos \theta_i N'_{j,k}(\theta_i)$$

$$+ \left( \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\cos^2 \theta_i}{\delta + \sin \theta_i} - \frac{3-4\nu_k}{1-2\nu_k} \sin \theta_i \right) N'_{j,k}(\theta_i) + \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cos \theta_i N''_{j,k}(\theta_i)$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathbf{C}}_{z,k}^r]_j &= \frac{\nu_k - 1}{1 - 2\nu_k} \left( 2\cos\theta_i + \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin\theta_i} \right) N_{j,k}(\theta_i) + \cos\theta_i N''_{j,k}(\theta_i) \\
&\quad + \left[ \frac{\cos^2\theta_i}{\delta + \sin\theta_i} \left( \cos^2\theta_i - \frac{\sin^2\theta_i}{1 - 2\nu_k} \right) - \frac{3 - 4\nu_k}{1 - 2\nu_k} \sin\theta_i \right] N'_{j,k}(\theta_i) \\
[\tilde{\mathbf{C}}_{z,k}^\theta]_j &= \frac{1}{\delta + \sin\theta_i} \left( \frac{\sin^2\theta_i}{1 - 2\nu_k} - \cos^2\theta_i \right) N_{j,k}(\theta_i) + \sin\theta_i N_{j,k}(\theta_i) \\
&\quad - \left( \frac{3 - 4\nu_k}{1 - 2\nu_k} \cos\theta_i + \frac{1 - \nu_k}{1 - 2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin\theta_i} \right) N'_{j,k}(\theta_i) - \frac{2(1 - \nu_k)}{1 - 2\nu_k} \sin\theta_i N''_{j,k}(\theta_i) \quad (3-17)
\end{aligned}$$

同样，可得无网格近似的界面连续条件

$$\begin{aligned}
&s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\kappa}_{\theta\theta,1}^r(\varphi_0) & \mathbf{0} & | & -\tilde{\kappa}_{\theta\theta,2}^r(\varphi_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\kappa}_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & | & \mathbf{0} & -\tilde{\kappa}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(\varphi_0) & \mathbf{0} & | & -\mathbf{N}_2(\varphi_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1(\varphi_0) & | & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_2(\varphi_0) \\ \tilde{\chi}_{\theta\theta,1}^r(\varphi_0) & \tilde{\chi}_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_0) & | & -\tilde{\chi}_{\theta\theta,2}^r(\varphi_0) & -\tilde{\chi}_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_0) \\ \tilde{\chi}_{r\theta,1}^r(\varphi_0) & \tilde{\chi}_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & | & -\tilde{\chi}_{r\theta,2}^r(\varphi_0) & -\tilde{\chi}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-18)
\end{aligned}$$

和自由表面条件

$$\begin{aligned}
&s \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{\theta\theta,1}^r(\varphi_1) & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\kappa}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_1) & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\kappa}_{\theta\theta,2}^r(\varphi_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \tilde{\kappa}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \tilde{\chi}_{\theta\theta,1}^r(\varphi_1) & \tilde{\chi}_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_1) & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\chi}_{r\theta,1}^r(\varphi_1) & \tilde{\chi}_{r\theta,1}^\theta(\varphi_1) & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\chi}_{\theta\theta,2}^r(\varphi_2) & \tilde{\chi}_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \tilde{\chi}_{r\theta,2}^r(\varphi_2) & \tilde{\chi}_{r\theta,2}^\theta(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-19)
\end{aligned}$$

式中

$$[\mathbf{N}_k(\varphi_0)]_j = N_{j,k}(\varphi_0)$$

$$[\tilde{\kappa}_{r\theta,k}^\theta(\varphi_i)]_j = \mu_k N_{j,k}(\varphi_i)$$

$$[\tilde{\kappa}_{\theta\theta,k}^\theta(\varphi_i)]_j = \lambda_k N_{j,k}(\varphi_i)$$

$$[\tilde{\chi}_{r\theta,k}^r(\varphi_i)]_j = \mu_k N'_{j,k}(\varphi_i)$$

$$[\tilde{\chi}_{\theta\theta,k}^r(\varphi_i)]_j = -\mu_k N_{j,k}(\varphi_i)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\chi}_{\theta\theta,k}^r(\varphi_i)]_j &= [\lambda_k + 2\mu_k + \lambda_k\zeta_1(\varphi_i)]N_{j,k}(\varphi_i) \\ [\tilde{\chi}_{\theta\theta,k}^\theta(\varphi_i)]_j &= \lambda_k\zeta_2(\varphi_i)N_j^{(k)}(\varphi_i) + (\lambda_k + 2\mu_k)N'_{j,k}(\varphi_i) \end{aligned} \quad (3-20)$$

位于双材料轴对称界面  $O'C$  上的离散节点，需满足界面连续条件(3-18)；坐落于自由表面  $O'A$  和  $O'B$  上的离散节点，需满足自由边界条件(3-19)；其余的所有内部离散节点，则需满足平衡方程(3-16)。用边界条件(3-18)和(3-19)依次替换平衡方程(3-16)中的对应行，可得关于奇异特征值  $s$  的非线性特征方程

$$(\hat{\mathbf{A}}s^2 + \hat{\mathbf{B}}s + \hat{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (3-21)$$

式中， $\mathbf{x} = \{\Lambda_{r,1}\}^T \quad \{\Lambda_{\theta,1}\}^T \quad \{\Lambda_{r,2}\}^T \quad \{\Lambda_{\theta,2}\}^T\}^T$ 。由于系数矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  是奇异的，上式仅能转化为如下关于  $\omega = s^{-1}$  的标准特征方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} & -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{y} \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

数值求解奇异性特征方程(3-22)，可以得到应力奇异性指数以及相应的位移角函数。

### 3.2.2 压电/导体结合材料轴对称界面端

将式(3-15)应用于降阶形式的平衡微分方程(3-16)，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} s^2 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{\rho,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{A}}_{z,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\rho,2}^r & \mathbf{A}_{\rho,2}^\theta & \mathbf{A}_{\rho,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{z,2}^r & \mathbf{A}_{z,2}^\theta & \mathbf{A}_{z,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{d,2}^r & \mathbf{A}_{d,2}^\theta & \mathbf{A}_{d,2}^\phi \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{\rho,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{B}}_{z,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\rho,2}^r & \mathbf{B}_{\rho,2}^\theta & \mathbf{B}_{\rho,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{z,2}^r & \mathbf{B}_{z,2}^\theta & \mathbf{B}_{z,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{d,2}^r & \mathbf{B}_{d,2}^\theta & \mathbf{B}_{d,2}^\phi \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,1}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{\rho,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{z,1}^r & \tilde{\mathbf{C}}_{z,1}^\theta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\rho,2}^r & \mathbf{C}_{\rho,2}^\theta & \mathbf{C}_{\rho,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{z,2}^r & \mathbf{C}_{z,2}^\theta & \mathbf{C}_{z,2}^\phi \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{d,2}^r & \mathbf{C}_{d,2}^\theta & \mathbf{C}_{d,2}^\phi \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \\ \Lambda_{\phi,2} \end{bmatrix} = 0 \quad (3-23)$$

其中，符号  $\Lambda_{\tau,k}$  表示  $n_k$  阶未知节点角函数列向量( $\tau = \rho, z, d$ )，各矩阵元素的显式表达式为

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= f_\zeta^\tau(\theta_i) N_{j,k}(\theta_i) \\ [\mathbf{B}_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= [-f_\zeta^\tau(\theta_i) + h_\zeta^\tau(\theta_i)] N_{j,k}(\theta_i) + g_\zeta^\tau(\theta_i) N'_{j,k}(\theta_i) \\ [\mathbf{C}_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= l_\zeta^\tau(\theta_i) N''_{j,k}(\theta_i) + m_\zeta^\tau(\theta_i) N'_{j,k}(\theta_i) + n_\zeta^\tau(\theta_i) N_{j,k}(\theta_i) \end{aligned} \quad (3-24)$$

同样，可得无网格近似的界面连续条件

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline s \kappa_{\theta\theta,1}'(\varphi_0) & \kappa_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\kappa_{\theta\theta,2}'(\varphi_0) & -\kappa_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\kappa_{\theta\theta,2}^\phi(\varphi_0) \\ \kappa_{r\theta,1}'(\varphi_0) & \kappa_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\kappa_{r\theta,2}'(\varphi_0) & -\kappa_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\kappa_{r\theta,2}^\phi(\varphi_0) \\ 0 & 0 & -\kappa_{\theta,2}'(\varphi_0) & -\kappa_{\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\kappa_{\theta,2}^\phi(\varphi_0) \\ \hline N_1(\varphi_0) & 0 & -N_2(\varphi_0) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\varphi_0) & 0 & -N_2(\varphi_0) & 0 \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc|ccc} \chi_{\theta\theta,1}'(\varphi_0) & \chi_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\chi_{\theta\theta,2}'(\varphi_0) & -\chi_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\chi_{\theta\theta,2}^\phi(\varphi_0) \\ \chi_{r\theta,1}'(\varphi_0) & \chi_{r\theta,1}^\theta(\varphi_0) & -\chi_{r\theta,2}'(\varphi_0) & -\chi_{r\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\chi_{r\theta,2}^\phi(\varphi_0) \\ 0 & 0 & -\chi_{\theta,2}'(\varphi_0) & -\chi_{\theta,2}^\theta(\varphi_0) & -\chi_{\theta,2}^\phi(\varphi_0) \end{array} \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (3-25)$$

和自由表面条件

$$\left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|ccc} \kappa_{\theta\theta,1}'(\varphi_1) & \kappa_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{r\theta,1}'(\varphi_1) & \kappa_{r\theta,1}^\theta(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \kappa_{\theta\theta,2}'(\varphi_1) & \kappa_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_1) & \kappa_{\theta\theta,2}^\phi(\varphi_1) \\ 0 & 0 & \kappa_{r\theta,2}'(\varphi_1) & \kappa_{r\theta,2}^\theta(\varphi_1) & \kappa_{r\theta,2}^\phi(\varphi_1) \\ 0 & 0 & \kappa_{\theta,2}'(\varphi_1) & \kappa_{\theta,2}^\theta(\varphi_1) & \kappa_{\theta,2}^\phi(\varphi_1) \\ \hline \chi_{\theta\theta,1}'(\varphi_1) & \chi_{\theta\theta,1}^\theta(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{r\theta,1}'(\varphi_1) & \chi_{r\theta,1}^\theta(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ + \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & \chi_{\theta\theta,2}'(\varphi_2) & \chi_{\theta\theta,2}^\theta(\varphi_2) & \chi_{\theta\theta,2}^\phi(\varphi_2) \\ 0 & 0 & \chi_{r\theta,2}'(\varphi_2) & \chi_{r\theta,2}^\theta(\varphi_2) & \chi_{r\theta,2}^\phi(\varphi_2) \\ 0 & 0 & \chi_{\theta,2}'(\varphi_2) & \chi_{\theta,2}^\theta(\varphi_2) & \chi_{\theta,2}^\phi(\varphi_2) \end{array} \right] \end{array} \right\} = 0 \quad (3-26)$$

其中

$$\begin{aligned} [\kappa_{\xi,k}'(\varphi_i)]_j &= a_{\xi,k}^i(\varphi_i)N_{j,k}(\varphi_i) \\ [\chi_{\xi,k}'(\varphi_i)]_j &= b_{\xi,k}^i(\varphi_i)N'_{j,k}(\varphi_i) + d_{\xi,k}^i(\varphi_i)N_{j,k}(\varphi_i) \end{aligned} \quad (3-27)$$

位于双材料轴对称界面  $O'C$  上的离散节点，需满足界面连续条件(3-25)；坐落于自由表面  $O'A$  和  $O'B$  上的离散节点，需满足自由边界条件(3-26)；其余的所有内部离散节点，则需满足平衡方程(3-23)。用边界条件(3-25) 和(3-26)依次替换平衡方程(3-23)中的对应行，可得关于奇异特征值  $s$  的非线性特征方程

$$(\hat{\mathbf{A}}s^2 + \hat{\mathbf{B}}s + \hat{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (3-28)$$

其中， $\mathbf{x} = \{\Lambda_{r,1}^T \ (\Lambda_{\theta,1})^T \ (\Lambda_{r,2})^T \ (\Lambda_{\theta,2})^T \ (\Lambda_{\phi,2})^T\}^T$ 。转化为关于  $\omega = s^{-1}$  的标准特征方程

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} & -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{x} \end{Bmatrix} = \omega \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (3-29)$$

数值求解奇异性特征方程(3-29)，可以得到应力和电位移奇异性指数( $1-s$ )以及相应的位移

和电势角函数，进而通过式(2-21)可得到应力和电位移分量的角函数。

### 3.2.3 压电/压电结合材料轴对称界面端

将式(3-15)应用于降阶形式的平衡微分方程(3-18)，可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}'_{\rho,1} & \mathbf{A}^{\theta}_{\rho,1} & \mathbf{A}^{\phi}_{\rho,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_{z,1} & \mathbf{A}^{\theta}_{z,1} & \mathbf{A}^{\phi}_{z,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_{d,1} & \mathbf{A}^{\theta}_{d,1} & \mathbf{A}^{\phi}_{d,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'_{\rho,2} & \mathbf{A}^{\theta}_{\rho,2} & \mathbf{A}^{\phi}_{\rho,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'_{z,2} & \mathbf{A}^{\theta}_{z,2} & \mathbf{A}^{\phi}_{z,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}'_{d,2} & \mathbf{A}^{\theta}_{d,2} & \mathbf{A}^{\phi}_{d,2} \end{array} \right] + s \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{B}'_{\rho,1} & \mathbf{B}^{\theta}_{\rho,1} & \mathbf{B}^{\phi}_{\rho,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{z,1} & \mathbf{B}^{\theta}_{z,1} & \mathbf{B}^{\phi}_{z,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{d,1} & \mathbf{B}^{\theta}_{d,1} & \mathbf{B}^{\phi}_{d,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}'_{\rho,2} & \mathbf{B}^{\theta}_{\rho,2} & \mathbf{B}^{\phi}_{\rho,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}'_{z,2} & \mathbf{B}^{\theta}_{z,2} & \mathbf{B}^{\phi}_{z,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}'_{d,2} & \mathbf{B}^{\theta}_{d,2} & \mathbf{B}^{\phi}_{d,2} \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{\Lambda_{r,1}\} \\ \{\Lambda_{\theta,1}\} \\ \{\Lambda_{\phi,1}\} \\ \{\Lambda_{r,2}\} \\ \{\Lambda_{\theta,2}\} \\ \{\Lambda_{\phi,2}\} \end{array} \quad (3-30)$$

$$+ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{C}'_{\rho,1} & \mathbf{C}^{\theta}_{\rho,1} & \mathbf{C}^{\phi}_{\rho,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}'_{z,1} & \mathbf{C}^{\theta}_{z,1} & \mathbf{C}^{\phi}_{z,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}'_{d,1} & \mathbf{C}^{\theta}_{d,1} & \mathbf{C}^{\phi}_{d,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_{\rho,2} & \mathbf{C}^{\theta}_{\rho,2} & \mathbf{C}^{\phi}_{\rho,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_{z,2} & \mathbf{C}^{\theta}_{z,2} & \mathbf{C}^{\phi}_{z,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_{d,2} & \mathbf{C}^{\theta}_{d,2} & \mathbf{C}^{\phi}_{d,2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \{\Lambda_{r,1}\} \\ \{\Lambda_{\theta,1}\} \\ \{\Lambda_{\phi,1}\} \\ \{\Lambda_{r,2}\} \\ \{\Lambda_{\theta,2}\} \\ \{\Lambda_{\phi,2}\} \end{array} = 0$$

同样，可得无网格近似的界面连续条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{k}'_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\theta}_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\phi}_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{k}'_{\theta\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\theta}_{\theta\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\phi}_{\theta\theta,2}(\varphi_0) \\ \mathbf{k}'_{r\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\phi}_{r\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{k}'_{r\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\phi}_{r\theta,2}(\varphi_0) \\ \mathbf{k}'_{\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{k}^{\phi}_{\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{k}'_{\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{k}^{\phi}_{\theta,2}(\varphi_0) \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{\Lambda_{r,1}\} \\ \{\Lambda_{\theta,1}\} \\ \{\Lambda_{\phi,1}\} \\ \{\Lambda_{r,2}\} \\ \{\Lambda_{\theta,2}\} \\ \{\Lambda_{\phi,2}\} \end{array} = 0 \quad (3-31)$$

$$+ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{N}_1(\varphi_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_2(\varphi_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1(\varphi_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_2(\varphi_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_1(\varphi_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_2(\varphi_0) \\ \hline \mathbf{\chi}'_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\theta}_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\phi}_{\theta\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}'_{\theta\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\theta}_{\theta\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\phi}_{\theta\theta,2}(\varphi_0) \\ \mathbf{\chi}'_{r\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\phi}_{r\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}'_{r\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\phi}_{r\theta,2}(\varphi_0) \\ \mathbf{\chi}'_{\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_0) & \mathbf{\chi}^{\phi}_{\theta,1}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}'_{\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_0) & -\mathbf{\chi}^{\phi}_{\theta,2}(\varphi_0) \end{array} \right] \begin{array}{l} \{\Lambda_{r,1}\} \\ \{\Lambda_{\theta,1}\} \\ \{\Lambda_{\phi,1}\} \\ \{\Lambda_{r,2}\} \\ \{\Lambda_{\theta,2}\} \\ \{\Lambda_{\phi,2}\} \end{array} \right]$$

和自由表面条件

$$\begin{aligned}
 & s \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \kappa'_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\theta}_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\phi}_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \kappa'_{r\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\phi}_{r\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \kappa'_{\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_1) & \kappa^{\phi}_{\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \kappa'_{\theta\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\theta}_{\theta\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\phi}_{\theta\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & \kappa'_{r\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\phi}_{r\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & \kappa'_{\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_2) & \kappa^{\phi}_{\theta,2}(\varphi_2) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{r,1} \\ \Lambda_{\theta,1} \\ \Lambda_{\phi,1} \end{array} \right\} = 0 \quad (3-32) \\
 & + \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \chi'_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\theta}_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\phi}_{\theta\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \chi'_{r\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\theta}_{r\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\phi}_{r\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \chi'_{\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\theta}_{\theta,1}(\varphi_1) & \chi^{\phi}_{\theta,1}(\varphi_1) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \chi'_{\theta\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\theta}_{\theta\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\phi}_{\theta\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & \chi'_{r\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\theta}_{r\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\phi}_{r\theta,2}(\varphi_2) \\ 0 & 0 & 0 & \chi'_{\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\theta}_{\theta,2}(\varphi_2) & \chi^{\phi}_{\theta,2}(\varphi_2) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{r,2} \\ \Lambda_{\theta,2} \\ \Lambda_{\phi,2} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

位于双材料轴对称界面  $O'C$  上的离散节点，需满足界面连续条件(3-31)；坐落于自由表面  $O'A$  和  $O'B$  上的离散节点，需满足自由边界条件(3-32)；其余的所有内部离散节点，则需满足平衡方程(3-30)。用边界条件(3-31)和(3-32)依次替换平衡方程(3-30)中的对应行，可得关于奇异特征值  $s$  的非线性特征方程

$$(\hat{\mathbf{A}}s^2 + \hat{\mathbf{B}}s + \hat{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (3-33)$$

其中， $\mathbf{x} = \{(\Lambda_{r,1})^T \ (\Lambda_{\theta,1})^T \ (\Lambda_{\phi,1})^T \ (\Lambda_{r,2})^T \ (\Lambda_{\theta,2})^T \ (\Lambda_{\phi,2})^T\}^T$ 。转化为关于  $\omega = s^{-1}$  的标准特征方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{A}} & -\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega\mathbf{x} \end{Bmatrix} = \omega \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega\mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (3-34)$$

数值求解奇异性特征方程(3-34)，可以得到应力和电位移奇异性指数  $(1-s)$  以及相应的位移和电势角函数，进而通过式(2-21)可得到应力和电位移分量的角函数。

### 3.3 小结

本章采用无网格中固定核重构法构造型函数，离散各向同性弹性结合材料、压电/导体结合材料及压电/压电结合材料轴对称界面端的奇异性特征方程，得到用位移角函数和电势角函数表示的界面连续条件和自由表面条件基本方程，以及奇异特征值  $s$  的非线性特征方程，数值求解特征方程可得出界面端应力和电位移奇异性指数及其相应的角函数。

## 第4章 算例

本章建立了各向同性弹性结合材料、压电/导体结合材料及压电/压电结合材料轴对称界面端的具体算例，并研究了径向尺寸对轴对称界面端奇异行为的影响。

### 4.1 材料属性

#### 1. 玻璃纤维

$$E = 81.5 \text{GPa}, \nu = 0.208$$

#### 2. 环氧树脂

$$E = 4.93 \text{GPa}, \nu = 0.33$$

#### 3. 导体 Al

$$E = 68.9 \text{GPa}, \nu = 0.25$$

#### 4. 压电材料: PZT-6B

$$c_{11} = 168 \text{GPa}, c_{12} = 60 \text{GPa}, c_{13} = 60 \text{GPa}, c_{33} = 163 \text{GPa}, c_{44} = 27.1 \text{GPa}$$

$$e_{15} = 4.6(C/m^2), e_{31} = -0.9(C/m^2), e_{33} = 7.1(C/m^2)$$

$$\varepsilon_{11} = 36 \times 10^{-10}(F/m), \varepsilon_{33} = 34 \times 10^{-10}(F/m)$$

#### 5. 压电材料: CdSe

$$c_{11} = 74.1 \text{GPa}, c_{12} = 45.2 \text{GPa}, c_{13} = 39.3 \text{GPa}, c_{33} = 83.6 \text{GPa}, c_{44} = 13.2 \text{GPa}$$

$$e_{15} = -0.138(C/m^2), e_{31} = -0.159(C/m^2), e_{33} = 0.347(C/m^2)$$

$$\varepsilon_{11} = 0.844 \times 10^{-10}(F/m), \varepsilon_{33} = 0.903 \times 10^{-10}(F/m)$$

#### 6. 压电材料: PZT-4

$$c_{11} = 139 \text{GPa}, c_{12} = 77.8 \text{GPa}, c_{13} = 74.3 \text{GPa}, c_{33} = 115 \text{GPa}, c_{44} = 25.6 \text{GPa}$$

$$e_{15} = -5.2(C/m^2), e_{31} = 15.1(C/m^2), e_{33} = 12.7(C/m^2)$$

$$\varepsilon_{11} = 64.6 \times 10^{-10}(F/m), \varepsilon_{11} = 56.2 \times 10^{-10}(F/m)$$

#### 7. 压电材料: BaTiO<sub>3</sub>

$$c_{11} = 275 \text{GPa}, c_{12} = 179 \text{GPa}, c_{13} = 152 \text{GPa}, c_{33} = 165 \text{GPa}, c_{44} = 54.3 \text{GPa}$$

$$e_{15} = 21.3(C/m^2), \quad e_{31} = -2.69(C/m^2), \quad e_{33} = 3.65(C/m^2)$$

$$\varepsilon_{11} = 175 \times 10^{-10}(F/m), \quad \varepsilon_{33} = 9.88 \times 10^{-10}(F/m)$$

## 4.2 各向同性弹性材料

采用图 2 所示的纤维/基体轴对称界面端模型( $\theta_0 = 0, \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi/2$ ), 验证文中提出的基于一阶近似的特征值法的有效性, 并分析尺寸效应参数  $\delta$ (纤维半径与应力奇异性支配区域大小的比值)对界面端应力奇异行为的影响。其中纤维增强材料为玻璃纤维, 基体为环氧树脂。

准一阶近似的理论分析表明: 轴对称界面端  $O$  附近的奇异应力场只有单个实数应力奇异性指数, 其大小为 0.336。

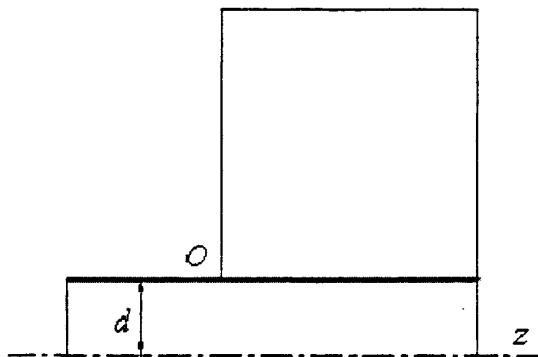


图 2 纤维/基体轴对称界面端

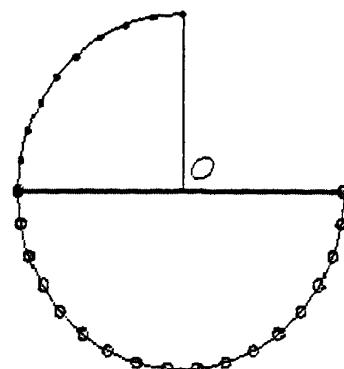


图 3 无网格节点分布

双材料轴对称界面端模型的无网格节点分布, 由两个隶属于不同材料区域的各自独立

的节点分布组成：实点表示基体内的节点分布和空心圆表示纤维内的节点分布，如图 3 所示。两个节点分布内的插值函数是相互独立的。位于界面上的两个节点，尽管有相同的角坐标，但是由于分属于不同的节点分布，故而插值函数不同。

应力奇异性指数对于离散节点数的收敛曲线如图 4 所示，计算时所取的  $\delta$  值远大于 1。随着离散节点数的增加，应力奇异性指数快速趋近于点划线表示的理论解。当总的离散节点个数为 92 时，数值结果与理论解的相对误差小于 0.3%。由特征分析得到的位移和应力角函数分布如图 5 和 6 所示，以符号表示的数值分析结果与用实线表示的理论解非常吻合。可见：只需很少的离散节点，就可达到很高的计算精度。

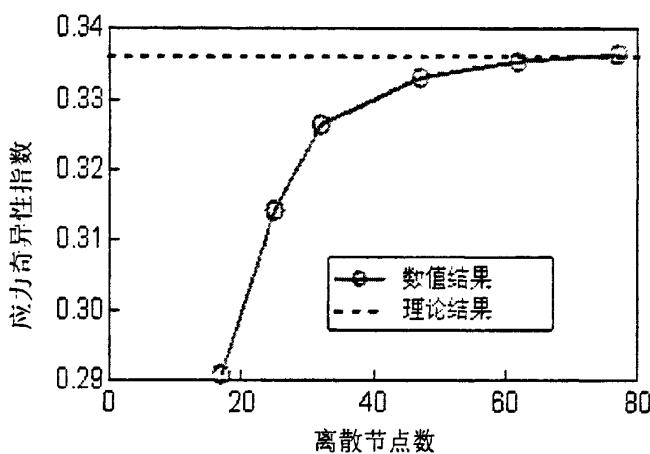


图 4 应力奇异性指数的收敛性

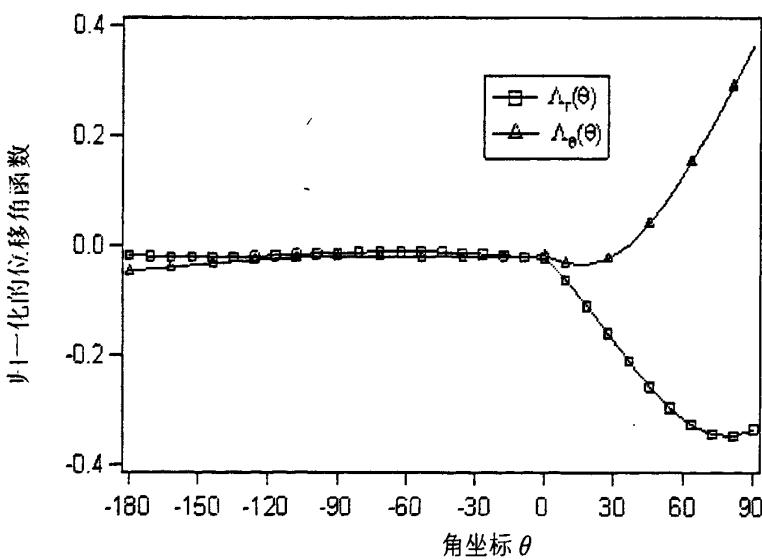


图 5 归一化的位移角函数分布

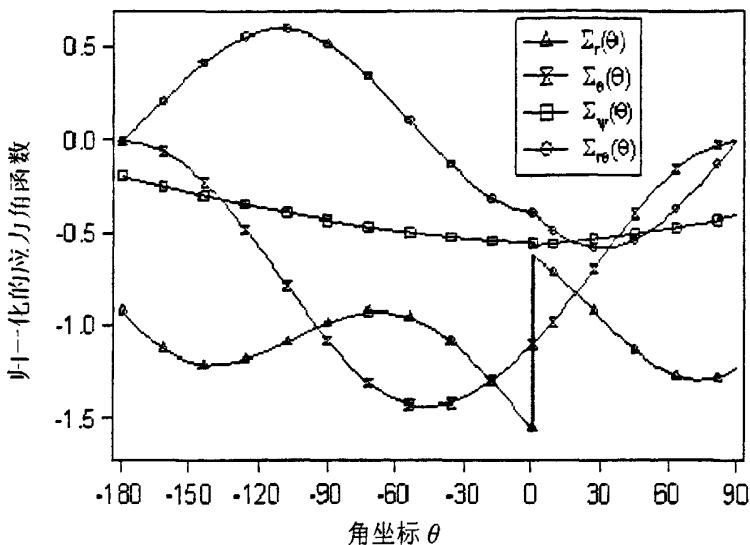
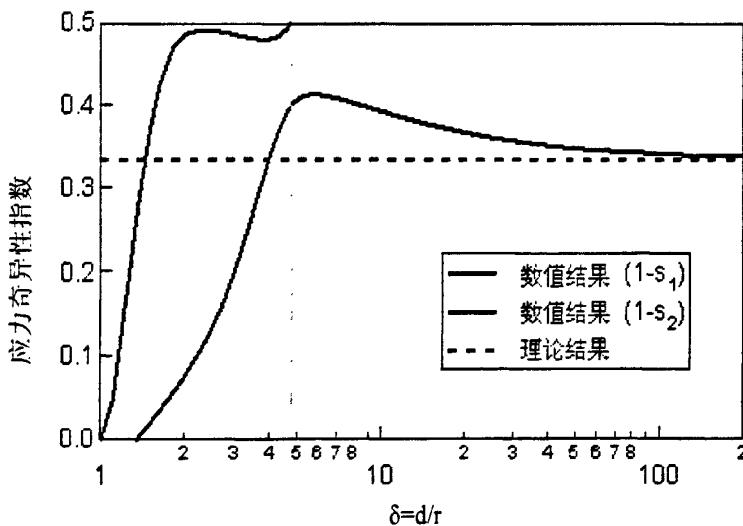


图 6 归一化的应力角函数分布

图 7 尺寸效应参数  $\delta$  对应力奇异行为的影响

纤维径向尺寸与奇异性支配区域大小的比值  $\delta$  变化时，轴对称界面端的奇异应力场的应力奇异性的强弱和阶次也随之变化。对于图 2 所示的纤维/基体轴对称界面端模型，尺寸效应参数  $\delta$  与奇异性指数  $(1-s)$  的关系曲线如图 7 所示。当  $1 < \delta \leq 4.76$  时，奇异应力场有两重实数奇异性，较强的一个在  $\delta = 4.76$  时有最大值 0.5。当  $\delta > 4.76$  时，只有一个实数应力奇异性，且随着  $\delta$  的增大  $(1-s)$  逐渐减小并最终趋近于常数。当纤维半径比奇异性支配区域大小高两个以上数量级时，特征值法得到的一阶近似数值结果与准一阶近似解析解一致。可见：准一阶近似的解析解无法准确描述轴对称界面端的应力奇异行为，仅在  $\delta \gg 1$

时才能适用。

### 4.3 压电/导体结合材料

压电/导体结合材料轴对称界面端模型如图 8 所示。界面结合角  $\theta_0 = 0^\circ$ ，界面  $\theta_1 = -90^\circ$ ， $\theta_2 = 90^\circ$ ，下标中的 1 和 2 分别表示材料 1 和材料 2。

采用图 8 所示的压电/导体轴对称界面端模型验证文中提出的基于一阶近似的特征值法对求解压电/导体轴对称界面端应力和电位移奇异性指数的有效性，并分析尺寸效应参数  $\delta$  对界面端应力和电位移奇异行为的影响。

例 A. 压电材料 PZT-6B 和导体材料 Al 结合，准一阶近似的理论分析表明：轴对称界面端 O 附近的奇异应力场和奇异电位移场只有一个实数应力和电位移奇异性指数，其大小为 0.023。

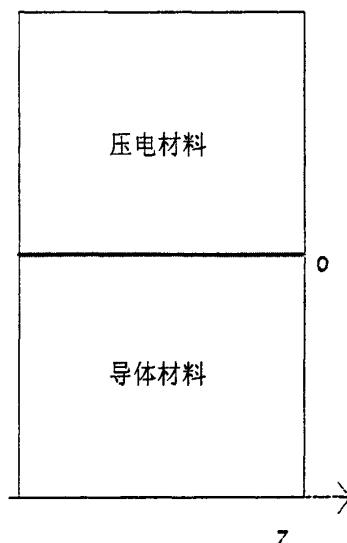


图 8 压电/导体轴对称界面端

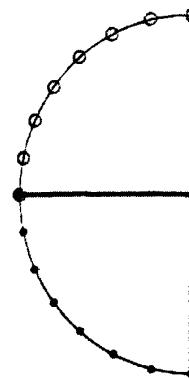


图 9 无网格节点分布

压电/导体结合材料轴对称界面端模型的无网格节点分布，由两个分别隶属于压电材料区域和导体材料区域的各自独立的节点分布组成：实点表示导体材料内的节点分布，空心圆表示压电材料内的节点分布，如图 9 所示。两个节点分布内的插值函数是相互独立的。位于界面上的两个节点，插值函数不同。计算时所取的  $\delta$  值远大于 1。随着离散节点数的增加，应力和电位移奇异性指数快速趋近于点划线表示的理论解。由特征值法分析得到的位移角函数、电势角函数、应力和电位移角函数分布如图 10、图 11、图 12 和图 13 所示，并研究了尺寸效应对界面端奇异行为的影响，如图 14 所示。

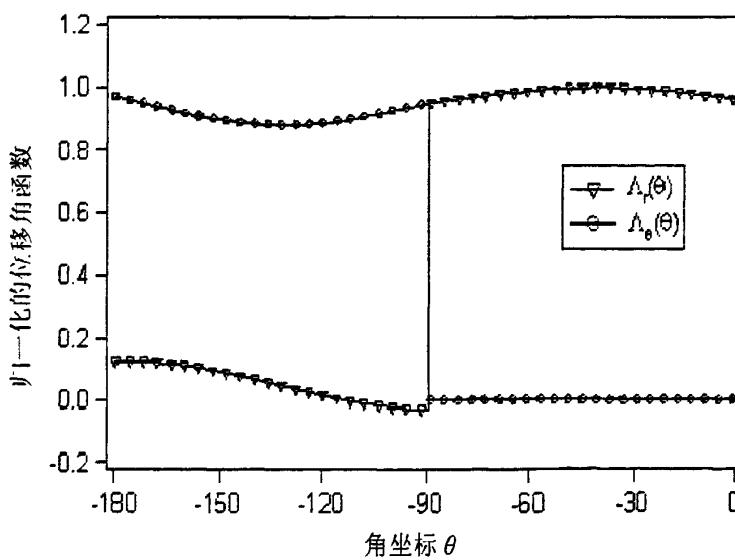


图 10 归一化的位移角函数

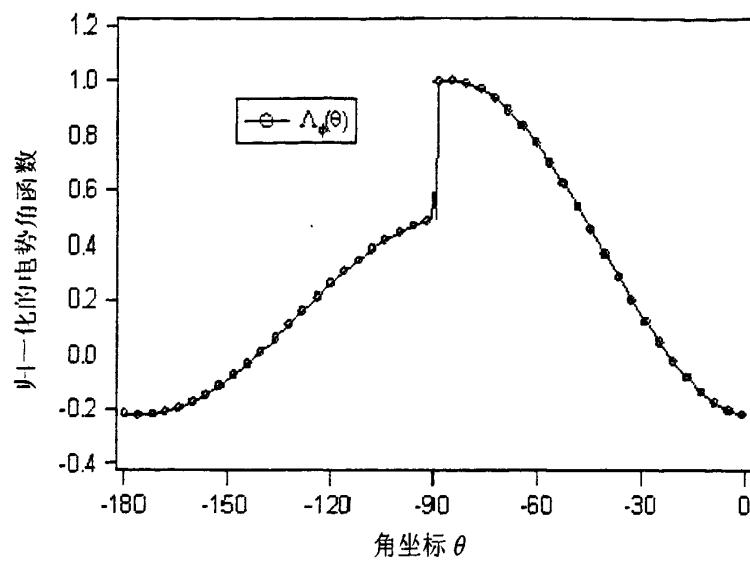


图 11 归一化的电势角函数

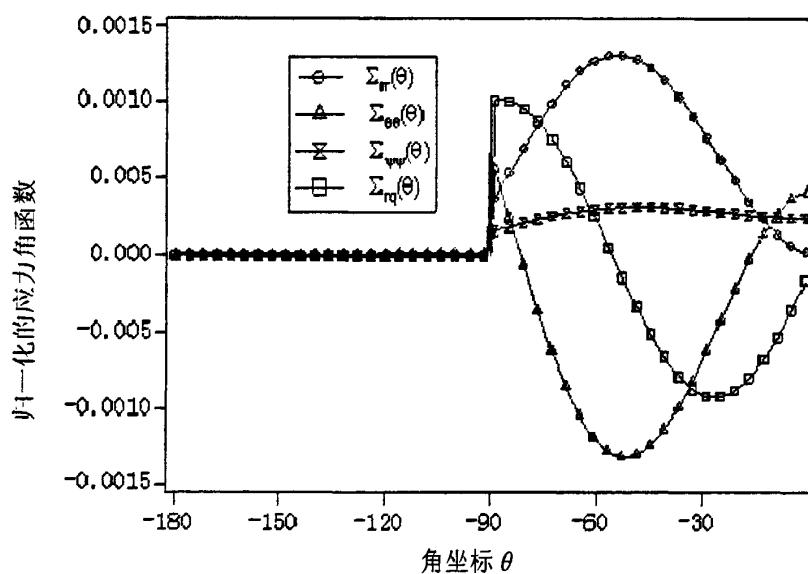


图 12 归一化的应力角函数

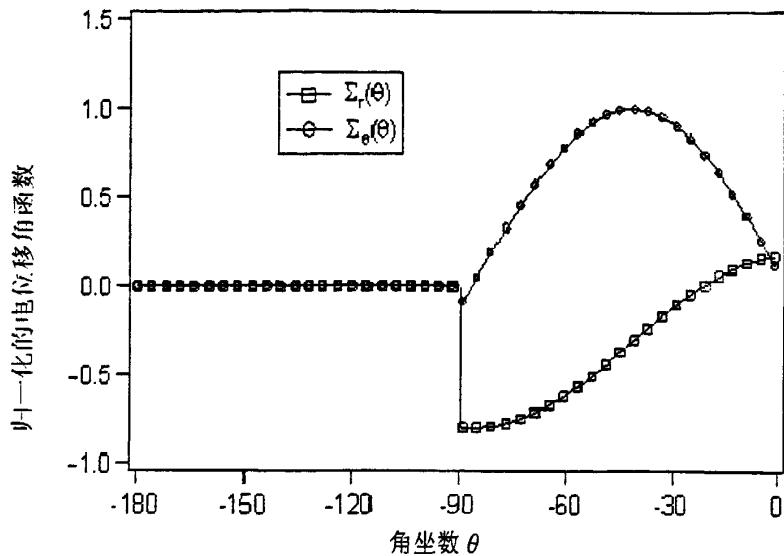
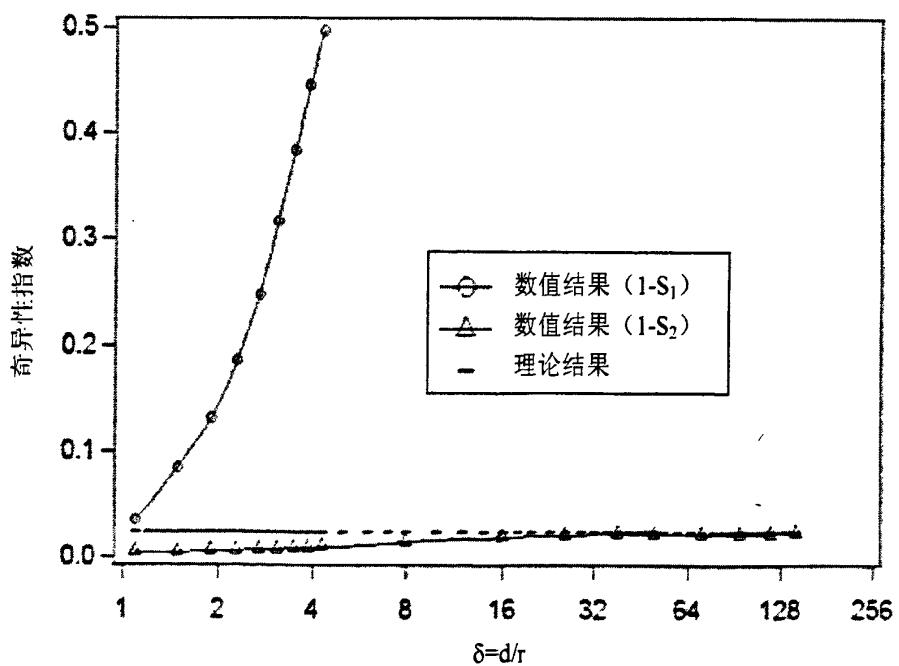


图 13 归一化的电位移角函数

图 14 尺寸效应参数  $\delta$  对奇异行为的影响

径向尺寸与奇异性支配区域大小的比值  $\delta$  变化时, 轴对称界面端的应力和电位移奇异性 的强弱和阶次也随之变化。对于图 8 所示的压电/导体结合材料轴对称界面端模型, 尺寸效应参数  $\delta$  与奇异性指数  $(1-s)$  的关系曲线如图 14 所示, 当  $1 < \delta \leq 4.3$  时, 奇异应力场

和奇异电位移场有两重实数奇异性，较强的一个在  $\delta = 4.3$  时有最大值 0.499。当  $\delta > 4.3$  时，只有一个实数应力和电位移奇异性，且随着  $\delta$  的增大  $(1-s)$  逐渐增大并最终趋近于理论解 0.023。

#### 4.4 压电/压电结合材料

压电/压电结合材料轴对称界面端模型也采用图 8 所示的模型（图 8 的导体材料改变为压电材料），轴对称界面端模型的无网格节点分布，由两个隶属于两种不同压电材料区域的各自独立的节点分布组成。两个节点分布内的插值函数是相互独立的。位于界面上的两个节点的插值函数不同。计算时所取的  $\delta$  的值远大于 1。随着离散节点数的增加，应力和电位移奇异性指数快速趋近于点划线表示的理论解。下面用一个例子分别验证文中提出的基于一阶近似的特征值法对求解压电/压电轴对称界面端应力和电位移奇异性指数的有效性，并分析尺寸效应参数  $\delta$  对界面端应力和电位移奇异行为的影响。

例 B. 压电材料 CdSe 和 PZT-6B 结合，准一阶近似的理论分析表明：轴对称界面端  $O$  附近的奇异应力场和奇异电位移场只有一个实数应力和电位移奇异性指数，其大小为 0.072。计算时所取的  $\delta$  值远大于 1。随着离散节点数的增加，应力和电位移奇异性指数快速趋近于点划线表示的理论解。由特征值法分析得到的位移角函数、电势角函数、应力和电位移角函数分布如图 15、图 16、图 17 和图 18 所示，并研究了尺寸效应对界面端奇异行为的影响，如图 19 所示。

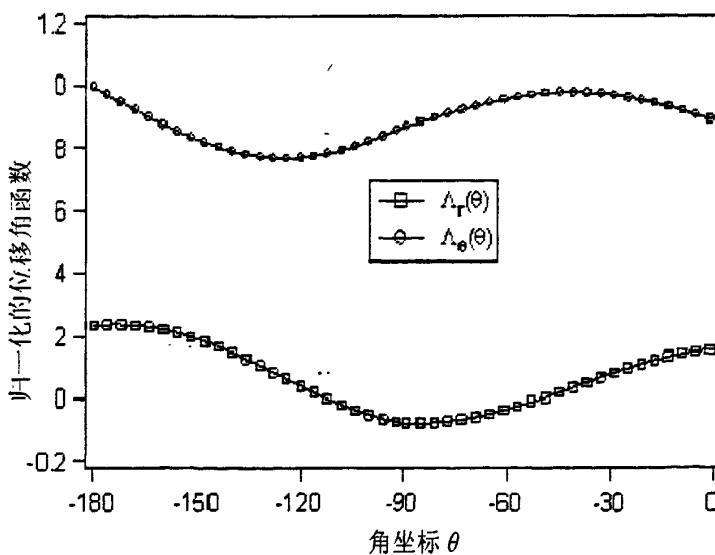


图 15 归一化的位移角函数

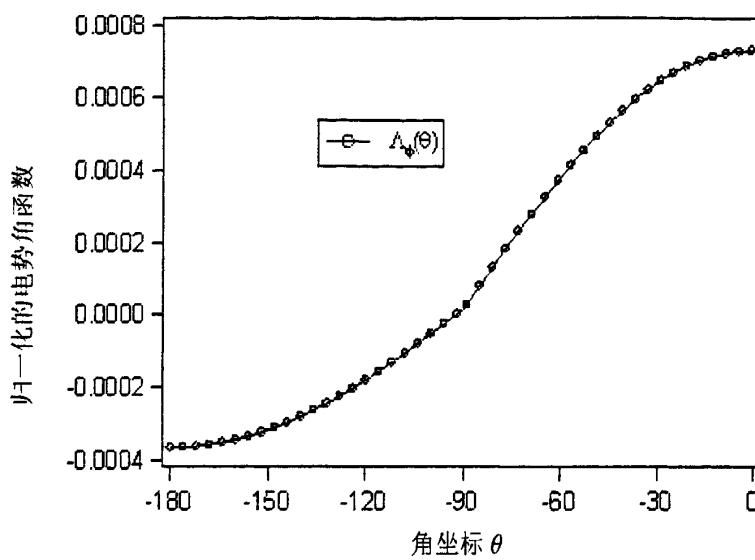


图 16 归一化的电势角函数

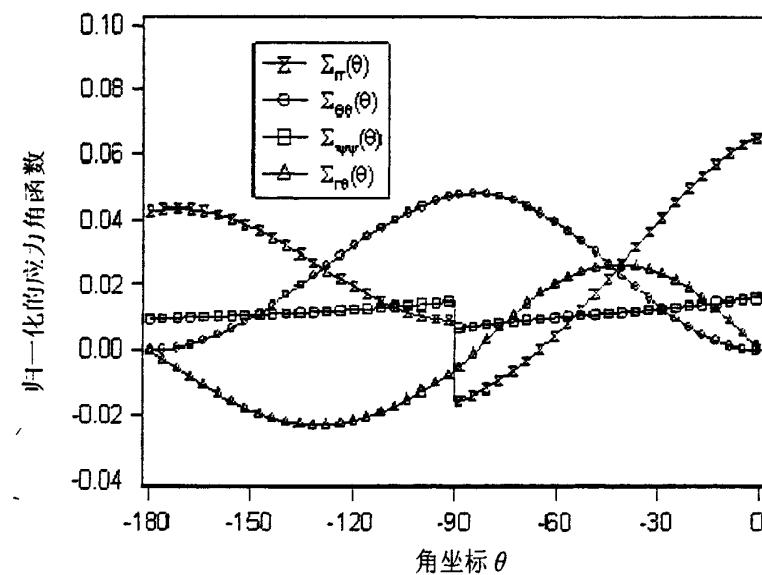


图 17 归一化的应力角函数

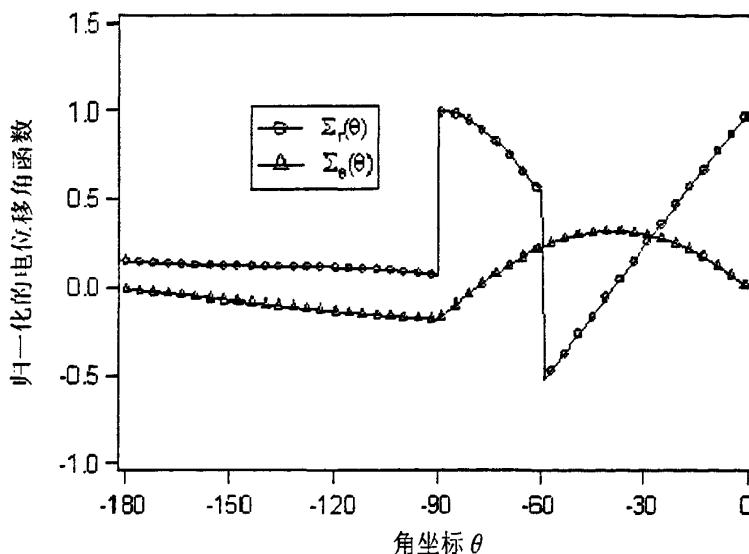
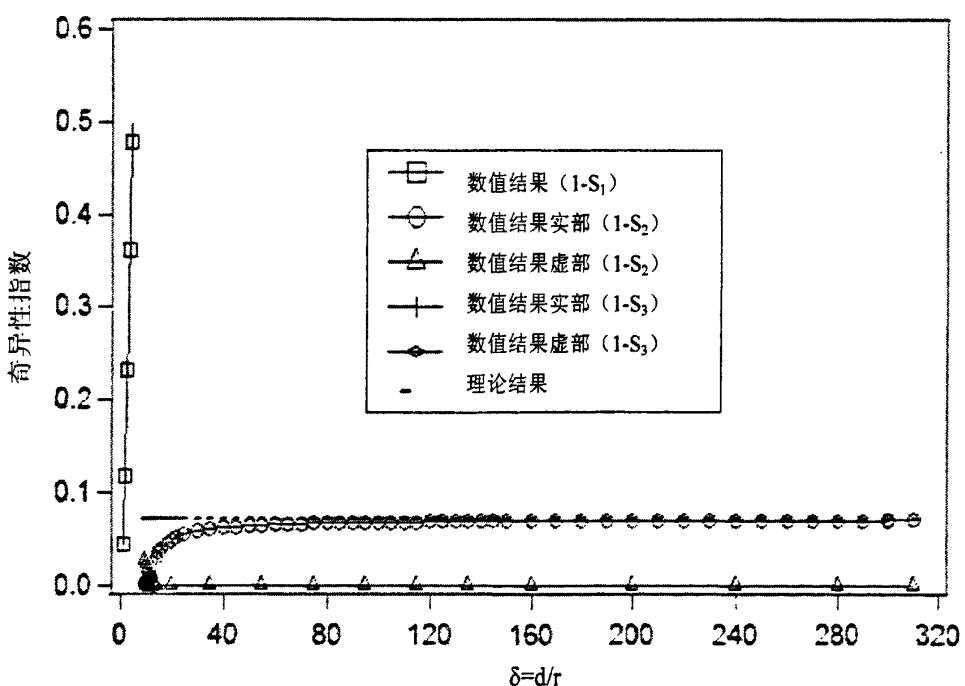


图 18 归一化的电位移角函数

图 19 尺寸效应参数  $\delta$  对奇异行为的影响

径向尺寸与奇异性支配区域大小的比值  $\delta$  变化时，轴对称界面端的应力和电位移奇异性 的强弱和阶次也随之变化。对于图 8 所示（看为压电/压电结合材料）轴对称界面端模 型，尺寸效应参数  $\delta$  与奇异性指数  $(1-s)$  的关系曲线如图 19 所示，当  $1 < \delta \leq 8.15$  时，奇异

应力场和奇异电位移场有两重实数奇异性，较强的一个在  $\delta=8.15$  时有最大值 0.499。当  $\delta > 8.15$  时，只有一个实数应力和电位移奇异性，且随着  $\delta$  的增大 ( $1-s$ ) 逐渐增大，最终趋近于理论解 0.072。

## 4.5 小结

本章建立了各向同性弹性结合材料轴对称界面端奇异点附近的奇异应力场，压电/导体结合材料及压电/压电结合材料轴对称界面端奇异点附近的奇异应力场和奇异电位移场的具体算例。数值求解得到各向同性弹性结合材料轴对称界面端的应力奇异性指数及相应的角函数、压电/导体结合材料和压电/压电结合材料轴对称界面端的应力和电位移奇异性指数及相应的角函数。

本章还研究了尺寸效应对各向同性弹性结合材料界面端应力奇异行为的影响及压电/导体结合材料、压电/压电结合材料界面端应力和电位移奇异行为的影响。

## 第5章 结论与展望

### 5.1 结论

针对复合材料的结构和应用中大量存在的轴对称界面端和圆柱裂纹问题,本文提出了一种分析各向同性弹性结合材料轴对称界面端的奇异应力场的特征值法、压电/导体及压电/压电结合材料轴对称界面端的奇异应力场和奇异电位移场的特征值法。主要工作和成果如下:

1. 基于各向同性弹性材料、压电/导体结合材料和压电/压电结合材料空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设,利用分离变量形式的位移和电势函数,分析了具有任意界面角和结合角的各向同性弹性结合材料、压电/导体结合材料及压电/压电结合材料轴对称界面端问题,导出了关于应力和电位移奇异性指数及应力和电位移角函数的奇异性特征方程,并用无网格方法对其进行了数值离散。求解离散化的特征方程,可以得到各向同性弹性结合材料轴对称界面端的各阶应力奇异性指数及相应的角函数、压电/导体结合材料和压电/压电结合材料轴对称界面端的各阶应力和电位移奇异性指数、相应的位移和电势角函数、及应力和电位移角函数。
2. 用三个具体的算例分别验证文中提出的基于一阶近似的特征值法对求解各向同性结合材料轴对称界面端的应力奇异性指数、压电/导体结合材料及压电/压电结合材料轴对称界面端的应力和电位移奇异性指数的有效性,并分析了尺寸效应参数 $\delta$ 对结合材料轴对称界面端的奇异行为的影响。

### 5.2 展望

1. 本文的一阶近似特征值法,可以确定各向同性弹性结合材料轴对称界面端的应力奇异性指数,及相应的角函数。也可以确定压电/导体结合材料和横观各向同性压电/压电结合材料轴对称界面端的各阶应力和电位移奇异性指数及相应的角函数。
2. 在本文研究的基础上,可以进一步探讨数值求解各向异性材料和压电材料界面端的应力奇异行为的方法。
3. 关于尺寸效应的影响,本文只讨论了应力和电位移奇异性指数的变换,没有涉及相应的角函数。另外对于尺寸效应的研究文献比较少,本文的结果有待于进一步的对比。

## 参 考 文 献

- [1] Williams M L. The stress round a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959, 49: 199-204.
- [2] Williams M L and Calif P. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1952, 19: 526-528.
- [3] Williams M L and Calif P. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1952, 19: 526-528.
- [4] Erdogan F. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1963, 30: 232-236.
- [5] Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 403-410.
- [6] Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 829~836.
- [7] England A H. A crack between dissimilar media. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 400-402.
- [8] Sih G C and Rice J R. The bending of plates of dissimilar materials with cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1964, 31: 477-482.
- [9] Rice J R and Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1965, 32: 418-423.
- [10] England A H. An arc crack around a circular elastic inclusion. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33: 637-640.
- [11] Comninou M, Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46: 345-348.
- [12] Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1988, 55: 98-103.
- [13] Zak A R and Williams M L. Crack point stress singularities at a bi-material interface. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1963, 30: 142-143.
- [14] Bogy D B. On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38: 911-916
- [15] Bogy D B. The plane elastostatic solution for a symmetrically loaded crack in a strip composite. *International Journal of Engineering Science*, 1973, 11: 985-996.
- [16] Ozbek T, Erdogan F. Some elasticity problems in fiber-reinforced composites with imperfect bonds[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1969, 7: 931-946.
- [17] 戴瑛, 稽醒, 石川晴雄. 轴对称圆柱界面裂纹的应力奇异性[J]. 上海力学, 1994, 15: 29-39.
- [18] Itou S. Stresses around a cylindrical interface crack under shear[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1990, 36: 631-638.
- [19] Zbib H M, Hirth J P, Demir I. The stress intensity factor of cylindrical crack[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1995, 33: 247-253.

- [20] 王清, 稽醒, 王远功. 纤维增强复合材料圆柱形界面裂纹分析[J]. 力学学报, 1997, 29: 421-428.
- [21] 刘一华, 许金泉, 丁皓江. 轴对称圆柱界面端的应力奇异性[J]. 浙江大学学报(自然科学版), 1998, 32(3): 307-314.
- [22] 刘一华, 许金泉, 丁皓江. 纤维端部的界面裂纹分析[31]. 力学学报, 1999, 31(3): 285-291.
- [23] 傅丽娟, 姜国栋, 戴瑛. 横观各向同性轴对称界面端奇异性研究[J]. 力学季刊, 2007, 28(4): 604-611
- [24] Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1965, 32:829-836.
- [25] 郑百林, 稽醒, 王远功. 复合材料中垂直界面裂纹扩展至界面时裂尖奇异性分析[J]. 上海力学, 1997, 18: 375-379.
- [26] Pagano N J, Kaw A K. Asymptotic stresses around a crack tip at the interface between planar or cylindrical bodies[J]. International Journal of Fracture, 1995, 71: 151-164.
- [27] Wang Q, Ji X, Wang Y G. 3D axisymmetric analysis of a cracked fiber in a transversely isotropic elastic medium[J]. Mechanics Research Communications, 1996, 23:171-174.
- [28] Zak A R. Elastic analysis of cylindrical configurations with stress singularities[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1972, 39:501-506.
- [29] Gecit M R. Axisymmetric contact problem for a semi-finite cylinder an a half space[J]. International Journal of Engineering Science, 1986, 24: 1245-1256.
- [30] Tsuji T, Shibuya T, Koizumi T. Axially-loaded stepped cylindrical rod[J]. Transactions of Japan Society Mechanics Engineers, 1985, A51: 638-647.
- [31] Noda N, Tsuji T. Stress singularities in edge-bonded dissimilar wedges(three dimensional axisymmetric elastic problems)[J]. Transactions of Japan Society Mechanics Engineers, 1992, A58: 275-278.
- [32] Kuo C M and Barnett D M. Stress singularities of interfacial cracks in bonded piezoelectric half-spaces. In Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications (eds Wu J J, Ting T C T and Barnett D M), SIAM, Philadelphia, 1991, 33-50.
- [33] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M and Willis J R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40: 739-765.
- [34] Beom H G and Atluri S N. Near-tip fields and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media. International Journal of Fracture, 1996, 75: 163-183.
- [35] Chen Z T and Yu S W. Antiplane shear problem for a crack between two dissimilar piezoelectric materials. International Journal of Fracture, 1997, 86: L9-L12.
- [36] Qin Q H and Yu S W. An arbitrarily-oriented plane crack terminating at the interface between dissimilar piezoelectric materials. International Journal of Solids and Structures, 1997, 34: 581-590.
- [37] Chung MY and Ting TCT. Line force change and dislocation in anisotropic piezoelectric composite wedges and spaces. ASME Journal of Applied Mechanics, 1995, 62: 423-428.
- [38] Xu X L and Rajapakse PKND. On singularities in composite piezoelectric wedges and junctions International Journal of Solids and Stuctures, 2000, 37: 3252-3275.
- [39] Chue CH and Chen CD. Decoupled formulation of piezoelectric elasticity under generalized plane deformation and its application wedges problems. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39: 3131-3135.
- [40] 王效贵, 许金泉. 特征值为二重根的压电材料异材界面断裂奇性[J]. 力学季刊, 2001, 22: 55-61.

- [41] Xu J Q and Yoshiharu MUTOH. Singularity at the interface edge of bonded transversely isotropic piezoelectric dissimilar materials. JSME International Journal, 2001, 44: 556-566.
- [42] Li Y L and Yutaka Sato. Stress singularity analysis of axisymmetric piezoelectric bonded structure. JSME International Journal, 2002, 45: 422-435.
- [43] Li Y L, Hu S Y, Munz D and Yang Y Y. Asymptotic description of the stress field around the bonded edge of cylindrical joint. Archive of Applied Mechanics, 1998, 68: 552-565.
- [44] 戴文芳, 金延中, 曹宗杰. 中心裂纹压电材料板的断裂问题分析[J]. 2009, 22: 74-77.
- [45] 王海涛, 余锦炎. 双压电材料界面力电耦合场奇异性研究[J]. 2006, 23: 165-171.
- [46] 段士杰, 张庆海, 刘淑红. 含不可渗透边裂纹压电材料反平面问题的解[J]. 2006, 23: 214-217.
- [47] 冯晓霞, 李星. 共线双裂纹压电材料无限长条的反平面问题[J]. 2007, 28: 297-300.
- [48] 王海涛, 杨笑梅. 用裂纹单位分析双压电材料界面力电耦合奇异场[J]. 2007, 24: 170-178.
- [49] Chen T and Yen W J. Piezoelectric analogy of generalized torsion in anisotropic elasticity, Journal of Elasticity, 1998, 49: 239-256.
- [50] Sosa H A and Pak Y E. Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material, International Journal of Solids and Structures, 1990, 26: 1-15.
- [51] Stroh A N. Steady state problems in anisotropic elasticity, Journal of Mathematical Physics, 1962, 41: 77-103.
- [52] Ting T C T, Jin Y and Chou S C, Eigenfunctions at a singular point in transversely isotropic materials under axisymmetric deformations. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52: 565-569.
- [53] Aluru N R, Li G. Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50: 2373-2410.
- [54] Wang X G. A boundary value method for the singular behavior of bimaterial systems under inplane loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(20): 5513-5535.
- [55] 刘更, 刘天祥, 谢琴. 无网格法及其应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2005.

## 致 谢

首先诚挚的感谢导师王效贵的悉心指导，从论文的选题、设计到开题报告乃至论文的最终完成，都倾注了导师的大量心血和劳动。导师严谨的学风，深刻的思想，敏捷的思维，坚实的理论功底，以及高尚的品格，为我树立了人生的楷模，不时的讨论并指点我正确的方向，使我在这三年中获益匪浅。老师对学问的严谨更是我辈学习的典范。在论文完成之际，由衷的感谢导师对我的教诲和帮助。因为有您的体谅及帮忙，使得本论文能够更完整而严谨。

其次感谢浙江工业大学机械工程学院，我的同学张盛明及其师弟尹东辉、贺建国、师兄张元祥对我的帮助，以及机械工程学院 2007 级研究生同学，特别是许扬中、刘飞、毛鹏展、钱方琦、郑升伟、陈春晓等的关心和帮助，在此表示深深的感谢，同窗之间的友谊永远长存。

三年的日子，实验室里共同的生活点滴，学术上的讨论、言不及义的闲扯、让人又爱又怕的宵夜、赶作业的革命情感、因为睡太晚而遮遮掩掩闪进实验室……，感谢众位学长姐、同学、学弟妹的共同砥砺，你们的陪伴让我三年的研究生生活变得绚丽多彩。最后，谨以此文献给我挚爱的双亲。感谢我的爸爸、妈妈，养育之恩，无以回报，谢谢弟弟、妹妹对我的支持与理解，你们永远健康快乐是我最大的心愿。

衷心祝福关爱我的人们！

王美 浙江 杭州

2010 年 4 月

## 攻读学位期间发表的论文

- [1] 王效贵, 王美. 双材料轴对称界面端的应力奇异性[J]. 力学学报, 2010.