

分类号 密级

U D C 编号

中南大學

CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

硕士学位论文

论文题目 大地电磁二维有限元

正演数值模拟

学科、专业 地球探测与信息技术

研究生姓名 曾国

导师姓名及
专业技术职务 何继善 (院士)

摘要

大地电磁测深法 (MT) 是以岩石的电性差异为基础和前提, 利用天然交变电磁场研究地球电性结构的勘探方法。当前 MT 数据使用最多的还是一维和二维反演解译, 而正演是反演的基础, 本文研究起伏地形条件下 MT 的正演, 为反演的实现提供更加充分的正演支持。

本文将有限单元法用于二维大地电磁场起伏地形正演计算。文中首先从麦克斯韦方程组出发, 对二维介质大地电磁边值问题和变分问题满足的微分方程进行推导, 用矩形单元对研究区域进行剖分, 每个剖分单元分别采用双线性插值和双二次插值进行插值, 然后把求解二维大地电磁变分问题转化为求解一组多元线性代数方程组。用矩形单元剖分来研究带地形条件下大地电磁场有限元数值模拟计算, 编写出实用的正演程序, 通过计算各种模型断面大地电磁场的分布, 研究不同地形地质条件下大地电磁场响应特征的分布规律。

为了检验程序的正确性, 本文设计了均匀层状模型、均匀半空间中含有电性异常体模型、有地表起伏的均匀半空间模型, 并给出了这些模型由本文程序、解析解得到的结果和图件, 验证了本程序的正确性。

通过 2 个典型起伏地形模型讨论了地形起伏对 MT 视电阻率的影响, 证实了复杂地表下 2 种极化模式的 MT 观测资料都有明显的异常, 并且以 TM 模式尤为严重。

关键字: 大地电磁测深法, 有限单元法, 正演, 数值模拟

ABSTRACT

Magnetotelluric(MT) is a kind of exploration methods of study of the structure of the earth using natural electromagnetic field, based on the difference between the rock for the foundation and precondition. Currently the inversion of MT data is still in one-and two-dimensional interpretation of inversion, but forward modeling is base of inversion, in this paper, the forward with topography is studied and become the basis of the forward.

Two-dimensional magnetotelluric response with topography is calculated by finite element method in this paper, In the first, boundary value problems of the two-dimensional magnetotelluric is derived from Maxwell's, and its weak solution is getted by variational theory. Rectangular element is used for all models, and shape function for each element is linear interpolation and second interpolation. Last, the finite element solution is obtained by solving large, sparse linear system. By rectangular element, magnetotelluric response with topography is modeling by finite element method. A forward program is made, and magnetotelluric response for different topography is study and distribution of magnetotelluric field is compared and analysed.

The program is verified by comparison with the analytic response of a symmetrical ladders model and with finite difference results of laterally inhomogeneous model and topographic model.

We discuss topographic effects in magnetotelluric surveys by two topographic models and confirm there lies in topographic effects in both transverse electric mode and transverse magnetic mode (especially the transverse magnetic mode).

KEY WORDS: magnetotelluric sounding method, infinite element method, forward problem, numerical simulation

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
目 录.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 大地电磁测深正演问题的研究现状.....	1
1.3 研究的目的与意义.....	3
1.4 本文的主要工作及结构.....	4
第二章 二维大地电磁正演模拟的基本原理.....	5
2.1 边值问题.....	5
2.2 变分问题.....	10
2.3 有限单元法.....	11
2.3.1 有限单元法插值理论基础.....	11
2.3.2 矩形单元、双线性插值.....	14
2.3.3 矩形单元、双二次插值.....	18
2.4 计算视电阻率和相位.....	21
第三章 程序实现.....	24
3.1 程序流程图.....	24
3.2 起伏地形模拟的实现.....	24
3.3 程序中应用技巧.....	27
3.3.1 采用文件形式读取模型参数.....	27
3.3.2 加边界条件.....	29
3.3.3 解线性代数方程组.....	30
第四章 模型计算与分析.....	31
第五章 结论与建议.....	55
5.1 本文的主要研究成果.....	55
5.2 不足及需要改进之处.....	56
参考文献.....	57
附 录.....	60
致 谢.....	78
攻读硕士学位期间主要研究成果.....	79

第一章 绪论

1.1 引言

大地电磁测深法 (Magnetotelluric Sounding, 简称 MT 法) 是地球物理学中重要的方法, 由苏联学者 Tikhonov^[1] (1950) 和 Cagniard^[2] (1953) 于上世纪 50 年代提出来的。它以岩石的电性差异为基础和前提, 在实际应用中, 它属于频率域电磁法中的一种方法, 是一种利用天然交变电磁场研究地球电性结构的有效方法。由于它不用人工供电, 成本低, 工作方便, 不受高阻层屏蔽, 对低阻层分辨率高, 而且勘探深度仅与电磁场的频率有关, 浅可以几十米, 深可达数百公里, 因此在许多领域得到了广泛的应用。

该法在国内外的地热田的调查、矿产普查和勘探、地壳和上地幔电性结构的研究、海洋地球物理、环境地球物理和地质工程中都发挥着重要的作用, 在关系国计民生的能源尤其是在石油天然气勘探方面, 发挥着举足轻重的作用^[3]。

1.2 大地电磁测深正演问题的研究现状

大地电磁测深法提出之初, 假定源是垂直入射的平面电磁波, 并且地球是水平均匀层状介质。这时的正演问题是垂直入射的均匀平面电磁波源下的一维介质模型的边值问题, 一维大地电磁正反演, 相对成熟。随着理论研究的深入, 研究的重点逐步转向二维、三维问题。对于二维、三维正演问题, 一般情况下不存在解析解, 需要采用物理模拟或数值模拟技术来求解。在计算机如此发达的今天, 数字模拟比物理模拟更容易实现, 对于实际资料的处理解释, 数值模拟方法更显示出巨大的优势。

大地电磁测深模拟的数值方法主要分为三种: 有限差分法、积分方程法和有限单元法, 这三种方法各有优缺点。

(1)、有限差分法 (Finite Difference Method 或简称为 FDM)。这是一种经典的数值模拟计算方法, 其基本原理就是用差商代替微商, 将待求解的连续微分方程变换为离散的差分方程, 并通过求解差分方程得到原微分方程的近似解。

(2)、积分方程法 (Integral Equation) 是从场参数 (场强或场位) 所满足的微分方程边值问题出发, 通过某些变换导出有关参数 (场强、位、积累电荷密度或散射电流密度) 所满足的积分方程。然后用近似计算方法求此积分方程的数值解。

(3)、有限单元法 (Finite Element Method 或简称 FEM)。有限单元法是将要分析的连续场分割为很多较小的区域, 它们的集合代表原来的场, 然后建立每个单元上待求场量的近似式, 再结合起来进而求得连续场的解。从数学角度上来讲,

它是从变分原理出发,通过区域剖分和分片插值,把二次泛函的极值问题化为多元二次函数的极值问题,后者等价为求解一组多元线性代数方程组,是一种从部分到整体的方法,可使分析过程大为简化。

Coggon^[4](1971)首先将有限单元法应用在电磁法正演模拟中,他从电磁场能量最小原理出发,实现了二维地电断面有限单元法正演计算,不过由于有限单元法网格缺乏通用性,计算精度和速度未能达到实用水平; William 等^[5](1976)发展了有限单元法的剖分方法,采用矩形网格剖分,以解决二维大地电磁测深正演问题,使有限单元法向前发展了一步; Rijo^[6](1977)引入了一个通用性网格剖分方法,使有限单元法正演的精度和速度得到大幅度提高,成为计算二维地电条件下大地电磁正演模拟的有效工具,使有限单元法正式进入实用阶段; Wannamaker 等^[7](1986)用有限单元法模拟大地电磁测深中的二维地形响应;紧接着 Wannamaker 等^[8](1987)采用矩形单元中的三角形剖分,形成了二维大地电磁测深正演模拟的经典程序-PW2D;之后, de Lugao 等^[9](1996)和 Frank 等^[10](2004)进一步研究了大地电磁的二维正演模拟。Reddy^[11](1977)首先探讨了有限单元法的三维大地电磁正演问题; Mogi^[12](1996), Zyseman 等^[13](2000), Son 等^[14](2003)和 Mitsuhata 等^[15](2004)用不同形式的有限单元法在三维大地电磁的正演模拟中取得了成功。

70 年代末,朱伯芳^[16](1979)将有限单元法引入国内,80 年代初,陈乐寿等^[17-18](1981, 1982)和胡建德等^[19-20](1982, 1984)将有限单元法应用到二维大地电磁正演计算中;此后徐世浙等^[21-24] (1983, 1994, 1995, 1996)对有限单元法进行了深入研究,发表了一系列有关有限单元法在大地电磁测深正演计算的论文或专著,网格剖分也由原来的简单剖分发展到三角单元和三角-矩形综合剖分,提高了计算精度和速度;陈小斌等^[25-26](1999, 2000)提出有限法直接迭代算法;刘小军等^[27](2007)用有限单元法模拟了基于二次场的二维大地电磁。对于三维大地电磁正演,国内采用有限单元法模拟的较少,戴世坤等^[28](2002)提出有限单元法的三维大地电磁模拟;王若等^[29](2007)用有限单元法正演模拟了三维 CSAMT。

总的来说,三种数值模拟方法在电阻率正演计算方面都有一定的优势和不足;有限差分法的优点是方法简便易算,其缺点是,当物性参数复杂分布或场域的几何特征不规则时,适应性比较差。而边界单元法的优势是正演速度快,内存需求少,主要用于地形改正和地下少量地质体的正演模拟。有限单元法与前述方法相比,在电阻率法正演方面有独到的优势:

(1)、在变分问题中,自然边界条件已经隐含地得到满足,只需考虑加强边界条件(第一类边界条件),推导过程简单;

- (2)、在处理复杂的几何形状时，其灵活性和适应性比其他方法要好；
- (3)、适用于多种介质和非均匀连续介质问题。由于多种介质和非均匀介质是地球物理场域的基本特征，这是其他数值模拟难以胜任之处；
- (4)、有限单元法方程的系数矩阵是正定的，保证了解的存在唯一性；
- (5)、对于二阶偏微分方程，其变分问题只含有一阶导数，大大降低了偏微分的处理难度。

当然，有限单元法缺点是计算量比较大，计算时间长，但目前计算机的内存容量和 CPU 速度发展非常迅速，使有限单元法在解决许多工程领域的数学物理问题中，成为一种高效、通用的计算方法。将有限单元法引入地球物理计算方法中，解决了许多无法计算的地球物理问题。

1.3 研究的目的与意义

大地电磁法广泛应用于油气勘探、海洋及地球深部探测，现在已成为深部地球物理探测的一种重要方法和必不可少的手段；在石油和天然气普查与勘探中，该方法是其他地球物理勘探方法，特别是地震法的一种重要的补充。

虽然大地电磁法是一种成熟的地球物理方法，但同样面临着如何在复杂地质条件下提高资料处理精度和解释准确性方面的问题。在经典的大地电磁场理论中是将入射场视为垂直入射的平面电磁波场，然而在起伏地形条件下，如山区，大地电磁场的分布会受地形影响将发生畸变，特别是在地形起伏的幅度可以与趋肤深度比拟时会严重影响资料处理、解释的结果。在地形变化地区，进行大地电磁探测时如何减少地形影响，准确的处理解释资料就成了改善大地电磁测深应用效果的重要问题。

正演计算是我们认识各种地电条件下大地电磁场响应特征的良好途径，通过对不同地质模型的正演研究，我们能总结出在不同地质条件下大地电磁场的分布规律。同样，通过正演，我们也能准确了解在不同的地形起伏情况下，大地电磁场的分布特点。这些由正演得到的结论，对于资料处理、反演、解释具有积极的指导作用，能为准确的处理解释资料提供帮助。

目前实际工作中所涉及的问题可近似看成二维问题的占很大比例。对于大地电磁场二维问题的正演，用到的数值模拟方法主要有微分法和积分法两种。本人欲采用微分法中的有限元法进行数值模拟，此方法在处理内边界条件时带来的便利是有限差分法和积分方程法所不具备的，而且在模拟起伏地形时要优于有限差分法和积分方程法。

1.4 本文的主要工作及结构

本文的主要工作由以下组成：首先对二维介质大地电磁边值问题和变分问题满足的微分方程进行推导，用矩形单元对研究区域进行剖分，每个剖分单元分别采用双线性插值和双二次插值进行插值，然后把求解二维大地电磁变分问题转化为求解一组多元线性代数方程组。用矩形单元剖分来研究带地形条件下大地电磁场有限元数值模拟计算，编写出实用的正演程序，通过计算各种模型断面大地电磁场的分布，研究不同地形地质条件下大地电磁场响应特征的分布规律。

论文共分五章，各章内容如下：

第一章 绪论：介绍了大地电磁法有限元数值模拟的国内外发展现状，介绍了论文题目的意义及研究目的，最后给出了本论文的主要工作及结构。

第二章 二维大地电磁正演模拟的基本原理：从麦克斯韦方程组出发，推出二维大地电磁场边值问题和变分问题满足的方程。用矩形单元对研究区域进行剖分，每个剖分单元分别采用双线性插值和双二次插值进行插值，然后把求解二维大地电磁变分问题转化为求解一组多元线性代数方程组。

第三章 程序实现：介绍了本论文中所用的程序。包括主程序、计算总体系数矩阵和右侧列向量子程序的流程图，以及程序中的应用技巧。

第四章 模型计算与分析：通过对水平均匀层状模型、均匀半空间中含异常体模型和典型起伏地形理论计算，检验程序的正确性和精确性。对各个模型结果进行分析。

第五章 结论与建议：通过对几个典型模型的计算结果进行分析，得出一些结论。

第二章 二维大地电磁正演模拟的基本原理

2.1 边值问题^{[22][30][31]}

麦克斯韦方程组

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{D} = \rho_e \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

取其中的两个方程

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (2-2)$$

由关系式: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 及取角频率为 ω 时间因子为 $e^{-i\omega t}$ 的 定态 电磁场的方程是:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{H} \end{array} \right\} \quad (2-3)$$

其中 μ 是介质的磁导率, σ 是电导率, ϵ 是介电常数。

假定地下电性结构是二维的, 取走向为 z 轴, x 轴与 z 轴垂直, 保持水平, y 轴垂直向上(图 2.1)。当平面电磁波以任意角度入射地面时, 地下介质中的电磁波总以平面波形式, 几乎垂直地向下传播。将 (2-3) 式中两式按分量展开, 并考虑到 $\partial/\partial z = 0$, 得两个独立的方程组, 并以 z 分量为准, 分别命名为 TE 模式和 TM 模式。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial y} = (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{E}_z \\ \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} = i\omega \mu \vec{H}_x \\ -\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} = i\omega \mu \vec{H}_y \end{array} \right\} \quad (2-4)$$

TE 模式:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \overrightarrow{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \overrightarrow{E}_x}{\partial y} &= i\omega\mu \overrightarrow{H}_z \\
 \frac{\partial \overrightarrow{H}_z}{\partial y} &= (\sigma - i\omega\epsilon) \overrightarrow{E}_z \\
 -\frac{\partial \overrightarrow{H}_z}{\partial x} &= (\sigma - i\omega\epsilon) \overrightarrow{E}_y
 \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

从 (2-4) 和 (2-5) 式中的第二、三式解出 \overrightarrow{H}_x , \overrightarrow{H}_y 和 \overrightarrow{E}_x , \overrightarrow{E}_y , 并分别代入第一式, 得 \overrightarrow{E}_z 和 \overrightarrow{H}_z 应满足的偏微分方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \overrightarrow{E}_z}{\partial y} \right) + (\sigma - i\omega\epsilon) \overrightarrow{E}_z = 0 \quad (2-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial \overrightarrow{H}_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial \overrightarrow{H}_z}{\partial y} \right) + i\omega\mu \overrightarrow{H}_z = 0 \quad (2-7)$$

(2-6) 和 (2-7) 式可统一表示成:

$$\nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \quad (2-8)$$

其中 ∇ 是二维哈密顿算子, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \overrightarrow{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \overrightarrow{e}_y$, 对于 TE 模式:

$$u = \overrightarrow{E}_z, \quad \tau = \frac{1}{i\omega\mu}, \quad \lambda = \sigma - i\omega\epsilon \quad (2-9)$$

对于 TM 模式:

$$u = \overrightarrow{H}_z, \quad \tau = \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}, \quad \lambda = i\omega\mu \quad (2-10)$$

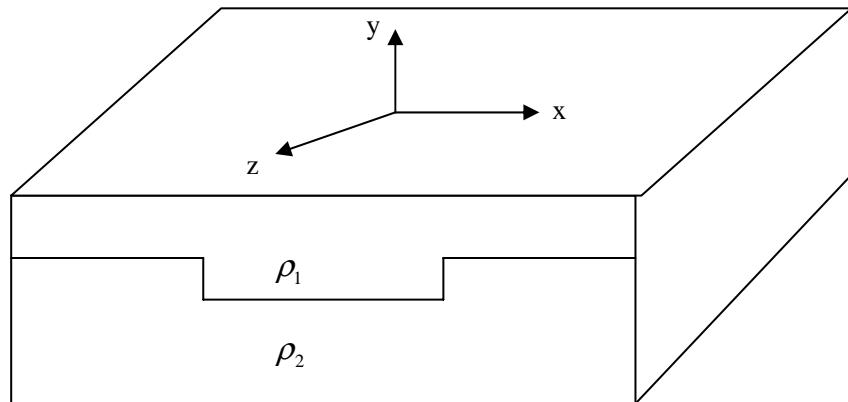


图 2.1 二维电性结构和坐标系

为了求解方程 (2-8)，还必须给出边界条件 (Xu Shi-zhe and Zhao Sheng-kai, 1987) ^[22]。

(1) 外边界条件

TE 模式

取图 2.2 所示的研究区域

1) 上边界 AB 离地面足够远，使异常场在 AB 上为零，以该处的 u 为 1 单位：

$$u|_{AB} = 1 \quad (2-11)$$

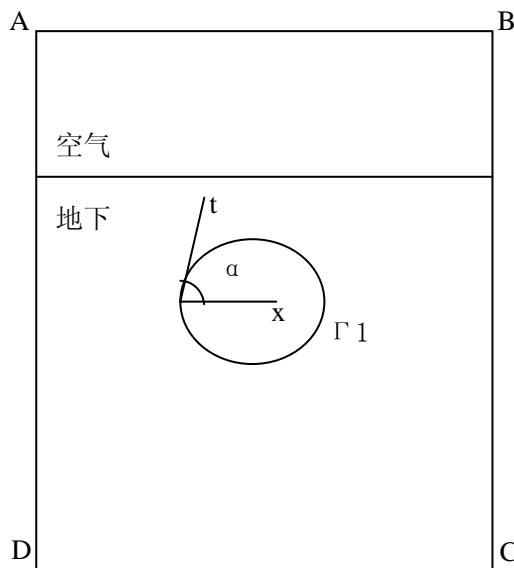


图 2.2 TE 模式的研究区域

2) 下边界 CD 以下为均质岩石，局部不均匀体的异常场在 CD 上为零，电磁波在 CD 以下的传播方程为

$$u = u_0 e^{ky} \quad (2-12)$$

其中 u_0 是常数， $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}$ ， σ 是 CD 以下岩石的电导率。对 u 求导 $\frac{\partial u}{\partial y} = ku$ ，

因为 CD 处 $\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial n}$ ，所以 CD 处的边界条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 \quad (2-13)$$

3) 取左右边界 AD, BC 离局部不均匀体足够远，电磁场在 AD, BC 上左右对称，其上的边界条件是：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (2-14)$$

TM 型波

取图(2.3)所示的研究区域

1) 上边界AB直接取在地面上, 并以该处的 u 为1单位:

$$u|_{AB} = 1 \quad (2-15)$$

这是因为对大地电磁波来说, 有 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$, 从(2-5)式有

$$\text{在岩石中, } \frac{\overrightarrow{H}_z}{\partial y} = \sigma \overrightarrow{E}_x, \quad \frac{\overrightarrow{H}_z}{\partial x} = -\sigma \overrightarrow{E}_y,$$

$$\text{在空气中, } \sigma = 0, \quad \frac{\overrightarrow{H}_z}{\partial y} = -i\omega\epsilon \overrightarrow{E}_x \approx 0, \quad \frac{\overrightarrow{H}_z}{\partial x} = i\omega\epsilon \overrightarrow{E}_y \approx 0,$$

所以不管地下介质电性如何分布, 空气中的 \overrightarrow{H}_z 近似为常量, 这样, 可取地面的 $u = 1$ 。

2) 下边界CD的边界条件, TE模式;

3) 左右界AB和BC的边界条件, TE模式;

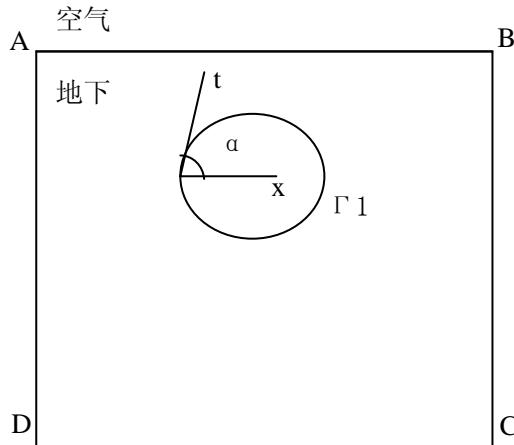


图 2.3 TM 模式的研究区域

(2) 内边界条件

TE模式

由于 \overrightarrow{E}_z 沿着介质分界面, 根据电场切向分量连续性可知, 在两种介质的分界面 Γ_1 上, 有:

$$u_1 = u_2 \quad (2-16)$$

由图(2.2), 磁场的切向分量

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_t &= \vec{H}_x \cos \alpha + \vec{H}_y \sin \alpha = \frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \sin \alpha \right) \\
 &= \frac{-1}{i\omega\mu} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial n}
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

根据介质分界面上磁场切向分量的连续性可知，介质两侧的 $\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial n}$ 是连续的，

即：

$$\tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{2-18}$$

TM 模式

由于 \vec{H}_z 沿着介质分界面，根据磁场切向分量连续性可知，在两种介质的分界面 Γ_1 上，有：

$$u_1 = u_2 \tag{2-19}$$

由图(2.3)，电场的切向分量

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_t &= \vec{E}_x \cos \alpha + \vec{E}_y \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \sin \alpha \right) \\
 &= \frac{-1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial n}
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

根据介质分界面上电场切向分量的连续性可知，介质两侧的 $\frac{-1}{\sigma - i\omega\epsilon} \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial n}$ 是连续

的，即有：

$$\tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \tag{2-21}$$

综合以上讨论，边值问题归纳为：

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot (\tau \nabla u) + \lambda u = 0 \quad \in \Omega \\ u = 1 \quad \in AB \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \in AD, BC \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku = 0 \quad \in CD \\ u_1 = u_2 \quad \in \Gamma_1 \\ \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \in \Gamma_1 \end{array} \right\} \tag{2-22}$$

2.2 变分问题

为简单起见, 假定在区域中只有一个不均匀体, 如图(2.3)所示, 构造泛函

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2} \tau_1 (\nabla u_1)^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 u_1^2 \right] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2} \tau_2 (\nabla u_2)^2 - \frac{1}{2} \lambda_2 u_2^2 \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2-23)$$

变分为:

$$\begin{aligned} \delta I(u) &= \int_{\Omega_1} \tau_1 \nabla u_1 \cdot \nabla \delta u_1 d\Omega - \int_{\Omega_1} \lambda_1 \nabla u_1 \delta u_1 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \tau_2 \nabla u_2 \cdot \nabla \delta u_2 d\Omega - \int_{\Omega_2} \lambda_2 \nabla u_2 \delta u_2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1 \delta u_1) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_1} [\nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1) + \lambda u_1] \delta u_1 d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2 \delta u_2) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_2} [\nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2) + \lambda u_2] \delta u_2 d\Omega \end{aligned} \quad (2-24)$$

根据(2-16)式中的微分方程, 上式右侧的第二和第四项的被积函数为零, 所以:

$$\begin{aligned} \delta I(u) &= \int_{\Omega_1} \nabla \cdot (\tau_1 \nabla u_1 \delta u_1) d\Omega + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot (\tau_2 \nabla u_2 \delta u_2) d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma + \Gamma_1} \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \delta u_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma_1} \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \delta u_2 d\Gamma \end{aligned} \quad (2-25)$$

式中, Γ 是区域的外边界, Γ_1 是内边界, n_1 , n_2 分别是 Ω_1 和 Ω_2 的外法向, 方向正好相反, 根据内边界条件 (2-16) ~ (2-21) 式, 有

$$\oint_{\Gamma_1} \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} \delta u_1 d\Gamma + \oint_{\Gamma_2} \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \delta u_2 d\Gamma = 0 \quad (2-26)$$

即内边界条件不出现在 $I(u)$ 的变分中, 在泛函取极值的过程中, 内边界条件将自动满足, 属自然边界条件。当介质中存在多个不均匀体时, 上述结论也成立, 将 (2-22) 式中的外边界条件代入 (2-25) 式中, 有

$$\begin{aligned} \delta I(u) &= \oint_{\Gamma} \tau \frac{\partial u}{\partial n} \delta u d\Gamma = - \int_{CD} \tau k u \delta u d\Gamma \\ &= - \delta \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (2-27)$$

移项后, 得

$$\delta \left[I(u) + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \right] = 0 \quad (2-28)$$

所以, 边值问题 (2-22) 与下列变分问题等价

$$\left. \begin{array}{l} F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \\ u|_{AB} = 1 \\ \delta F(u) = 0 \end{array} \right\} \quad (2-29)$$

2.3 有限单元法

2.3.1 有限单元法插值理论基础

2.3.1.1 双线性插值

取图 2.4(a) 所示的正方形单元 (母单元), 四个顶点的编号及其坐标, 如图上所示, 构造如下的形函数

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{array} \right\} \quad (2-30)$$

或统一写成:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \quad (2-31)$$

其中 ξ_i, η_i 是点 $i (i=1, \dots, 4)$ 的坐标。

形函数 (2-30) 式满足

$$N_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2-32)$$

的要求, 其中 j 代表点号。

将形函数展开:

$$N_i = a_1\xi\eta + a_2\xi\eta + a_3\xi\eta + a_4 \quad (2-33)$$

其中 a_1, \dots, a_4 是常数, N_i 含有 $\xi\eta, \xi, \eta$ 和常数项。

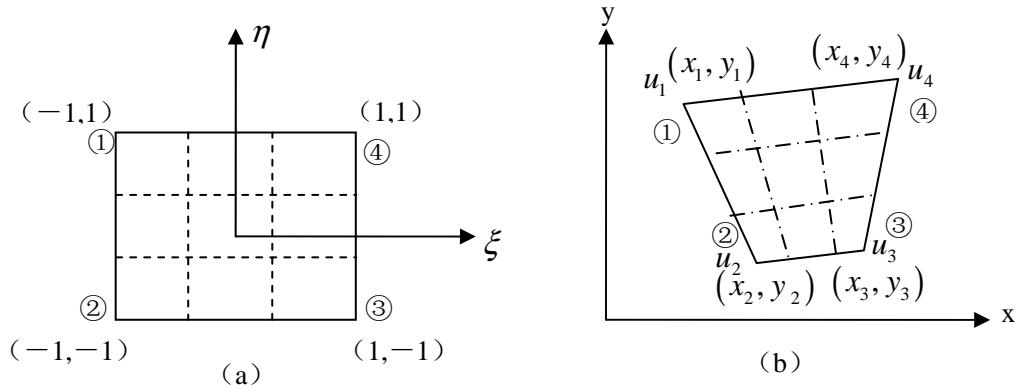


图 2.4 双线性插值的母单元与子单元

(a) 为母单元 (b) 为子单元

图 2.4 (b) 上任意四边形单元 (子单元) 的四个顶点的坐标分别是 $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ ，函数值是 u_1, \dots, u_4 ，子单元上的 u ， x 和 y 可表示成：

$$\left. \begin{array}{l} u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{array} \right\} \quad (2-34)$$

将形函数(2-30)式代入上式，整理后，得

$$\left. \begin{array}{l} u = A_1 \xi \eta + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \\ x = B_1 \xi \eta + B_2 \xi + B_3 \eta + B_4 \\ y = C_1 \xi \eta + C_2 \xi + C_3 \eta + C_4 \end{array} \right\} \quad (2-35)$$

其中 A_1, \dots, C_4 是常数。

令 $\eta = c$ ，这在 $\xi\eta$ 平面上是一条水平线，代入(2-35)式，得：

$$u = a_1 \xi + a_2, \quad x = b_1 \xi + b_2, \quad y = c_1 \xi + c_2 \quad (2-36)$$

其中 a_1, \dots, c_2 是常数，所以 u ， x 和 y 均是 ξ 的线形函数，当 ξ 从 -1 变到 1 时， u 是线性变化的， xy 平面上的点也将沿着一条直线变化。同样，令 $\xi = c$ 时， u ， x 和 y 均是 η 的线形函数，所以(2-30)式成为双线性函数，(2-34)式是双线性插值，与母单元的四条边对应的子单元的四条边都是直线。

2.3.1.1 双二次插值

取图 2.5 (a) 所示的正方形单元 (母单元)，八个节点的编号及其坐标如图所示，构造如下的形函数：

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi) \\ N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\ N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\ N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi) \end{array} \right. \quad (2-37)$$

易验证, 形函数(2-37)式满足:

$$N_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2-38)$$

的要求, 将形函数展开

$$N_i = a_1\xi^2\eta + a_2\xi\eta^2 + a_3\xi^2 + a_4\eta^2 + a_5\xi\eta + a_6\xi + a_7\eta + a_8 \quad (2-39)$$

上式共含 8 个系数。

图 2.5 (b) 上曲边四边形 (子单元) 的 8 个点的坐标分别是 $(x_1, y_1), \dots, (x_8, y_8)$, 函数值是 u_1, \dots, u_8 , 子单元上的 u , x 和 y 可表示成:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \quad x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i, \quad (2-40)$$

将形函数(2-37)式代入上式, 整理后, 得

$$\left. \begin{array}{l} u = A_1\xi^2\eta + A_2\xi\eta^2 + A_3\xi^2 + A_4\eta^2 + A_5\xi\eta + A_6\xi + A_7\eta + A_8 \\ x = B_1\xi^2\eta + B_2\xi\eta^2 + B_3\xi^2 + B_4\eta^2 + B_5\xi\eta + B_6\xi + B_7\eta + B_8 \\ y = C_1\xi^2\eta + C_2\xi\eta^2 + C_3\xi^2 + C_4\eta^2 + C_5\xi\eta + C_6\xi + C_7\eta + C_8 \end{array} \right\} \quad (2-41)$$

其中 A_1, \dots, C_8 是常数。

令 $\eta = c$,

$$\left. \begin{array}{l} u = a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3 \\ x = b_1\xi^2 + b_2\xi + b_3 \\ y = c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3 \end{array} \right\} \quad (2-42)$$

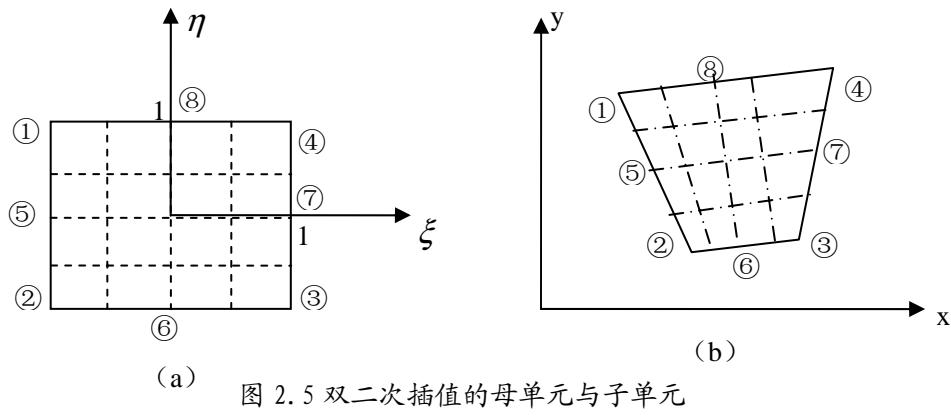


图 2.5 双二次插值的母单元与子单元

(a) 为母单元 (b) 为子单元

其中 a_1, \dots, c_3 是常数, 所以 u , x 和 y 均是 ξ 的二次函数, 当 ξ 从 -1 变到 1 时, u 是线性变化的, xy 平面上的点也将沿着一条二次曲线移动。同理, 令 $\xi = c$ 时, u , x 和 y 均是 η 的二次函数, 所以 (2-37) 式成为双二次函数, (2-40) 式是双二次插值, 与母单元的正方形对应的子单元的形状, 将是曲边四边形。

2.3.2 矩形单元、双线性插值

2.3.2.1 区域剖分

用矩形单元对区域进行剖分 (见图 2.6), 每个单元的是个角点为节点, 并给每个单元的电阻率 $\rho = 1/\sigma$ 赋值, 矩形单元的宽度为 a , 高度为 b , 单元的四个节点的编号如图 2.7 所示, 在单元内进行双线性插值。

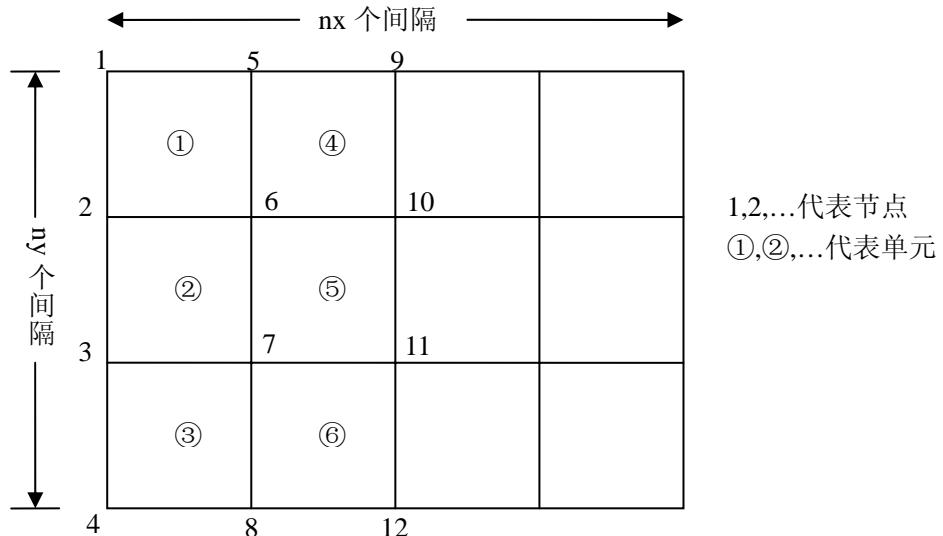


图 2.6 节点和单元的排列次序 (双线性插值)

2.3.2.2 双线性插值

图 2.8(a) 是母单元, (b) 是子单元, 两个单元间的坐标变换关系为

$$x = x_0 + \frac{a}{2}\xi, \quad y = y_0 + \frac{b}{2}\eta, \quad (2-43)$$

其中 x_0, y_0 是子单元中点的坐标, a, b 是子单元的两个边长, 微分关系为

$$dx = \frac{a}{2}d\xi, \quad dy = \frac{b}{2}d\eta, \quad dxdy = \frac{ab}{4}d\xi d\eta \quad (2-44)$$

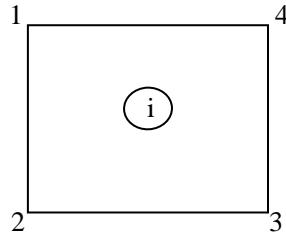


图 2.7 单元中的节点号次序 (双线性插值)

双线性插值的形函数为:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

统一写成:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \quad (2-46)$$

其中 ξ_i, η_i 是点 $i (i=1, \dots, 4)$ 的坐标, 单元中 u 的插值函数是

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad (2-47)$$

其中 $u_i (i=1, \dots, 4)$ 是单元四个顶点的待定 u 值, 由 (2-22) 式表示的插值函数分别是 x, y 的线性函数。

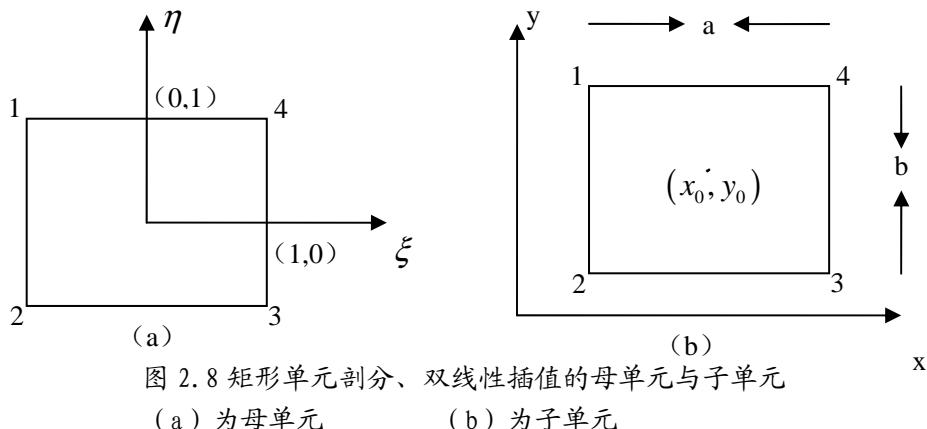


图 2.8 矩形单元剖分、双线性插值的母单元与子单元

(a) 为母单元

(b) 为子单元

2.3.2.3 单元分析

将 (2-29) 式中的区域积分分解为各单元积分之和:

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \\
 &= \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega \\
 &\quad + \sum_{CD} \int_e \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma
 \end{aligned} \tag{2-48}$$

上式右侧最后一项积分只对 CD 边界上的单元进行

当单元中的 τ 和 λ 是常数时, 单元积分 $F_e(u)$, 其中

$$\int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega = \int_e \frac{1}{2} \tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{2-49}$$

u 对 x 的偏导

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i = \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T u_e = u_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \tag{2-50}$$

其中 $u_e = (u_1 \cdots u_4)^T$, $\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \cdots \frac{\partial N_4}{\partial x} \right)^T$, 所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = u_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)^T u_e \tag{2-51}$$

同理

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = u_e^T \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)^T u_e \tag{2-52}$$

积分

$$\begin{aligned}
 \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega &= \int_e \frac{1}{2} \tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 &= \frac{1}{2} u_e^T (k_{ij}) u_e = \frac{1}{2} u_e^T K_e u_e
 \end{aligned} \tag{2-53}$$

其中 $K_e = (k_{ij})$, $k_{ij} = k_{ji}$

$$\begin{aligned}
 k_{ij} &= \int_e \tau \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
 &= \int_e \tau \left[\left(\frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \left(\frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) + \left(\frac{dN_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \left(\frac{dN_j}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \right] \frac{ab}{4} d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{2-54}$$

对 (2-46) 求 ξ 或 η 的微商, 代入上式积分后, 即可得 k_{ij} , 若单元内 τ 为常数, 具

体计算公式如下：

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= 2\alpha + 2\beta & k_{32} &= k_{41} \\
 k_{21} &= \alpha - 2\beta & k_{41} &= k_{31} \\
 k_{31} &= -\alpha - \beta & k_{33} &= k_{11} \\
 k_{41} &= -2\alpha + \beta & k_{43} &= k_{21} \\
 k_{22} &= -2\alpha + \beta & k_{44} &= k_{11} \\
 \alpha &= \frac{\sigma b}{6 a} & \beta &= \frac{\sigma a}{6 b}
 \end{aligned} \tag{2-55}$$

单元积分

$$\begin{aligned}
 \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega &= \frac{1}{2} \lambda u_e^T \int_e N N^T d\Omega u_e \\
 &= \frac{1}{2} u_e^T K_{2e} u_e
 \end{aligned} \tag{2-56}$$

其中 $N = (N_1 \cdots N_4)^T$, N_1, \dots, N_4 是双线性插值的形函数, 见计算公式见(2-46)式,

$$K_{2e} = (k_{ij}) ,$$

$$k_{ij} = \lambda \int_e N_i N_j d\Omega = \lambda \int_e N_i N_j \frac{ab}{4} d\xi d\eta \tag{2-57}$$

将(2-21)式中的形函数 N 代入上式, 积分后, 可得 k_{ij} , K_{2e} 的具体计算公式是

$$K_{2e} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & & & \text{对} \\ 2 & 4 & & \text{称} \\ 1 & 2 & 4 & \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{2-58}$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{ab}{36} \lambda$$

(2-48)右侧最后一项线积分只对边界单元进行, 当单元的 $\overline{23}$ 边落在无穷远边界上时[见图 2.6(a)], 线积分

$$\int_{\overline{23}} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma = \frac{1}{2} u_e^T (k_{ij}) u_e = \frac{1}{2} u_e^T K_{3e} u_e \tag{2-59}$$

其中 $K_{3e} = (k_{ij})$, k_{ij} 的具体计算公式是

$$K_{3e} = \beta \begin{pmatrix} 2 & & & \text{对} \\ 1 & 2 & & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-60}$$

$$\text{其中 } \beta = \frac{\tau kb}{6}, \quad k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} .$$

K_{1e} , K_{2e} 和 K_{3e} 都是 4×4 的矩阵, 将它们扩展成全体节点的矩阵 \overline{K}_{1e} , \overline{K}_{2e} , \overline{K}_{3e} , 然后将各单元的扩展矩阵相加, (2-48) 式变成

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega \\ &\quad + \sum_{CD} \int_e \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} u^T \left(\sum_{\Omega} \overline{K}_{1e} - \sum_{\Omega} \overline{K}_{2e} + \sum_{CD} \overline{K}_{3e} \right) u = \frac{1}{2} u^T Ku \end{aligned} \quad (2-61)$$

其中 $K = \sum_{\Omega} \overline{K}_{1e} - \sum_{\Omega} \overline{K}_{2e} + \sum_{CD} \overline{K}_{3e}$ 是总体系数矩阵。

对(2-61)式求变分, 得

$$\delta F(u) = \delta u^T Ku = 0 \quad (2-62)$$

由 δu 的任意性, 得

$$Ku = 0 \quad (2-63)$$

解线形代数方程组前, 将 AB 线上的边界值代入, 解线形代数方程组后, 得各节点的 u , 它代表各节点的 H_z (对 TE 模式) 或 E_z (对 TM 模式)。至此, 有限元求解 u 的过程全部结束。

2.3.3 矩形单元、双二次插值

2.3.3.1 区域剖分

用矩形单元对区域进行剖分, 每个单元的四个角点和四边形中点, 共 8 个点, 取为节点, 在单元内进行双二次插值[见(2-37)式]。

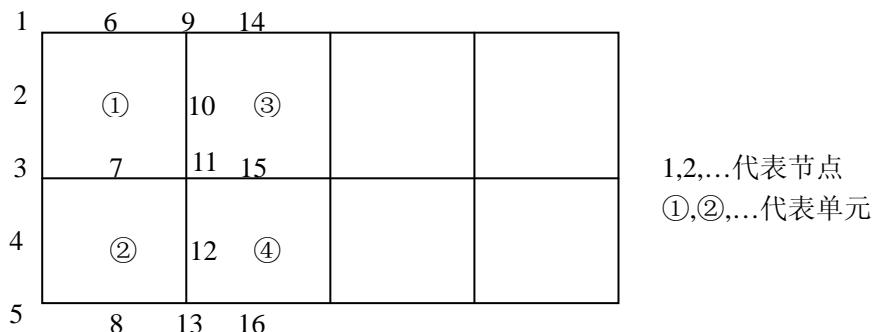


图 2.9 节点和单元的排列次序 (双二次插值)

节点编号和单元编号的次序见图 2.9, 单元的中点的排列次序见图 2.10。并给每个单元的电阻率 $\rho = 1/\sigma$ 赋值, 矩形单元的宽度为 a , 高度为 b 。

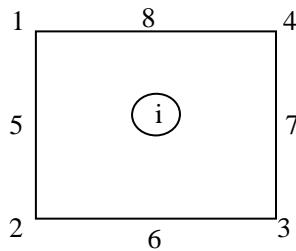


图 2.10 单元中的节点号次序 (双二次插值)

2.3.3.2 双二次插值

图 2.11(a)是母单元, (b)是子单元, 两个单元的微分关系见(2-44)式, 双二次插值的形函数见(2-37)式, 单元中的 u 的插值函数是

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i \quad (2-64)$$

其中 $u_i (i=1, \dots, 8)$ 是单元中 8 个节点的待定 u 值, 由(2-64)式表示的插值函数分别是 x , y 的二次函数[见(2-41)式]。

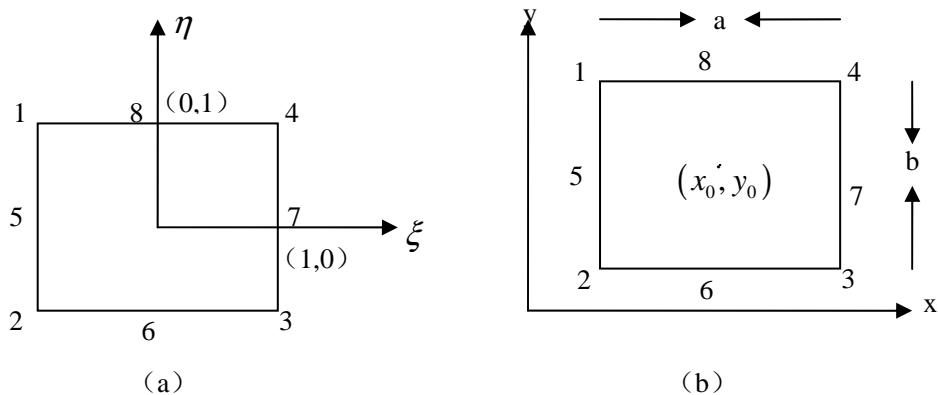


图 2.11 矩形单元剖分、双二次插值的母单元与子单元

(a) 为母单元

(b) 为子单元

2.3.3.3 单元分析

将(2-29)式中的区域积分分解为各单元积分之和;

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 - \frac{1}{2} \lambda u^2 \right] d\Omega + \int_{CD} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \\ &= \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega - \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega \\ &\quad + \sum_{CD} \int_e \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (2-65)$$

上式右侧最后一项积分只对 CD 边界上的单元进行

单元积分同(2-53)式推导

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{2} \tau (\nabla u)^2 d\Omega &= \int_e \frac{1}{2} \tau \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} u_e^T (k_{ij}) u_e = \frac{1}{2} u_e^T K_{1e} u_e \end{aligned} \quad (2-66)$$

其中 $K_e = (k_{ij})$, $k_{ij} = k_{ji}$

$$k_{ij} = \int_e \tau \left[\left(\frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \left(\frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) + \left(\frac{dN_i}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \left(\frac{dN_j}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \right) \right] \frac{ab}{4} d\xi d\eta \quad (2-67)$$

对(2-37)式求 ξ 或 η 的微商, 代入上式积分后, 即可得 k_{ij} , 若单元内 τ 为常数, 具体计算公式如下:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 52\alpha + 52\beta & k_{21} &= 17\alpha + 28\beta \\ k_{31} &= 23\alpha + 23\beta & k_{41} &= 28\alpha + 17\beta \\ k_{51} &= 6\alpha - 80\beta & k_{61} &= -40\alpha - 6\beta \\ k_{71} &= -6\alpha - 40\beta & k_{81} &= -80\alpha + 6\beta \\ k_{22} &= k_{11} & k_{32} &= k_{41} \\ k_{42} &= k_{31} & k_{52} &= k_{51} \\ k_{62} &= k_{81} & k_{72} &= k_{71} \\ k_{82} &= k_{61} & k_{33} &= k_{11} \\ k_{43} &= k_{21} & k_{53} &= k_{71} \\ k_{63} &= k_{81} & k_{73} &= k_{51} \\ k_{83} &= k_{61} & k_{44} &= k_{11} \\ k_{54} &= k_{71} & k_{64} &= k_{61} \\ k_{74} &= k_{51} & k_{84} &= k_{81} \\ k_{55} &= 48\alpha + 160\beta & k_{65} &= 0 \\ k_{75} &= -48\alpha + 80\beta & k_{85} &= 0 \\ k_{66} &= 160\alpha + 48\beta & k_{76} &= 0 \\ k_{86} &= 80\alpha - 48\beta & k_{77} &= k_{55} \\ k_{87} &= 0 & k_{88} &= k_{66} \\ \alpha &= \frac{\sigma}{90} \frac{b}{a} & \alpha &= \frac{\sigma}{90} \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (2-68)$$

单元积分

$$\int_e \frac{1}{2} \lambda u^2 d\Omega = \frac{1}{2} u_e^T (k_{ij}) u_e = \frac{1}{2} u_e^T K_{2e} u_e \quad (2-69)$$

其中 K_{2e} 的具体计算公式是

$$K_{2e} = \alpha \begin{bmatrix} 6 \\ 2 & 6 & \text{对} \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ -6 & -6 & -8 & -8 & 32 & \text{称} \\ -8 & -6 & -6 & -8 & 20 & 32 \\ -8 & -8 & -6 & -6 & 16 & 20 & 32 \\ -6 & -8 & -8 & -6 & 20 & 16 & 20 & 32 \end{bmatrix} \quad (2-70)$$

其中 $\alpha = \frac{ab}{180} \lambda$

(2-66) 右侧最后一项线积分只对边界单元进行, 当单元的 $\overline{263}$ 边落在无穷远边界 CD 上时 (见图 2.6(a)), 线积分

$$\int_{\overline{263}} \frac{1}{2} \tau k u^2 d\Gamma = \frac{1}{2} u_e^T (k_{ij}) u_e = \frac{1}{2} u_e^T K_{3e} u_e \quad (2-71)$$

其中 $K_{3e} = (k_{ij})$, k_{ij} 的具体计算公式是

$$K_{3e} = \beta \begin{bmatrix} 4 \\ -1 & 4 & \text{对} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-72)$$

其中 $\beta = \frac{\tau b}{30}$ 。

总体系数矩阵的集成、求变分、解线性方程组等与双线形插值完全相同, 不再赘述。

2.4 计算视电阻率和相位

我们的目的是计算大地电磁的视电阻率和相位, 其计算公式如下:

TE 模式:

$$\left. \begin{aligned} \rho_E &= \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\vec{E}_z}{\vec{H}_x} \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_E &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(\frac{\vec{E}_z}{\vec{H}_x} \right)}{\text{RE} \left(\frac{\vec{E}_z}{\vec{H}_x} \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-73)$$

将(2-4)式的第二式代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &= \frac{i}{\omega\mu} \left[\vec{E}_z \left/ \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \right) \right. \right]^2 \Big|_{y=0} = -i\omega\mu \left(\vec{E}_z \left/ \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \right. \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_E &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(\vec{E}_z \left/ \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \right) \right. \right)}{\text{RE} \left(\vec{E}_z \left/ \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} \right) \right. \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-74)$$

令 $u = E_z$, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho_E &= -i\omega\mu \left(u \left/ \frac{\partial u}{\partial y} \right. \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_E &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(u \left/ \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right)}{\text{RE} \left(u \left/ \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-75)$$

TM 模式:

$$\left. \begin{aligned} \rho_H &= \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_z} \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_H &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_z} \right)}{\text{RE} \left(\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_z} \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-76)$$

将(2-5)式的第二式代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho_H &= \frac{i}{\omega \mu} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \middle/ \vec{H}_z \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_H &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \middle/ (\vec{H}_z \cdot \sigma) \right)}{\text{RE} \left(\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \middle/ (\vec{H}_z \cdot \sigma) \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-77)$$

令 $u = E_z$, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho_H &= \frac{i}{\omega \mu \sigma^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \middle/ u \right)^2 \Big|_{y=0} \\ \phi_H &= \text{TAN}^{-1} \left[\frac{\text{IM} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \middle/ u \right)}{\text{RE} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \middle/ u \right)} \right] \Big|_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (2-78)$$

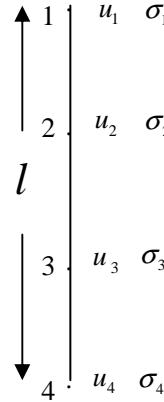


图 2.12 单元中的节点

所以在求得地表各节点的 u 后, 还要计算地表的 $\frac{\partial u}{\partial y}$, 才能计算视电阻率, 为了

提高视电阻率的计算精度, 取近地表的 4 个等距节点的 u 来计算导数, 用 u_1, \dots, u_4

代表它们的 u , 则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{2l} (-11u_1 + 18u_2 - 9u_3 + 2u_4) \quad (2-79)$$

其中 l 是节点 1 与节点 4 间的距离, 在求得 $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$ 后, 代入 (2-75), (2-78)

式中, 即可计算视电阻率 ρ 和相位 ϕ 。

第三章 程序实现

本文采用了矩形剖分双线性插值和矩形剖分双二次插值两种方法进行大地电磁进行数据模拟, 分两个主程序实现, 部分子程序相同, 部分子程序类似只是算法不同。以下以矩形剖分、双二次插值为例来介绍。

程序包括一个主程序 (Mail) 和多个子程序 (读取模型参数子程序 INP、输出结果子程序 OUTPUT、计算总体系数矩阵 KE 和计算右侧列向量 P 的子程序 EKU、解方程的子程序 LFTCG 与 LFSCG、计算视电阻率和相位角的子程序 ROXW, 其中子程序 EKU 需要调用多个子程序)

3.1 程序流程图 (见图 3.2、图 3.3)

3.2 起伏地形模拟的实现

对起伏地形的模拟主要是通过给模型网格的地表节点赋给高程, 来实现对山坡、山谷或者山脊等地形的模拟。本文采用矩形单元来模拟起伏地形, 由于矩形网格剖分单元自身的特点, 所以它不适合于模拟坡度较大的复杂地形, 对于坡度较缓的地面则是可以比较好地模拟。

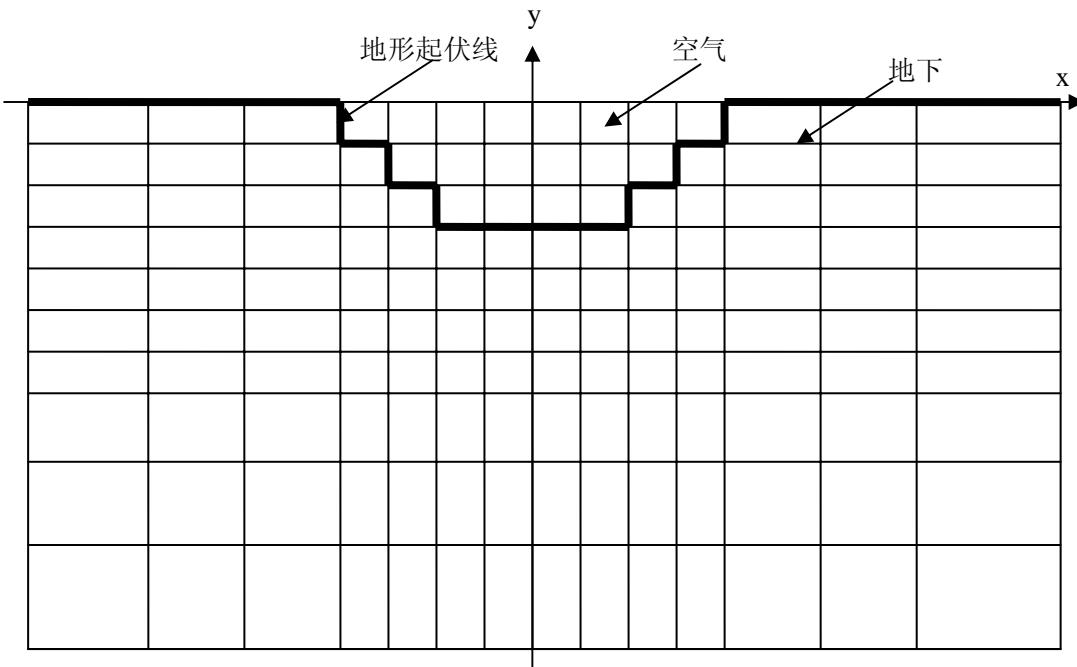


图 3.1 区域矩形网格剖分及用矩形单元模拟起伏地下示意图

先是建立坐标系, 以地形的最高点的水平方向为 X 轴(水平轴), 以异常体或起伏地形的中心点为 Y 轴(垂直轴)。把地面线以上的剖分单元看成是空气中的部分来进行计算, 电导率取空气的电导率(赋值为 1.0×10^{-10})。给 AB 线 (见图 2.2、

图 2.3) 加边界值 $u|_{AB} = 1$ 时, 取地面上的节点赋值为 1, 在求视电阻率和相位时也是取近地表的 4 个节点的 u 值来进行计算。从而实现对起伏地形大地电磁的模拟(请见图 3.1)。

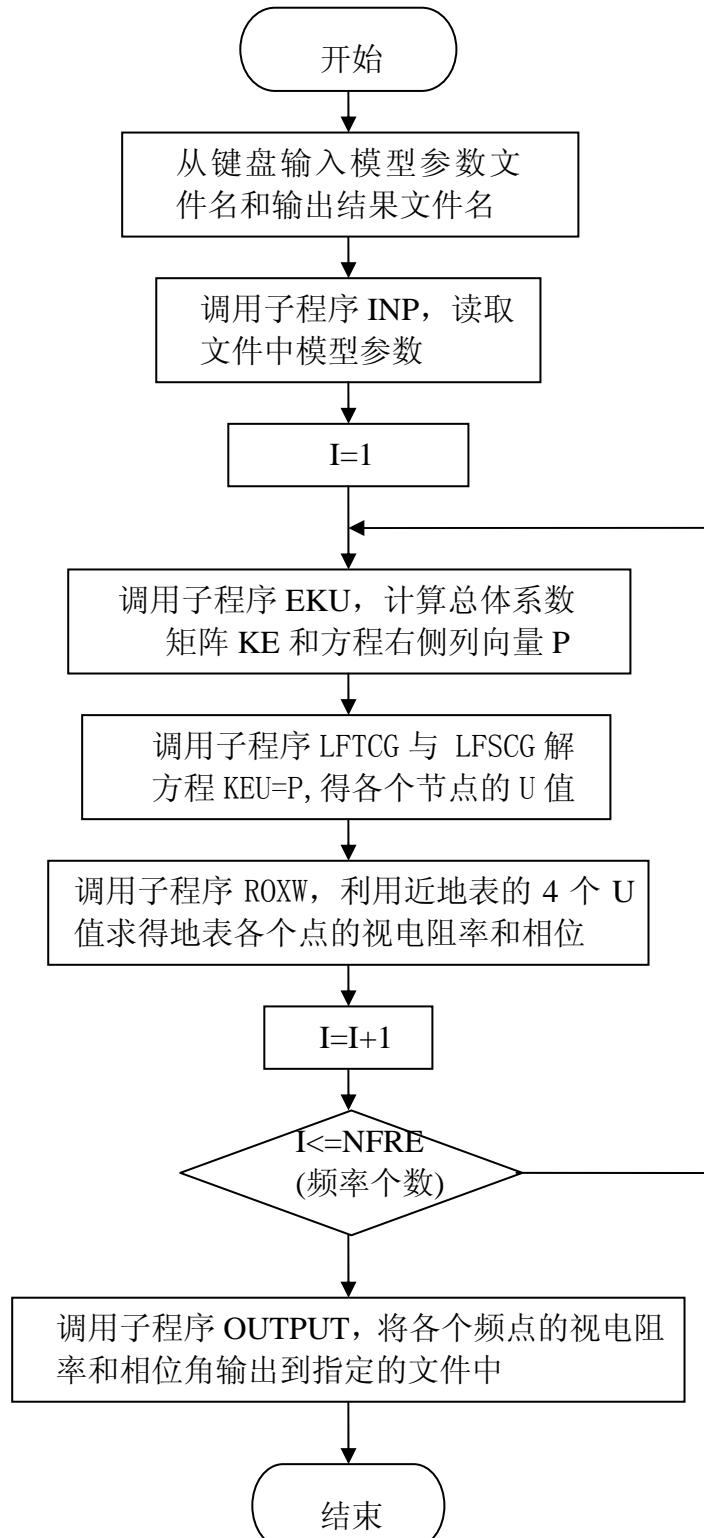


图 3.2 主程序流程图

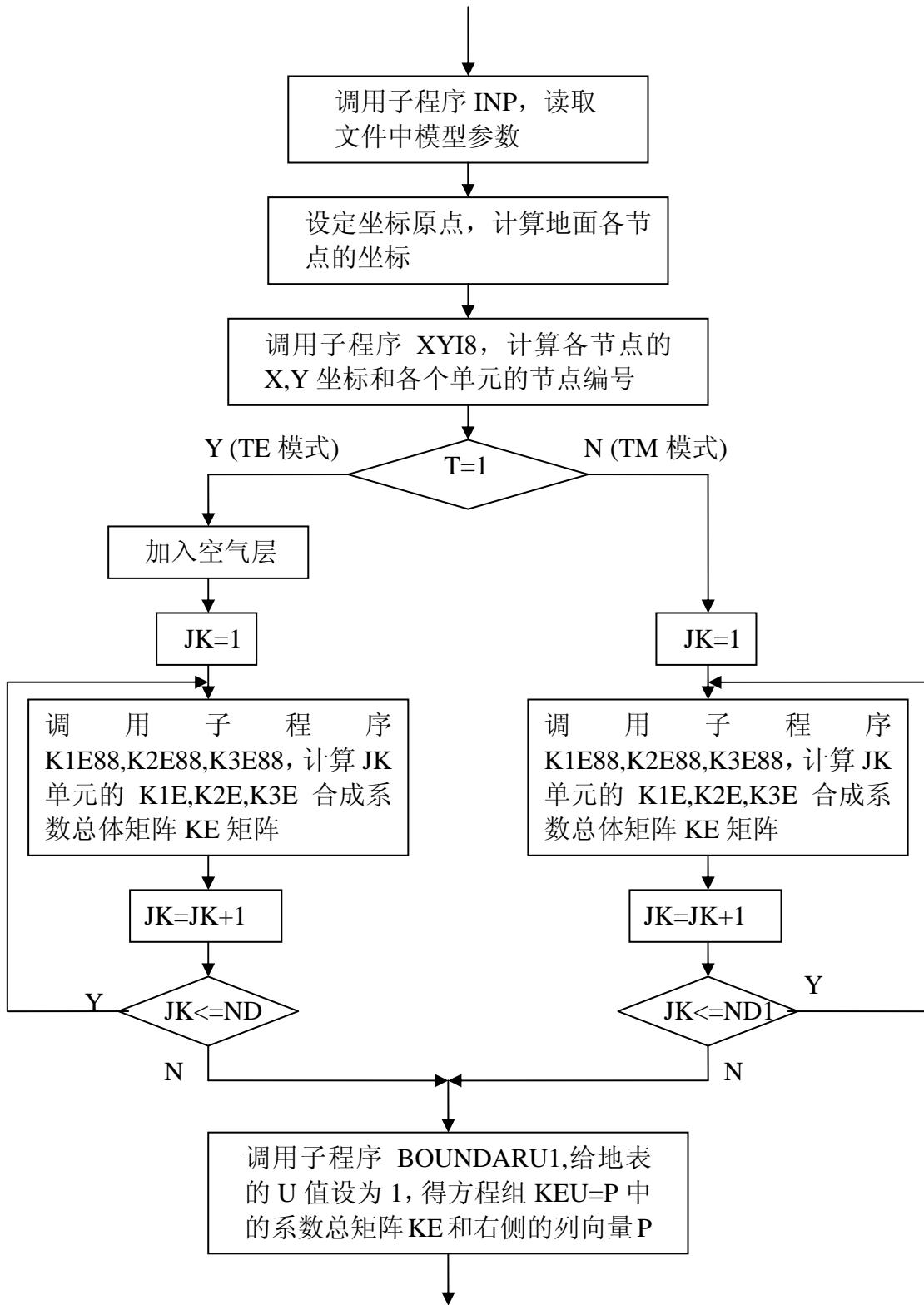


图 3.3 子程序 EKU 的程序流程图

3.3 程序中应用技巧

本文采用 FORTRAN 90 语言编程, FORTRAN 是 Formula Translate (公式翻译) 的缩写, 是世界上最早出现的高级编程语言。它是为科学、工程中能够用数学公式表示的问题而设计的, 具有较强的数值计算功能。

首先调用子程序 INP, 读取数据文件总模型参数, 设点坐标原点, 建立坐标系, 对模型进行矩形剖分, 计算出各剖分单元的节点标号和各节点的 X、Y 坐标,

网格剖分及起伏地形的模拟请见(图 3.1), 调用子程序 EKU 计算方程组 $KEU=P$ 中的总体系数矩阵 KE 和方程右侧列向量 P , 然后解方程组 $KEU=P$ 求得各剖分节点的 U 值, 最后利用近地表的 4 个节点的 U 值计算出各个点的视电阻率值和相位角。以下是本程序中的应用技巧:

3.3.1 采用文件形式读取模型参数

本程序全部采用动态数组, 既节省计算机内存使运算速度加快, 又满足不同剖分网格的需要, 使得在计算不同模型及相同模型不同网格剖分时不需改动程序, 增加了程序的实用性。通过读数据文件来读取模型参数, 主程序中读取文件, 目的是得到 T 值 (T 为 1 表示 TE 模式, T 为 2 表示 TM 模式)、 TDX , NDX (TDX 为 1 表示带地形, TDX 为 0 表示不带地形, NDX 表示起伏地形时给定地形点的个数)、 NX , NY , NZ (NX 表示水平方向网格剖分数, NY 表示水平方向网格剖分数, NZ 表示垂直方向网格剖分数)、 $NRES$, $NFRE$ ($NRES$ 表示模型中不同电阻率的个数, $NFRE$ 表示频点数), 子程序 EKU 中读取文件是读取模型的参数和网格剖分参数 (请详见数据文件格式说明)。

子程序 INP 用来读入数据文件文件, 以某起伏地形为例, 数据文件的格式如下:

```

1
1 6
30
20
7
2
20

0.01 0.02 0.025 0.05 0.1 0.125 0.2 0.25 0.5 1
1.25 2      2.5      5      10     12.5    20     25     50    100

```

100 , 1000000000

5000	3000	2000	1000	500	300	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	300	500	1000	2000	3000	5000

100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	100	100	200	300	500	1000	2000	2000	5000	

6000 3000 1500 800 400 200 100

-15000	0
-800	0
-200	-500
200	-500
800	0
15000	0

第一行取值为 1 或者 2, 当为 1 时表示程序计算 TE 模式;当为 2 时表示程序计算 TM 模式。

第二行第一个数取值为 1 或者 0，当为 1 时表示起伏地形，当为 2 时表示水平地形，第二数表示起伏地形给定坐标点的个数。

第三行表示 X 轴方向上(横向)网格剖分数, 实例中的网格剖分为 30。

第四行表示 Y 轴方向上(纵向)网格剖分数, 实例中的网格剖分为 20。

第五行表示 TE 模型中加入空气层的层数, 实例中所加空气 7 层。

第六行表示表示模型中所涉及的不同电阻率的个数, 实例中的不同电阻率个数为 2, 一般把空气中的电导率设定为 10^{-10} 。

第七行表示程序计算的频点个数, 实例中为 20 个频点。

紧接下来的 20 个数表示 20 个频点, 之后的 2 个数表示电阻率值。

接着的 30 个数表示 X 轴方向上(横向) 网格单元的宽度, 下面的 20 个数 Y 轴方向上(横向) 网格单元的厚度, 再下面的 7 个数表示各空气层的厚度。

再后的 20 行 30 列数表示各个矩形剖分单元的电阻率索引值, 1 表示第一个电阻率值 100, 2 表示第二个电阻率值 10^{10} (代表空气中的电阻率)。

最后的 6 行表示给出的地形值(第一列表示位置, 第二列表示对应的地形标高)。

3.3.2 加边界条件

在解线性代数方程组 $KEU=0$ 之前, 将 AB 线(见图 2.2、图 2.3) 上的边界值 $u|_{AB}=1$ 代入方程组得线性方程组 $KEU=P$, 以下是本程序中实现的技巧^[22]。

假定 $KEU=0$ 形式为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

若已知 $u_2=b$, 则(3-1)式变为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{51} & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{12}b \\ b \\ \dots \\ -k_{52}b \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

将(3-1)式改为(3-2)式, 在计算程序的设计上是比较麻烦的, 但可以采用如下简单的办法, 即将 k_{22} 乘上一个很大的数, 如 10^{10} , 并将右侧列向量的第二个元改为

$$k_{22} \cdot 10^{10} \cdot b$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} \cdot 10^{10} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{22} \cdot 10^{10} \cdot b \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

方程的这种改变，对根的求解影响不大，以第二个方程为例

$$k_{21}u_1 + k_{22} \cdot 10^{10}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 = k_{22} \cdot 10^{10} \cdot b \quad (3-4)$$

用 10^{10} 除方程的两侧，有

$$\frac{k_{21}}{10^{10}}u_1 + k_{22}u_2 + \frac{k_{23}}{10^{10}}u_3 + \frac{k_{24}}{10^{10}}u_4 + \frac{k_{25}}{10^{10}}u_5 = k_{22}b \quad (3-5)$$

由于 $10^{10} \ll k_{2i} (i=1, \dots, 5)$ ，所以上式近似为 $k_{22}u_2 = k_{22}b$ ，得：

$$u_{22} = b \quad (3-6)$$

将方程 (3-1) 式改为方程 (3-3)，在程序设计上很容易做到。

本程序中将 AB 线上的边界值 $u|_{AB} = 1$ 代入方程组得线性方程组 KEU=P 就是采用上述技巧，使得边界条件的在程序设计上很容易做到。

3.3.3 解线性代数解方程组

总体系数矩阵 KE 由许多对称矩阵相加而成，所以也是对称的。当剖分网格较密时，节点数就会很大，方程组的元数就会很大，而且 KE 为复数，解此类复数方程组采用普通的直接解方程组方法会效率很低，甚至没办法得到方程组的解。

KE 为大型稀疏带状对称正定矩阵，本程序采用双共轭梯度迭代方法解方程组^[32-35]，速度比直接解法（如全选主元高斯(Gauss) 消去法）快很多。

第四章 模型计算与分析

模型 1

水平均匀层状模型，分四层，第一层电阻率为 $100 \Omega \cdot m$ ，厚度为 1000m，第二层电阻率为 $1000 \Omega \cdot m$ ，厚 2000m，第三层电阻率为 $500 \Omega \cdot m$ ，厚 3400m。基底电阻率为 $10 \Omega \cdot m$ 。

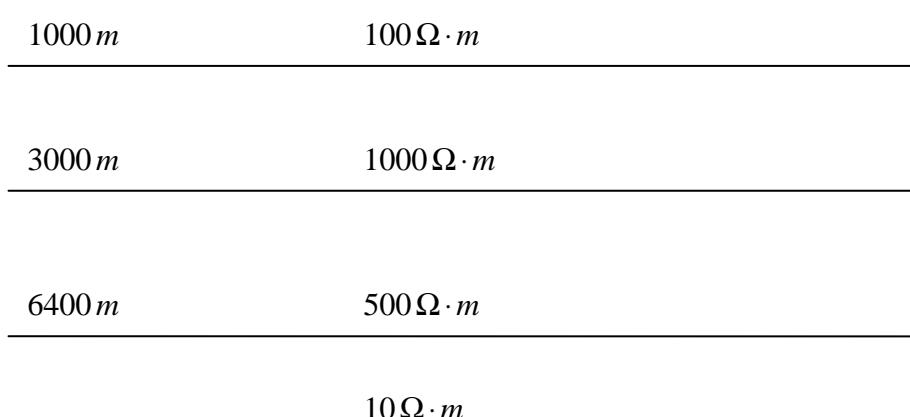


图 4.1 模型 1

网格剖分单元数目：X 轴(水平) 方向为 32 个，Y 轴(垂直) 方向为 27 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
1000	1000								

Y 轴网格宽度(单位:m)：

100	100	100	200	200	300	400	400	400	400
400	400	400	400	600	800	800	1000	1000	2000
3000	5000	8000	10000	20000	30000	50000			

从表 4.1、表 4.2 和图 4.2 均可看出：

(1) 在所列的 24 个频点上，本文编写的程序计算的结果与解析解都很接近，这样说明程序在 TE、TM 两种模式下，计算均匀层状模型方面的正确性。

(2) 在相同网格剖分的情况下，双二次插值的计算结果比双线性插值跟接近解析解、精度更高，在高频和低频时表现尤为突出。

表 4.1 模型 1 双线性插值与双二次插值计算视电阻率与解析解比较

频率 (Hz)	解析解 ($\Omega \cdot m$)	双线性 TE 模式 ($\Omega \cdot m$)	双线性 TM 模式 ($\Omega \cdot m$)	双二次 TE 模式 ($\Omega \cdot m$)	双二次 TM 模式 ($\Omega \cdot m$)
1000	45	47.8333	42.1647	45.4086	44.5912
500	44.995781	46.1804	43.8153	45.2565	44.7356
100	45.832111	45.9333	45.9179	45.8545	45.808
50	43.69141	43.627	43.8311	43.7004	43.6822
25	37.472015	37.3144	37.5739	37.4709	37.4723
20	35.200752	35.0261	35.2954	35.1999	35.2006
12.5	30.999033	30.8603	31.0184	31.0093	30.9883
10	29.6548	29.5758	29.6144	29.6676	29.6418
5	30.201712	30.3261	30.0205	30.2065	30.1976
2.5	38.804371	38.9163	38.6921	38.7988	38.8069
2	42.830734	42.9023	42.7648	42.823	42.8316
1.25	51.785278	51.7956	51.7867	51.7841	51.7779
1	55.751015	55.7469	55.7661	55.753	55.7419
0.5	65.024223	65.0272	65.0297	65.0227	64.9991
0.25	69.367073	69.3732	69.3643	69.3699	69.326
0.2	69.915001	69.9263	69.9069	69.9155	69.8584
0.125	70.063034	70.0797	70.0459	70.0635	69.9919
0.1	69.750443	69.7697	69.7294	69.7492	69.6536
0.05	67.688126	67.7362	67.6366	67.6898	67.5522
0.025	64.628036	64.649	64.6072	64.6199	64.3754
0.02	63.54269	63.5425	63.5461	63.5403	63.2299
0.01	60.122524	60.101	60.1377	60.1242	59.5958
0.005	56.907772	57.091	56.7206	56.9711	56.054
0.001	51.204723	49.6786	52.6609	50.7915	49.9401

表 4.2 模型 1 双线性插值与双二次插值计算相位角与解析解比较

相位 (Hz)	解析解(°)	双线性 TE 模式(°)	双线性 TM 模式(°)	双二次 TE 模式(°)	双二次 TM 模式(°)
1000	45	47.8333	42.1647	45.4086	44.5912
500	44.995781	46.1804	43.8153	45.2565	44.7356
100	45.832111	45.9333	45.9179	45.8545	45.808
50	43.69141	43.627	43.8311	43.7004	43.6822
25	37.472015	37.3144	37.5739	37.4709	37.4723
20	35.200752	35.0261	35.2954	35.1999	35.2006
12.5	30.999033	30.8603	31.0184	31.0093	30.9883
10	29.6548	29.5758	29.6144	29.6676	29.6418
5	30.201712	30.3261	30.0205	30.2065	30.1976
2.5	38.804371	38.9163	38.6921	38.7988	38.8069
2	42.830734	42.9023	42.7648	42.823	42.8316
1.25	51.785278	51.7956	51.7867	51.7841	51.7779
1	55.751015	55.7469	55.7661	55.753	55.7419
0.5	65.024223	65.0272	65.0297	65.0227	64.9991
0.25	69.367073	69.3732	69.3643	69.3699	69.326
0.2	69.915001	69.9263	69.9069	69.9155	69.8584
0.125	70.063034	70.0797	70.0459	70.0635	69.9919
0.1	69.750443	69.7697	69.7294	69.7492	69.6536
0.05	67.688126	67.7362	67.6366	67.6898	67.5522
0.025	64.628036	64.649	64.6072	64.6199	64.3754
0.02	63.54269	63.5425	63.5461	63.5403	63.2299
0.01	60.122524	60.101	60.1377	60.1242	59.5958
0.005	56.907772	57.091	56.7206	56.9711	56.054
0.001	51.204723	49.6786	52.6609	50.7915	49.9401

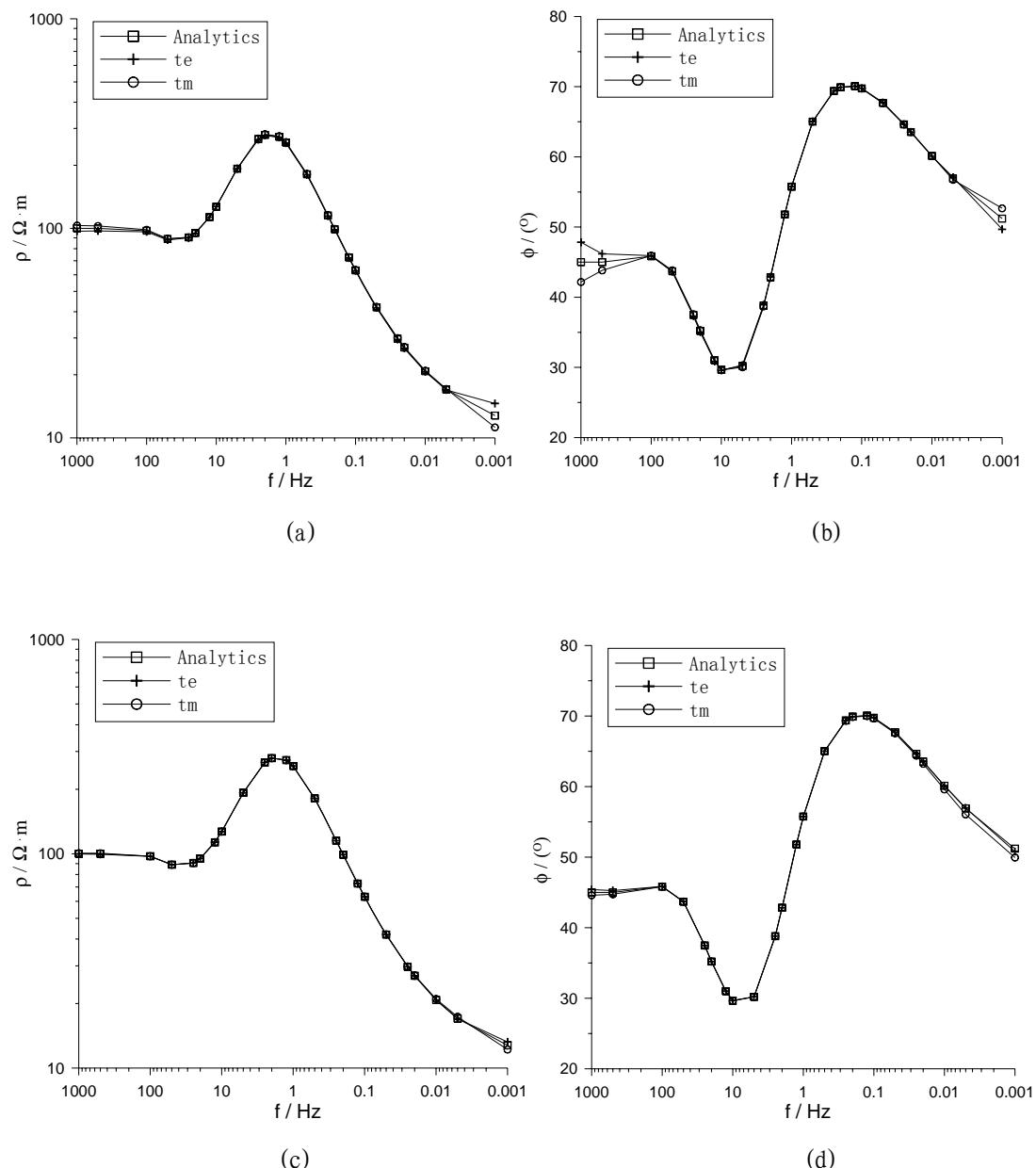


图 4.2 模型 1 曲线图

(a)、(b) 分别表示双线性插值视电阻率和相位曲线图

(c)、(d) 分别表示双二次插值视电阻率和相位曲线图

模型 2

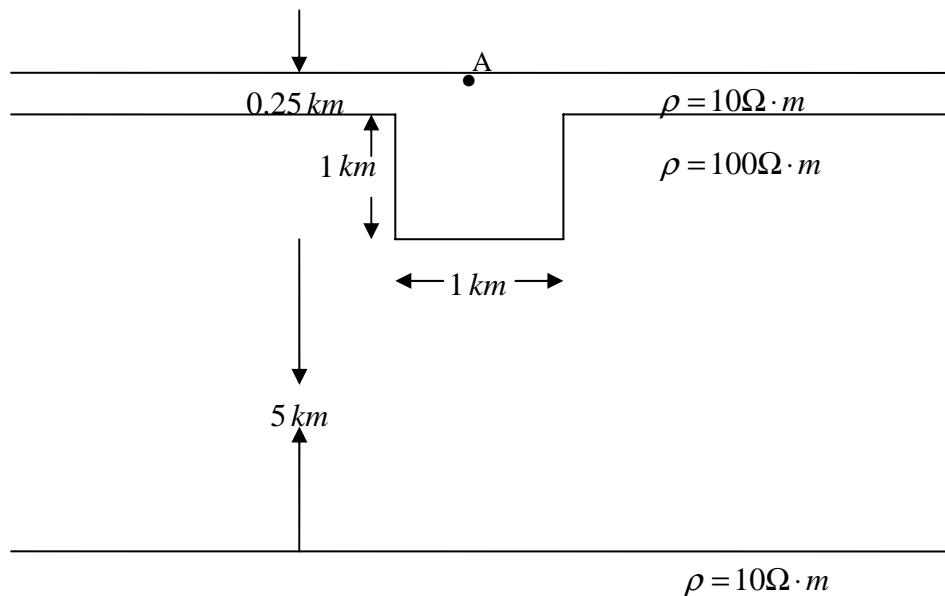


图 4.3 模型 2

双线性插值:

网格剖分单元数目: X 轴(水平) 方向为 32 个, Y 轴(垂直) 方向为 44 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

800	800	600	600	400	400	200	200	125	125	125	125	125	125	125
125	125	125	125	125	125	125	125	125	125	200	200	400	400	400
600	600	800	800											

Y 轴网格宽度(单位:m):

25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	100	100	100	100	100
100	100	100	100	100	100	100	200	200	400	400	500	500	500	500
500	800	800	1250	1250	2000	2000	4000	4000	6000	6000	6000	7500		
7500	10000	10000												

双二次插值:

网格剖分单元数目: X 轴(水平) 方向为 16 个, Y 轴(垂直) 方向为 22 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

1600	1200	800	400	250	250	250	250
250	250	250	250	400	800	1200	1600

Y 轴网格宽度(单位:m):

50	50	50	50	50	200	200	200	200	200	400	800	1000	
1000	1600	2500	4000	8000	12000	15000	20000						

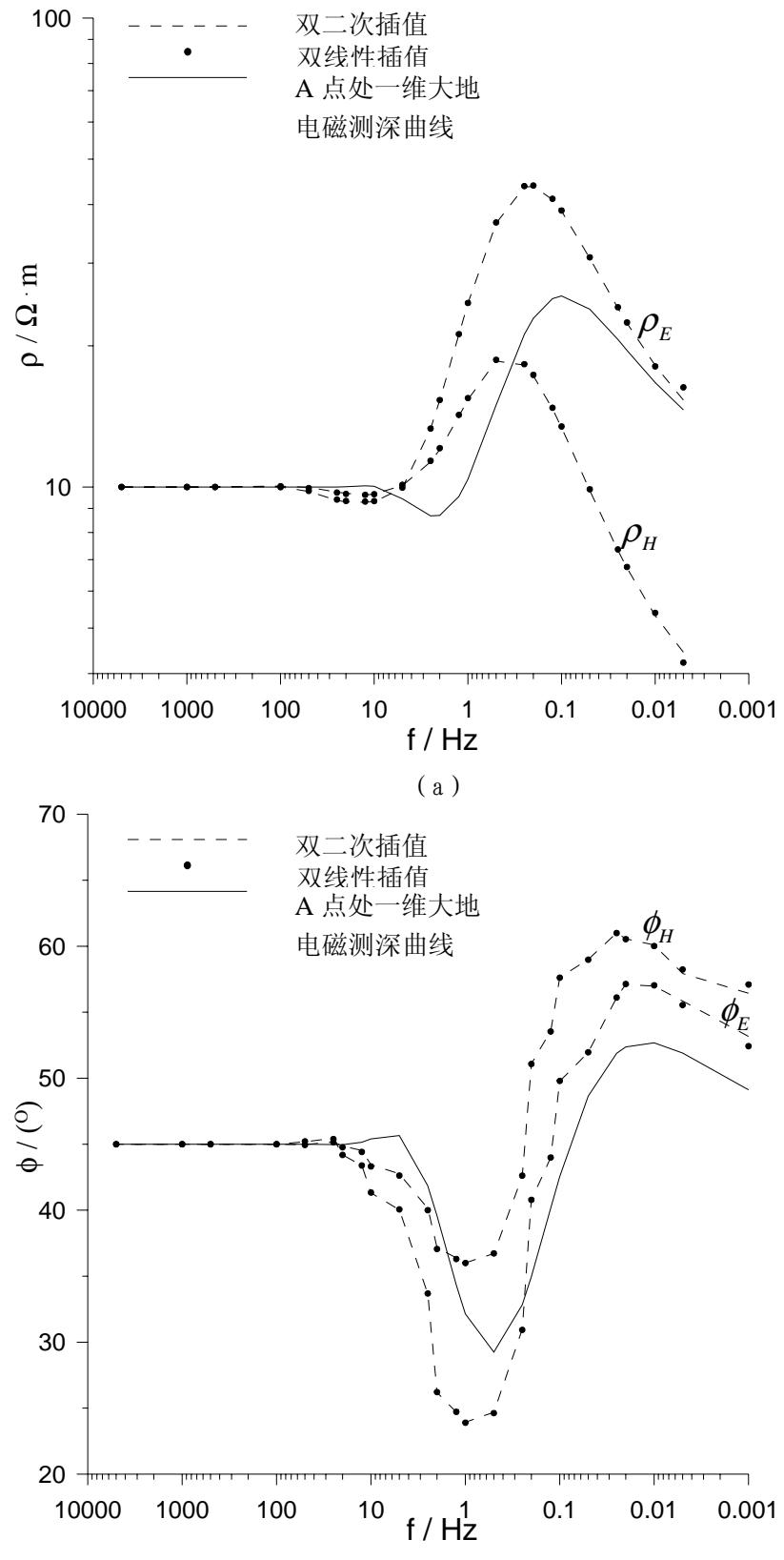


图 4.4 模型 2 曲线图

(a) 表示 A 点视电阻率测深曲线

(b) 表示 A 点相位测深曲线

图 4.3 所示的地电模型可以用来模拟二维构造, 图 4.4(a)为 A 点的大地电磁视电阻率测深曲线, 图 4.4(b)为 A 点的大地电磁相位测深曲线, 其中虚线是双二次插值[网格为 16(水平方向)×22(垂直方向)]计算的 ρ_E 、 ρ_H 、 ϕ_E 和 ϕ_H 曲线, 虚线附近的点是双线性插值[网格为 32(水平方向)×44(垂直方向)]计算的视电阻率和相位角, 实线是 A 点处是垂直向下的地电参数计算的一维的大地电磁测深视电阻率和相位角。从图 4.4 可以看到:

- (1) 在二维构造上, 一维的测深曲线与二维的测深曲线有较大的区别, 而且, 二维 TE 模式和 TM 模式测深曲线亦有较大的区别, 所以在二维构造上, 应当选择二维的正、反演方法进行资料解释。
- (2) 在双线性插值中, 网格加密一倍, 其节点数目与双二次插值所用的节点数大致相同, 此时, 两种插值的计算结果比较接近。

模型 3

为均匀半空间中, 有一低阻异常体, 顶部埋深 2km, 电阻率 $10\Omega\cdot m$ 。

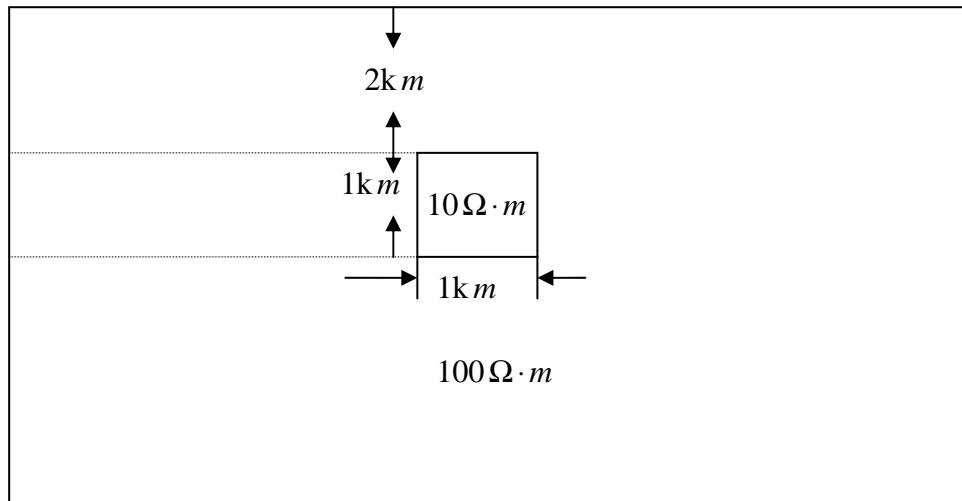


图 4.5 模型 3

网格剖分单元数目: X 轴(水平) 方向为 26 个, Y 轴(垂直) 方向为 34 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

2000	1000	500	300	200	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100	100	100	100	100	100	100	200	300	500	1000	2000		

Y 轴网格宽度(单位:m):

200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	300	500	800	1000	1500	2000	3000	5000		
8000	10000	12000	15000	20000	25000	25000	25000	30000	30000	30000			

对于模型 3, 由图 4.6、图 4.7 可看出:

- (1) 在相同网格剖分下[网格为 32(水平方向) \times 44(垂直方向)], 双线性插值计算结果与双二次插值计算结果比较接近。
- (2) 在 TE 模式下, 在视电阻率拟断面图上, 低阻异常体的响应明显。在相位的拟断面上, 低阻体也能被明显的反映出来。
- (3) 在 TM 模式下, 在视电阻率拟断面图上, 低阻异常体的能清晰的反映出来, 而它的形态被拉伸, 向下延伸了。在相位的拟断面上, 低阻体能被明显的反映出来, 比较而言, 相位的拟断面图更能准确的反映模型。

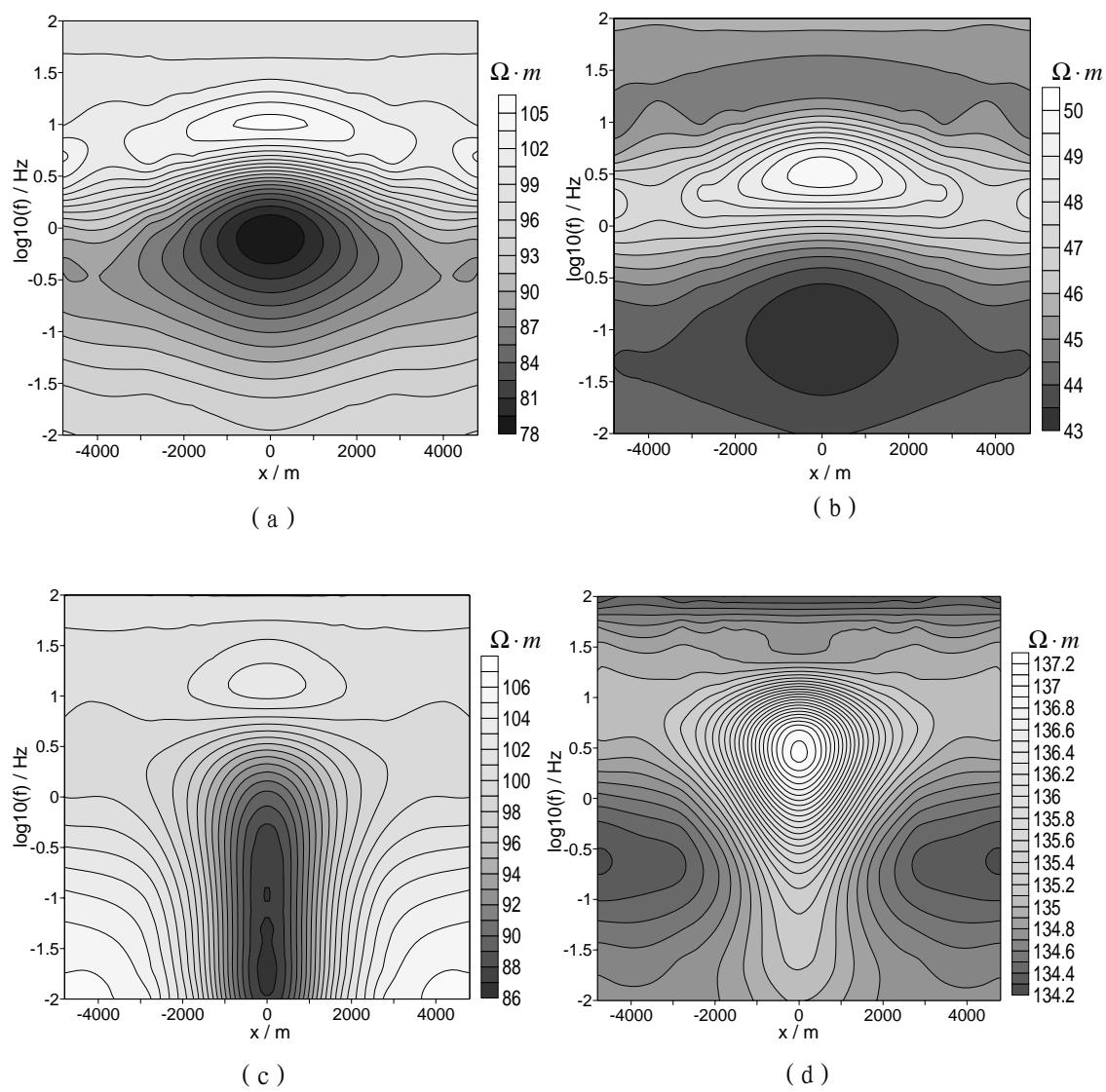


图 4.6 模型 3 双线性插值拟断面图
 (a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

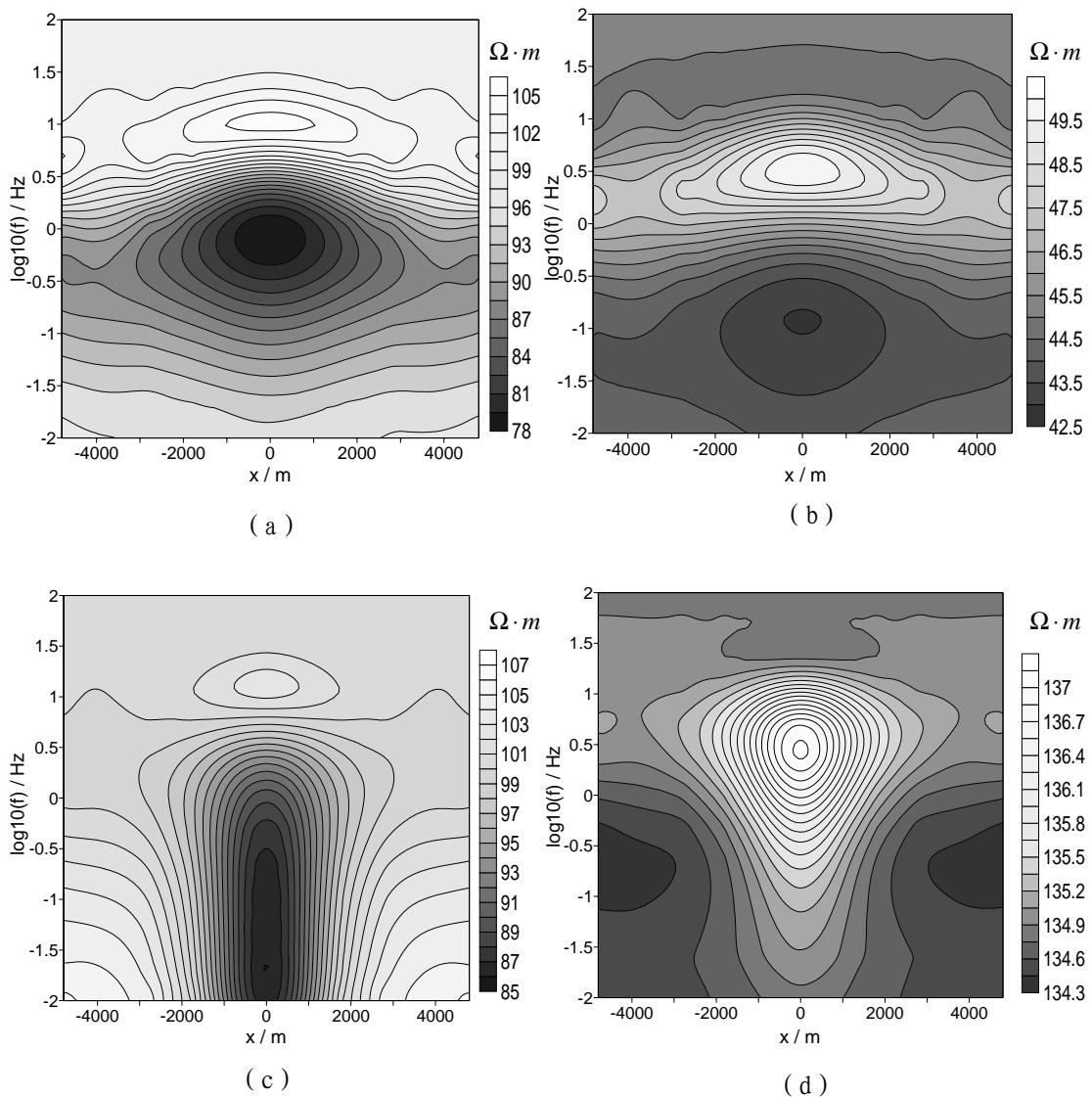


图 4.7 模型 3 双二次插值拟断面图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

模型 4

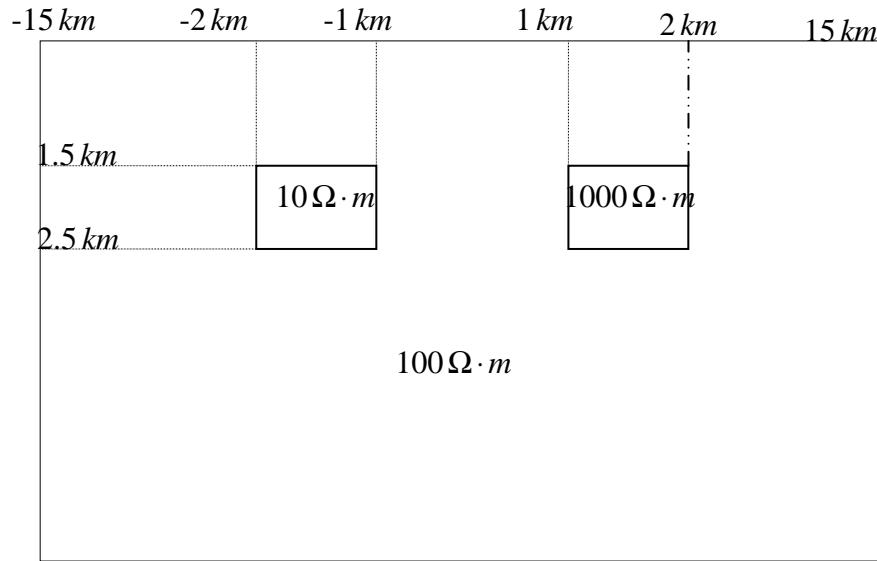


图 4.8 模型 4

网格剖分单元数目：X 轴(水平) 方向为 40 个，Y 轴(垂直) 方向为 33 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

5000	3000	2000	1000	800	500	300	200	100	100	100	100	100
300	300	100	100	100	100	300	500	500	300	100	100	100
300	300	100	100	100	100	200	300	500	800	1000	2000	3000
5000												

Y 轴网格宽度(单位:m)：

50	50	50	150	200	300	300	100	50	50	50	50	100	200	200
200	100	50	50	50	100	300	500	1000	2000	4000	8000			
10000 15000 20000 20000 30000														

对于模型 4，由图 4.9、图 4.10 可看出：

(1) 在相同网格剖分下[网格为 40(水平方向)×33(垂直方向)]，双线性插值计算结果与双二次插值计算结果比较接近。

(2) 在 TE 模式下，在视电阻率拟断面图上，左边的低阻体的响应明显；右边的高阻体有一定的反映但是远不如低阻体的响应明显。相位拟断面图所反映的情况与之类似。

(3) 在 TM 模式下，在视电阻率拟断面图上，左边的低阻体和右边的高阻体均能清晰的反映出来，而它的形态被拉伸，向下延伸。在相位的拟断面上，低阻

体和高阻体均能被明显的反映出。

(4) 比较 TE 和 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图, 可以得出 TE 模式下, 横向分辨率较低。而 TM 模式下, 横向分辨率较高。

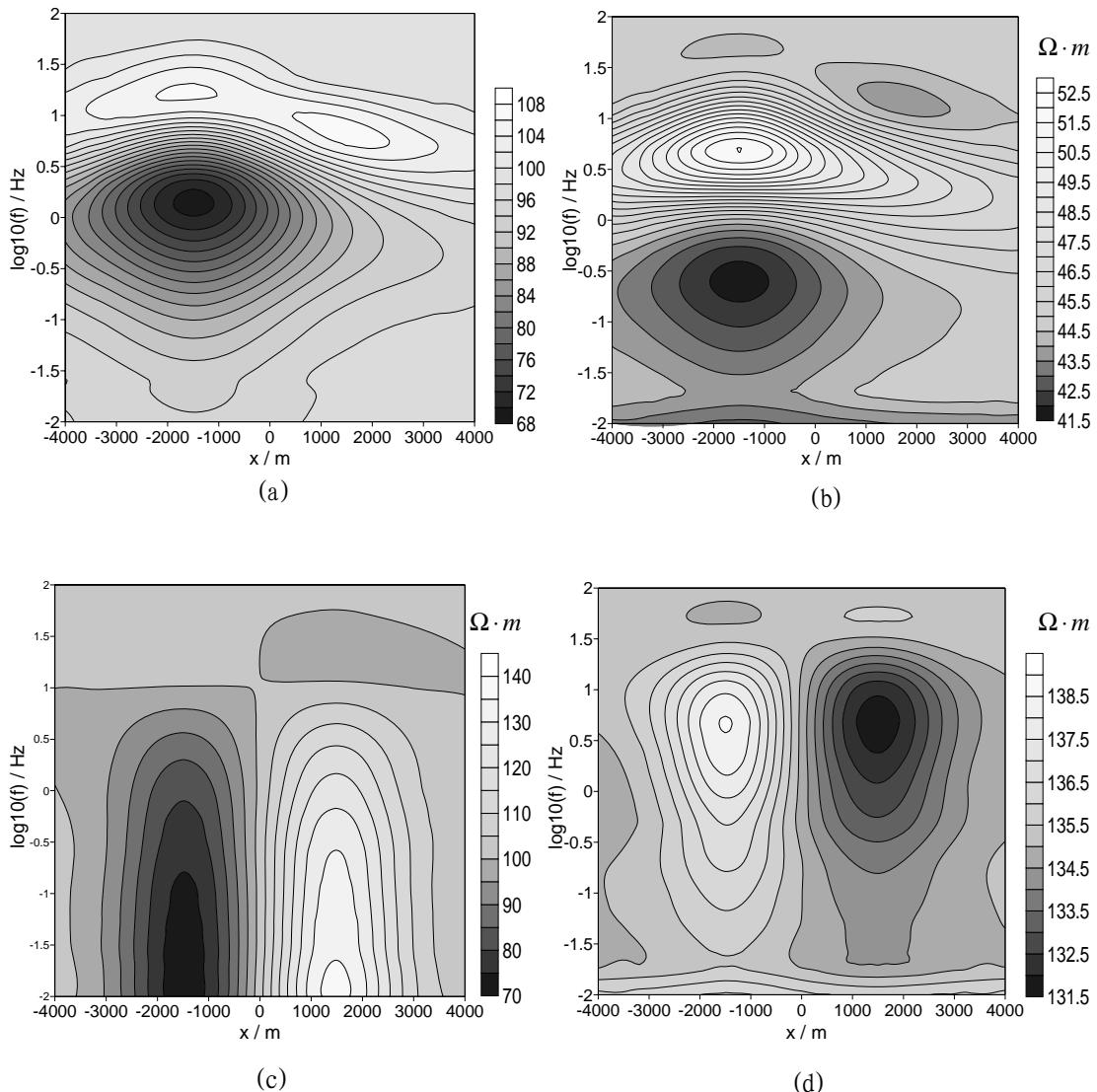


图 4.9 模型 4 双线性插值拟断面图
 (a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

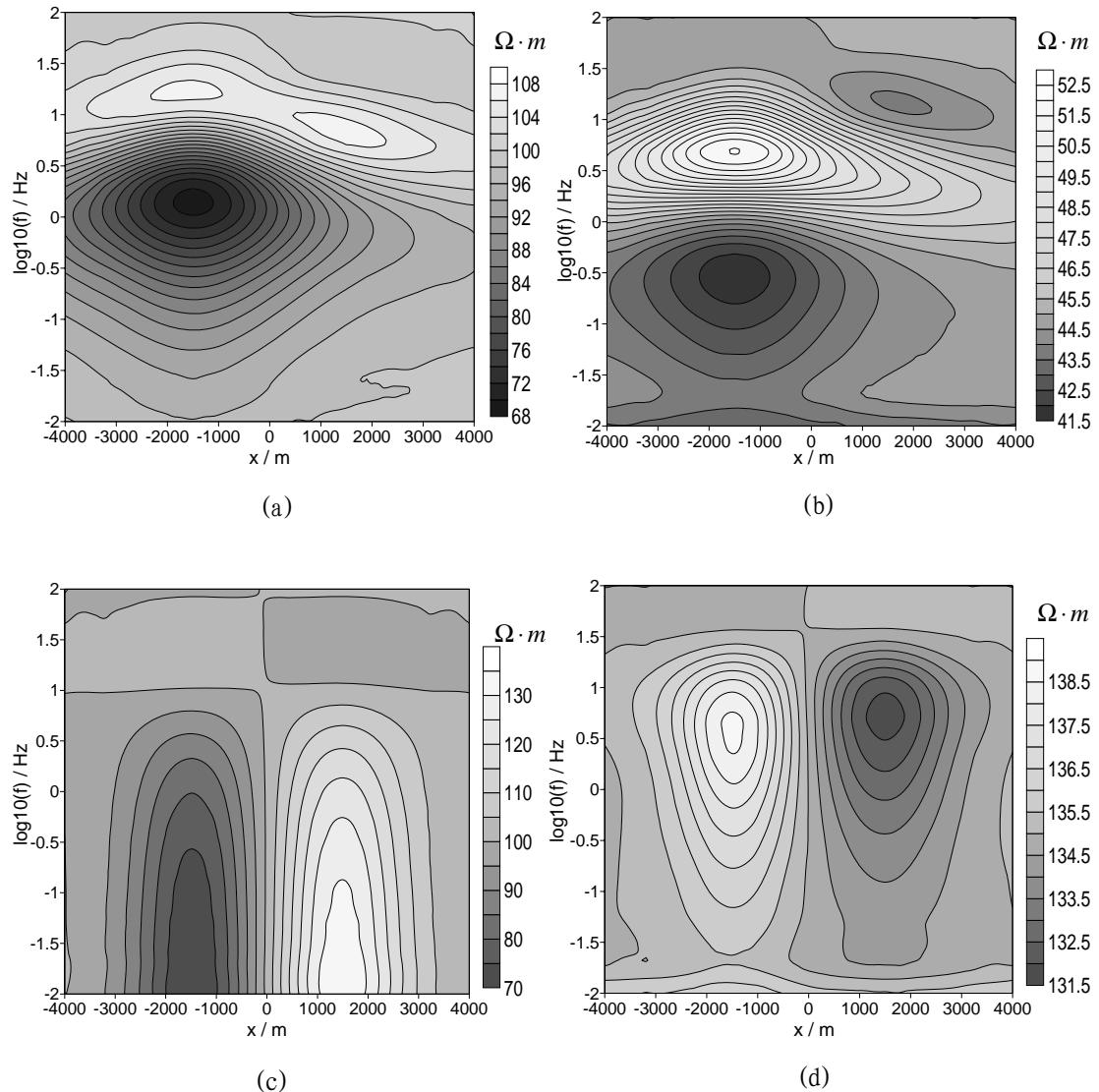


图 4.10 模型 4 双二次插值拟断面图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

模型 5

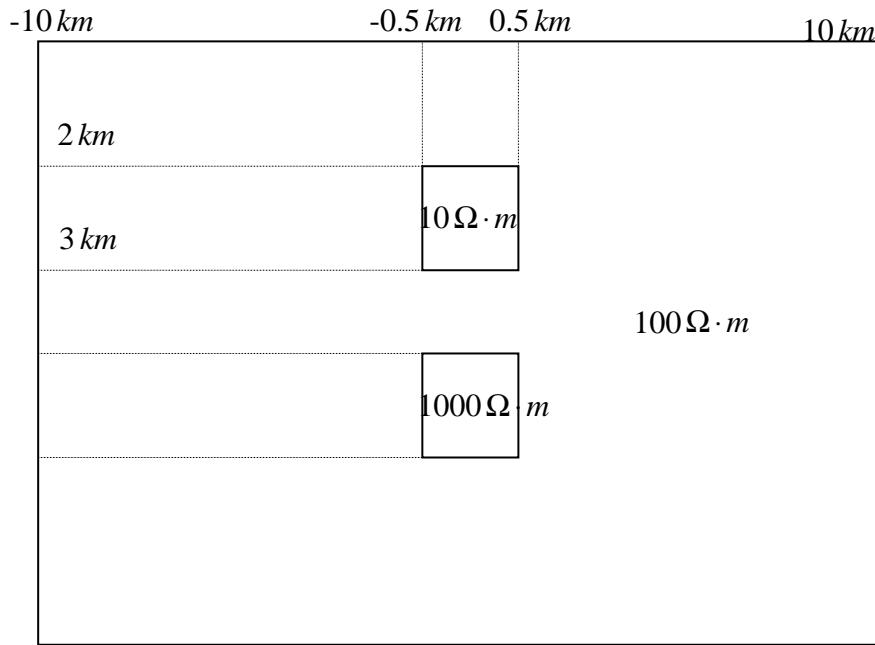


图 4.11 模型 5

网格剖分单元数目：X 轴(水平) 方向为 32 个，Y 轴(垂直) 方向为 41 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

5000	3000	2000	1000	800	600	400	300	200	100	100	100
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	200	300
400	600	800	1000	2000	3000	5000					

Y 轴网格宽度(单位:m)：

200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
400	800	1000	2000	3000	4000	5000	8000	10000	12000	15000	
20000	30000	50000	50000								

对于模型 5，由图 4.12、图 4.13 可看出：

(1) 在相同网格剖分下[网格为 32(水平方向)×41(垂直方向)]，双线性插值计算结果与双二次插值计算结果比较接近。

(2) 在 TE 模式下，在视电阻率拟断面图上，由浅到深呈现出高阻和低阻封闭圈，与模型不相符，这是由于在浅部 2km 至 3km 深度的低阻异常体引起的静态效应影响导致的。相位拟断面图所反映的情况与之类似。

(3) 在 TM 模式下，在视电阻率变化趋势为：由浅至深，逐渐变低。与模型

不相符, 这也是受静态效应影响的结果。相位的拟断面图也未反映出模型异常。

(4) 当在浅部 2km 至 3km 深度有低阻异常体时, 受静态效应的影响, TE 模式和 TM 模式对异常体的反映效果都不佳。

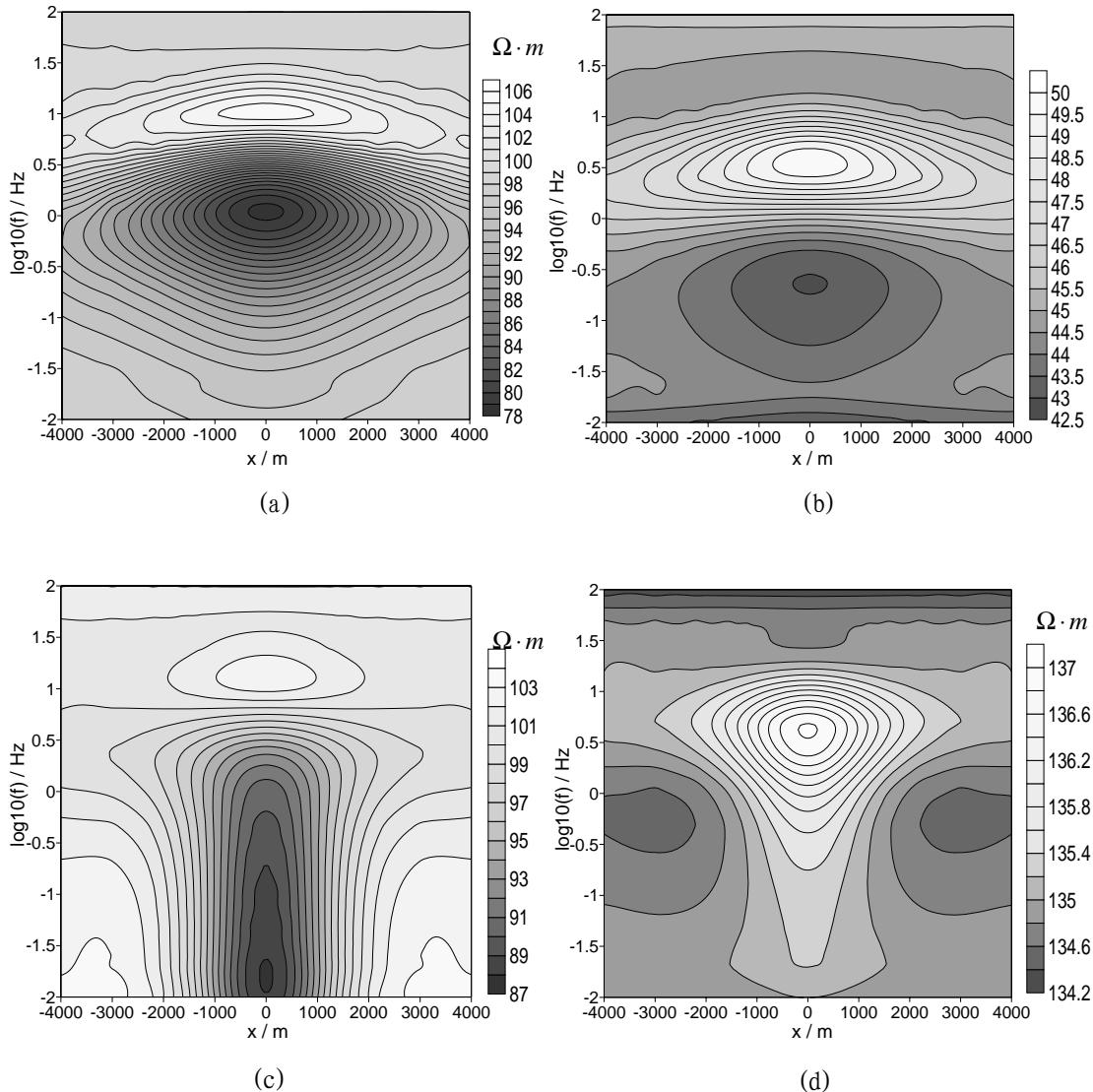


图 4.12 模型 5 双线性插值拟断面图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

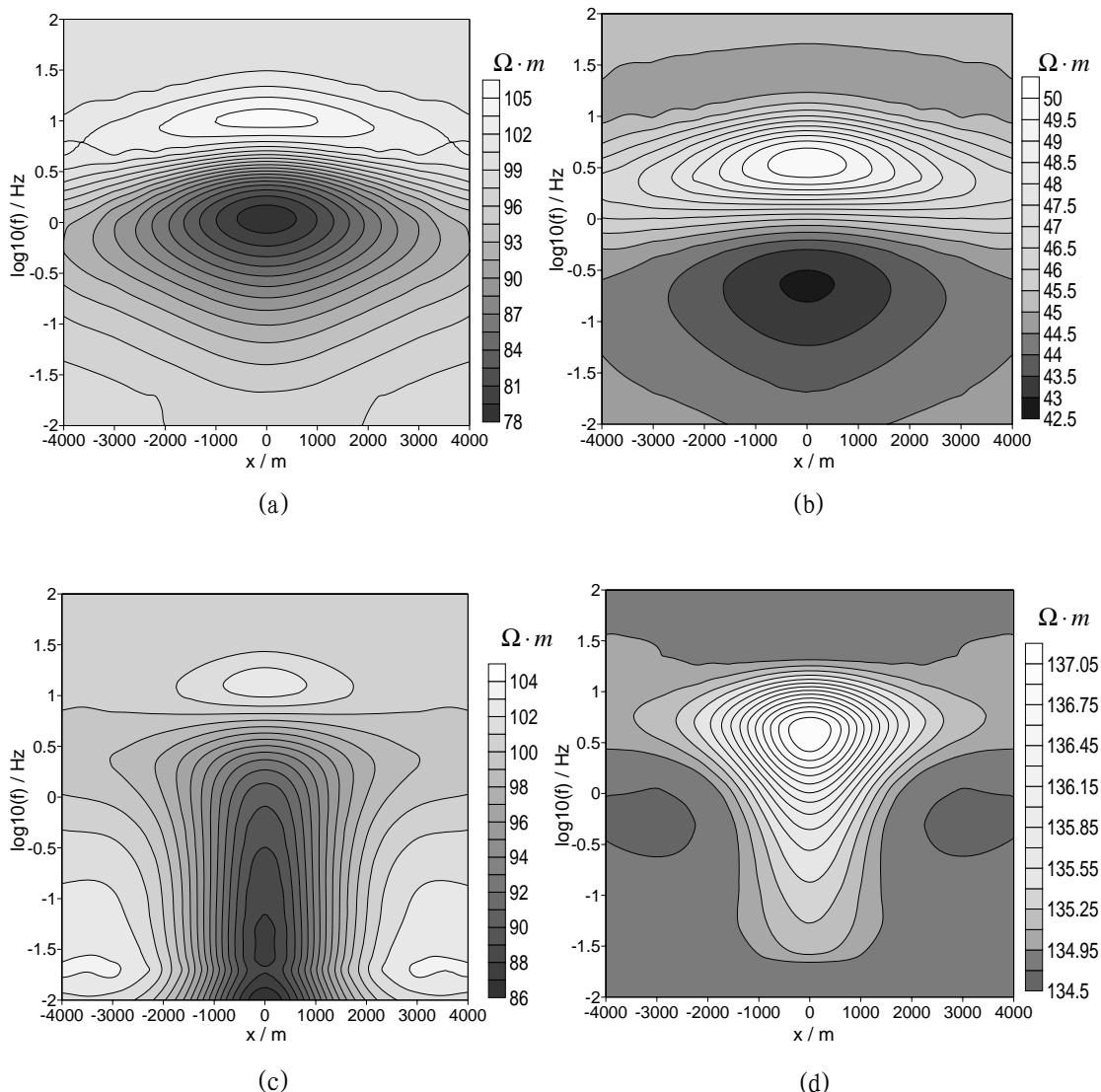


图 4.13 模型 5 双二次插值拟断面图
 (a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

模型 6

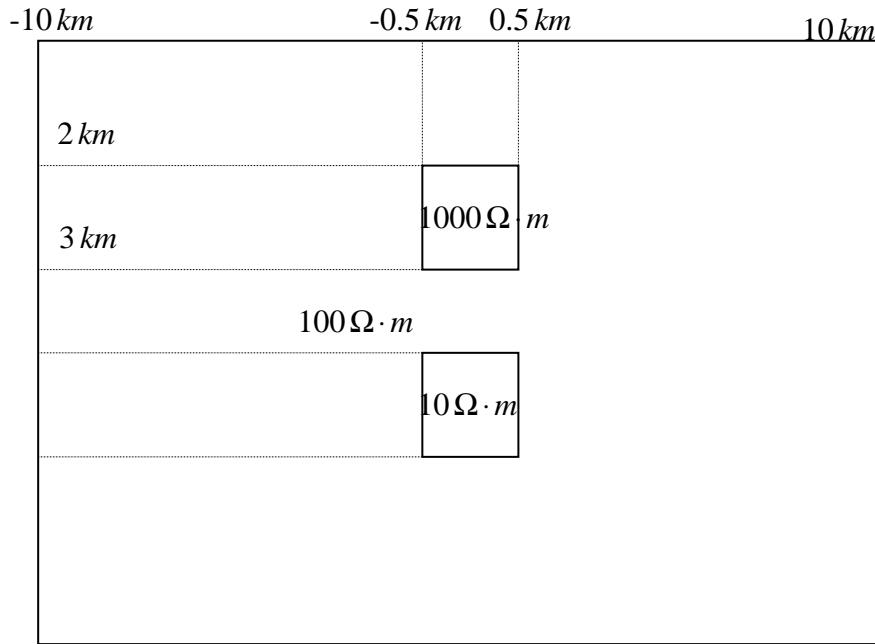


图 4.14 模型 6

网格剖分单元数目: X 轴(水平) 方向为 32 个, Y 轴(垂直) 方向为 41 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

5000	3000	2000	1000	800	600	400	300	200	100	100	100
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	200	300
400	600	800	1000	2000	3000	5000					

Y 轴网格宽度(单位:m) :

200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200
400	800	1000	2000	3000	4000	5000	8000	10000	12000	15000	
20000	30000	50000	50000								

对于模型 6, 由图 4.15、图 4.16 可看出:

- (1) 在相同网格剖分下[网格为 32(水平方向) × 41(垂直方向)], 双线性插值计算结果与双二次插值计算结果比较接近。
- (2) 在 TE 模式下, 在视电阻率拟断面图上, 由浅到深呈现出高阻和低阻封闭圈, 与模型电阻率的分布情况基本符合; 在相位拟断面图上, 模型被反映得更准确。
- (3) 在 TM 模式下, 视电阻率拟断面图和相位拟断面图都受静态效应的影响

较大, 对模型异常反映不太好。

(4) TM 模式比 TE 模式受静态效应影响要大。

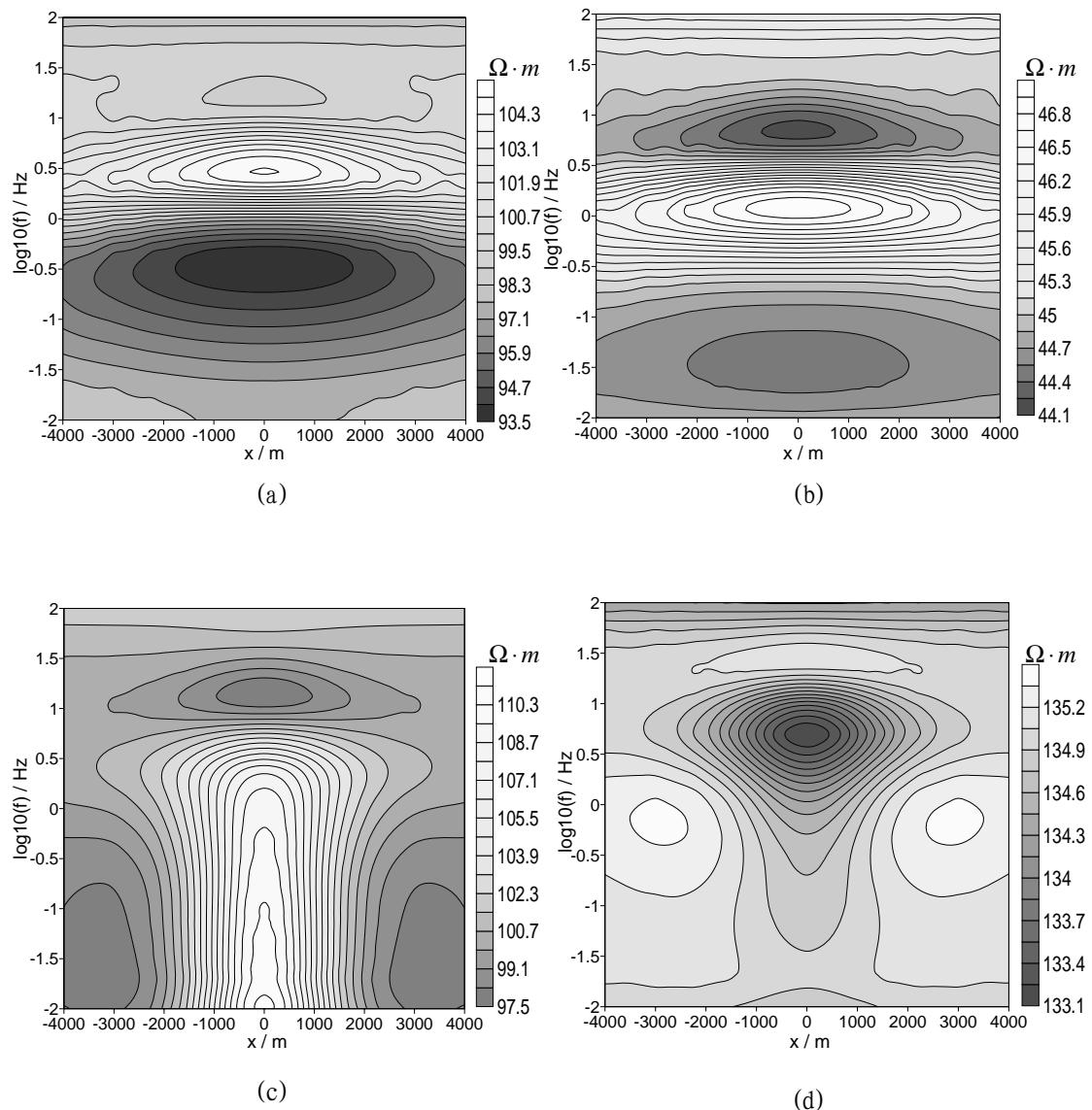


图 4.15 模型 6 双线性插值拟断面图
 (a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

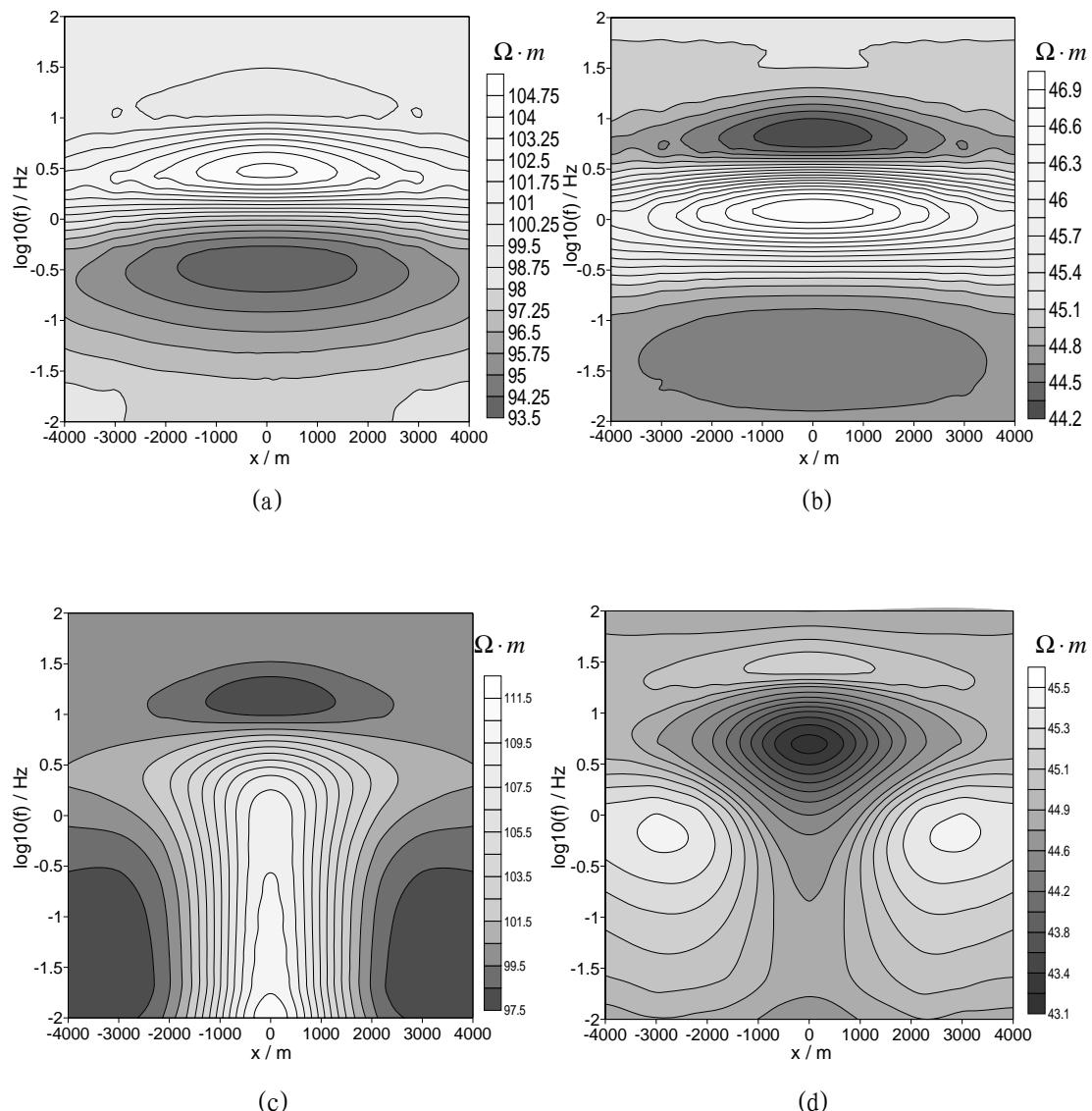


图 4.16 模型 6 双二次插值拟断面图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位拟断面图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位拟断面图

下面将设计两个起伏地形的模型,用来检验程序在计算带地形模型方面的准确性。

模型 7

模型 7 为 $100 \Omega \cdot m$ 的均匀半空间, 带负地形, 即在地表有 500 米深的梯形凹陷如下图所示:

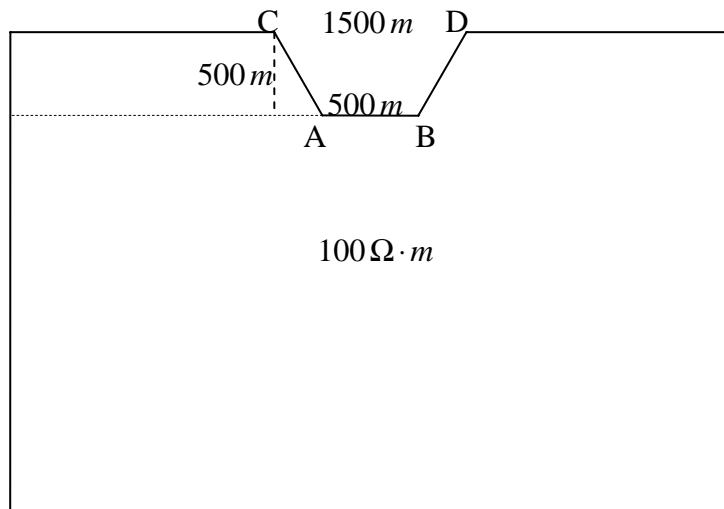


图 4.17 模型 7

网格剖分单元数目: X 轴(水平) 方向为 46 个, Y 轴(垂直) 方向为 28 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

5000	3000	2000	1000	500	300	100	50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50	100	300	500	1000	2000	3000	5000

Y 轴网格宽度(单位:m):

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	100	300
500	1000	2000	2000	4000	7000	9000	10000	12000	15000	20000			
30000	50000												

对于模型 7, 由图 4.17、图 4.18 可看出:

(1) 在相同网格剖分下[网格为 46(水平方向) \times 28(垂直方向)], 双线性插值计算结果与双二次插值计算结果非常接近。

(2) 在 TE 模式下, 视电阻率曲线在 C、D 两点出现极大值, A、B 两点出现极小值, 在高频情况下, 地形的影响明显, 随着频率的降低, 地形的影响较小, 当频率为 0.01Hz 时, 地形影响基本就没有了。相位曲线规律与视电阻率曲线类

似。

(3) 在 TM 模式下, 视电阻率曲线在 C、D 两点出现极小值, A、B 两点出现极大值, 高频受地形的影响较小, 随着频率的降低, 地形的影响增大。相位曲线与视电阻率曲线规律相反, 在 C、D 两点出现极大值, A、B 两点出现极小值, 低频受地形的影响较小, 随着频率的降低, 地形的影响减小, 当频率为 0.01Hz 时, 地形对相位的影响基本就没有了。

(4) TM 模式比 TE 模式受地形的影响要大。

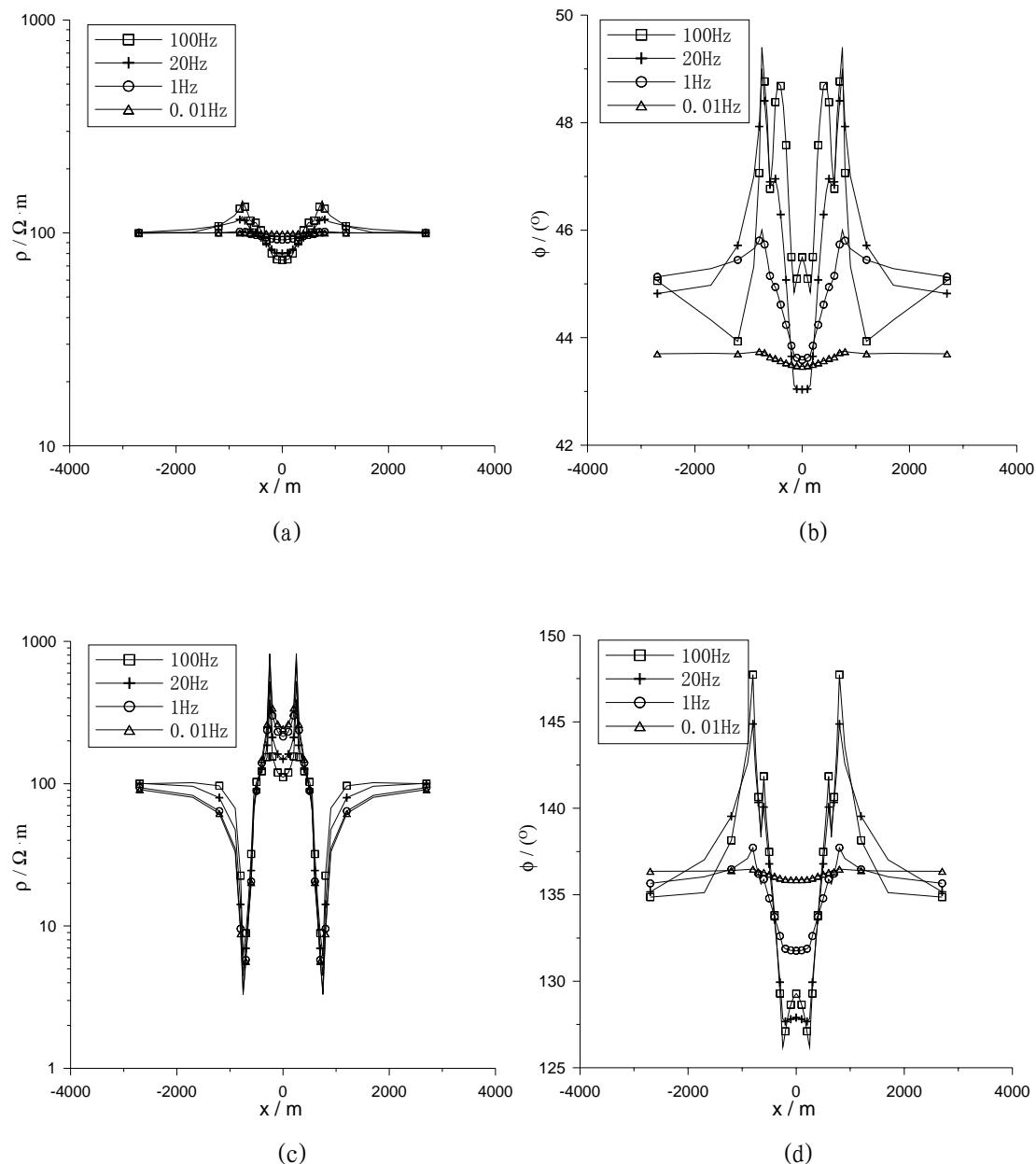


图 4.18 模型 7 在 100Hz、20Hz、1Hz 和 0.01Hz 时双线性插值曲线图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位曲线图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位曲线图

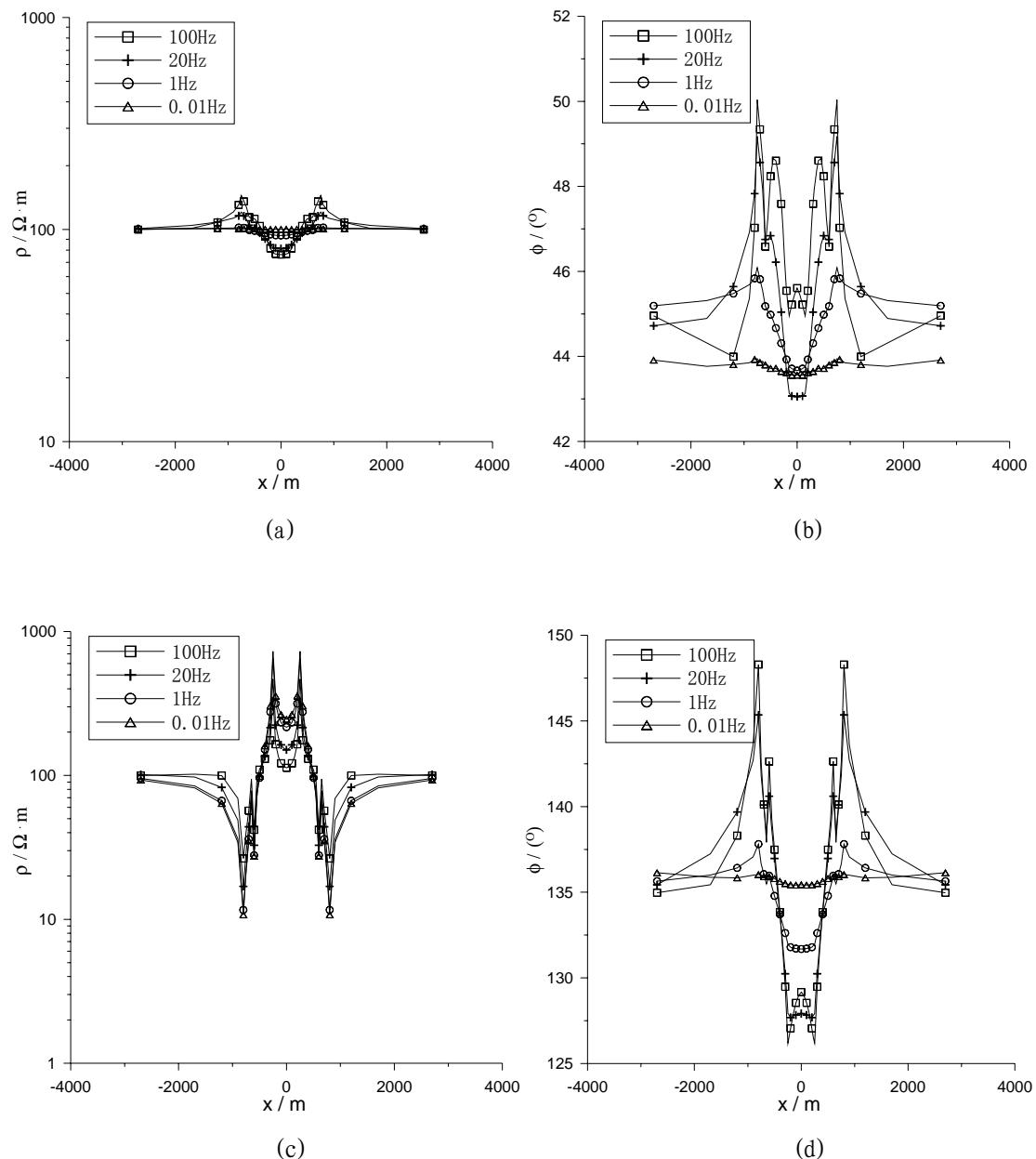


图 4.19 模型 7 在 100Hz、20Hz、1Hz 和 0.01Hz 时双二次插值曲线图
 (a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位曲线图
 (c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位曲线图

模型 8

模型 8 为 $100\Omega\cdot m$ 的均匀半空间，在地表有 450 米高的梯形凸出部分如下图所示：

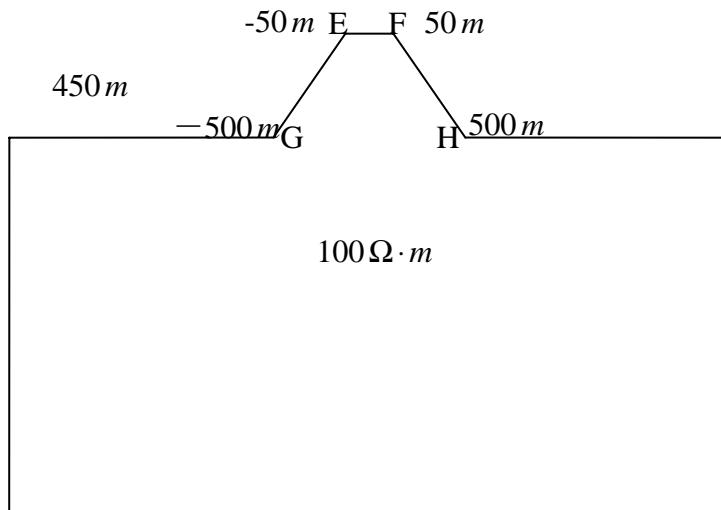


图 4.20 模型 8

网格剖分单元数目：X 轴(水平) 方向为 40 个，Y 轴(垂直) 方向为 29 个。

X 轴网格宽度(单位:m)

5000	5000	3000	1000	1000	500	300	100	50	50	50	50	50
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
50	50	100	300	500	1000	1000	3000	5000	5000			

Y 轴网格宽度(单位:m)：

50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	100	300	500
1000	2000	3000	3000	5000	8000	10000	12000	15000	20000	20000			
25000	30000												

对于模型 8，由图 4.21、图 4.22 可看出：

(1) 在相同网格剖分下[网格为 40(水平方向) \times 29(垂直方向)]，双线性插值计算结果与双二次插值计算结果非常接近。

(2) 在 TE 模式下，视电阻率曲线在 E、F 两点出现极大值，G、H 两点出现极小值，在高频情况下，地形的影响明显，随着频率的降低，地形的影响较小，当频率为 0.01Hz 时，地形影响基本就没有了。相位曲线规律与视电阻率曲线类似。

(3) 在 TM 模式下，视电阻率曲线在 E、F 两点出现极小值，G、H 两点出现

极大值，高频受地形的影响较小，随着频率的降低，地形的影响增大。相位曲线与视电阻率曲线规律相反，在E、F两点出现极大值，G、H两点出现极小值，低频受地形的影响较小，随着频率的降低，地形的影响减小，当频率为0.01Hz时，地形对相位的影响基本就没有了。

(4) TM模式比TE模式受地形的影响要大。

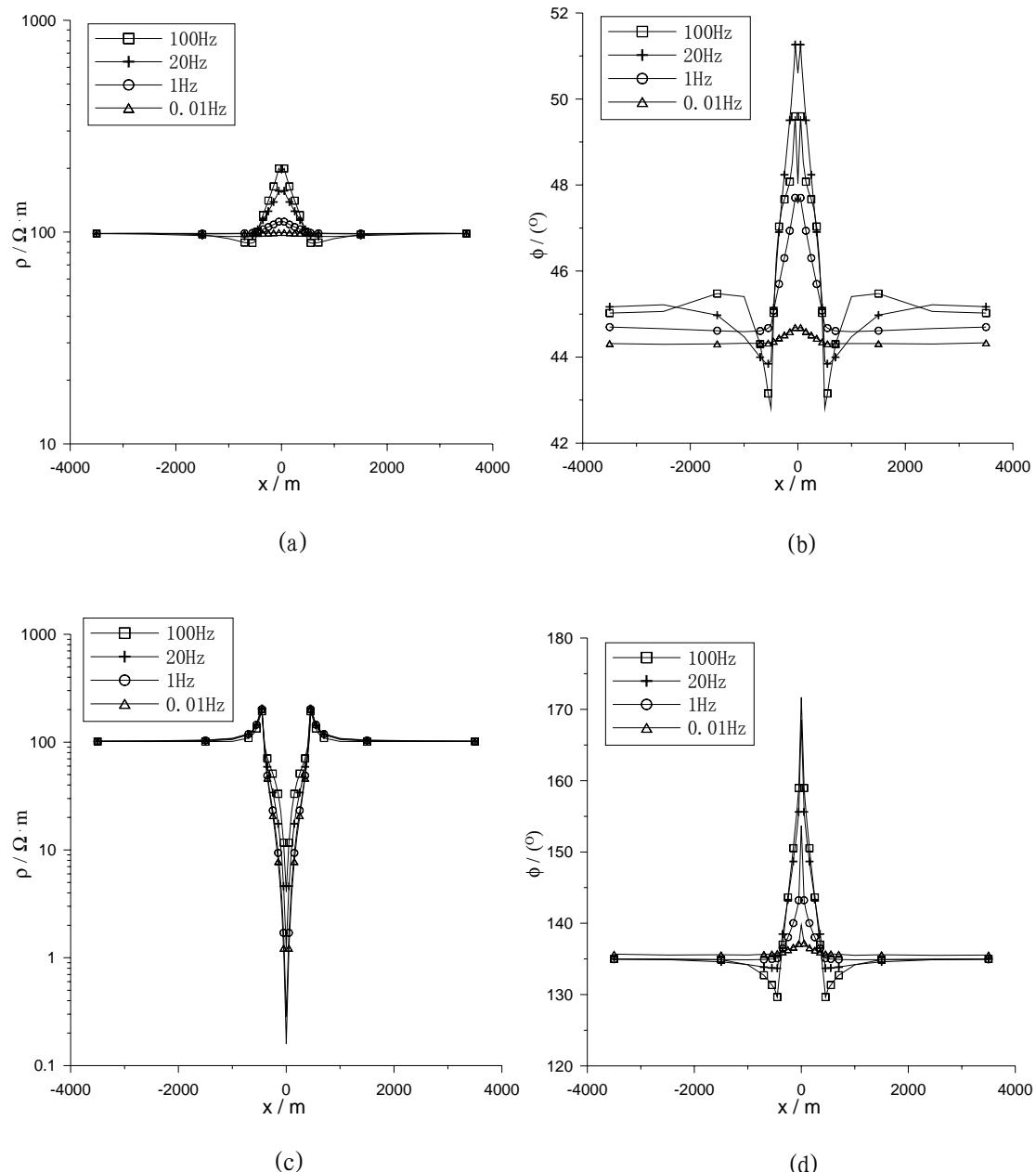


图 4.21 模型 8 在 100Hz、20Hz、1Hz 和 0.01Hz 时双线性插值曲线图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位曲线图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位曲线图

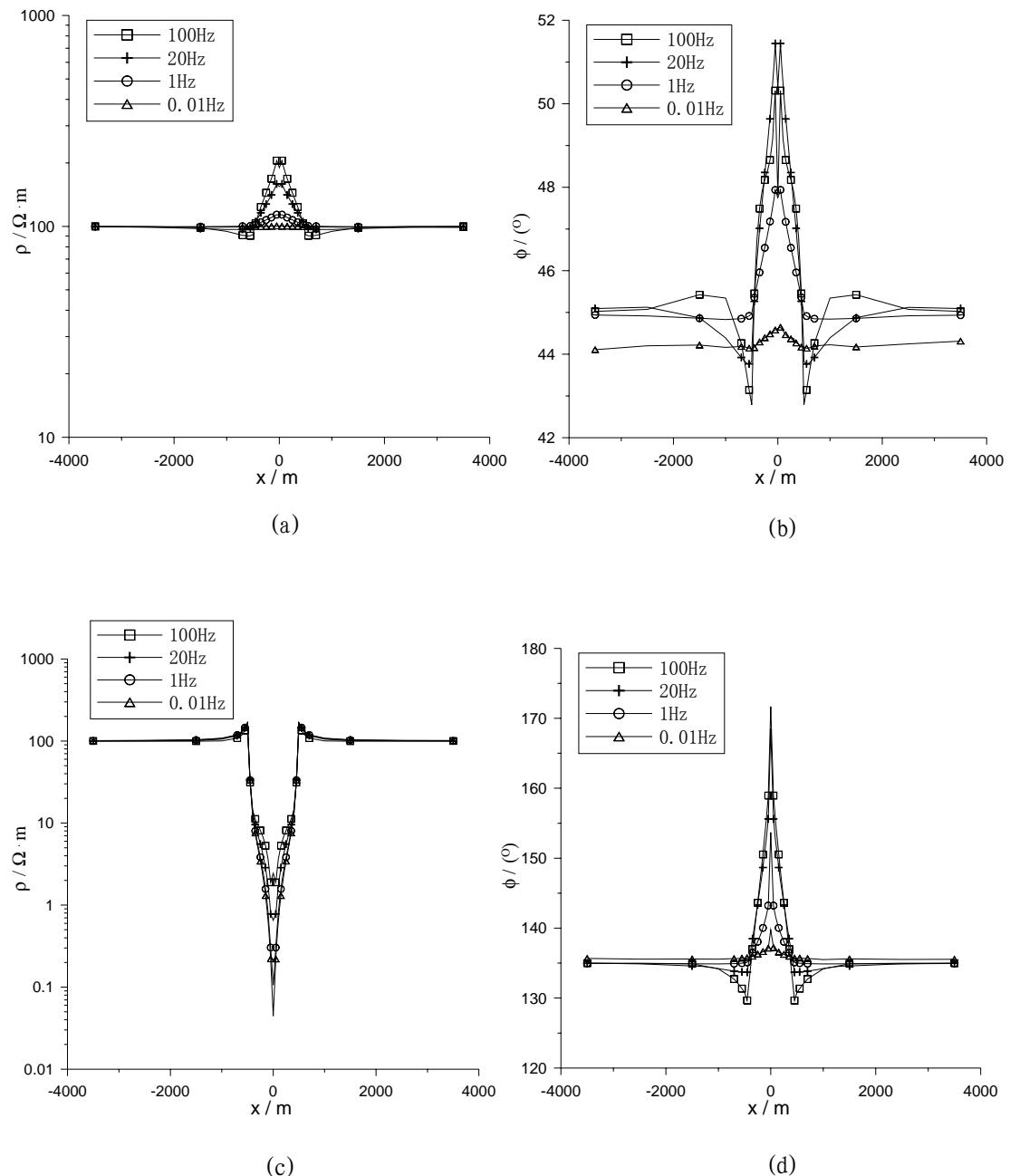


图 4.22 模型 8 在 100Hz、20Hz、1Hz 和 0.01Hz 时双二次插值曲线图

(a)、(b) 分别表示 TE 模式下视电阻率和相位曲线图

(c)、(d) 分别表示 TM 模式下视电阻率和相位曲线图

第五章 结论与建议

5.1 本文的主要研究成果

本文对二介质大地电磁边值问题和变分问题满足的微分方程进行推导,用矩形单元对研究区域进行剖分,每个剖分单元分别采用双线性插值和双二次插值进行插值,然后把求解二维大地电磁变分问题转化为求解一组多元线性代数方程组。本文用矩形剖分单元来拟合起伏地形,每个剖分单元分别采用双线性插值和双二次插值来进行起伏地形二维大地电磁场模拟计算,编写出实用的正演程序。通过计算各种模型断面大地电磁场的分布,研究不同地形地质条件下大地电磁场响应特征的分布规律。

有限元法的关键问题是插值函数和剖分方式的选择。高阶插值函数有较高的精度,但由此导出的有限元方程系数矩阵的计算公式较线性插值的计算公式要复杂得多。对相同的剖分密度,与线性插值相比较,双二次插值函数会大大增加内存需求和计算时间。较小的剖分单元有较高精度的电磁场数值解,但是所求得的视电阻率值精度却不一定高。这是因为在计算视电阻率值时不是直接使用电磁场值,而是用其在地表附近的垂直方向的偏导数。在求取偏导数时使用的是近似方法。较为明智的办法是通过试验,寻求一种平衡,也就是在期望的或者可以接受的精度范围内,尽量减少单元个数,提高电磁场在地表附近垂直方向上的计算精度。在计算视电阻率值或相位值时,求取电场或磁场在地表附近的垂向导数是十分重要的一环。计算表明采用近地表4个等距离节点计算导数的效果较好,本文采用近地表4个等节点计算。

有限元模拟大地电磁中网格剖分很重要,既要满足精度要求,又要使计算速度尽可能的快,通过几个典型模型的模拟计算得出以下规律:在界面和物性变化剧烈的地方,应该采用密集的较小的单元,而在其它区域则采用稀疏的较大的单元;垂直方向网格剖分深度要达到最小频率计算趋肤深度的3倍,才能使低频计算的视电阻率和相位有较高的精度。

通过对8个典型模型的模拟分析,得出如下结论:

- (1) TE模式纵向分辨率高; TM模式横向分辨率高。对于TE模式而言,其相位的拟断面图更合理,更与异常体相吻合。
- (2) TM模式受静位移的影响大于TE模式。浅部埋藏高阻体时静位移影响小于浅部埋藏低阻异常体的情况。
- (3) 在带地形情况下,对于两种极化模式而言, TM模式受到的影响要大些, TM极化模式下,高频时受到的影响较小,随频率的降低而逐渐增大; TE极化模式下,高频时受到的影响较大,随频率的降低而逐渐减小。

5.2 不足及需要改进之处

本文对起伏地形条件下二维大地电磁进行了数值模拟，取得了一定的效果，但还存在不足之处，这正是需要改进之处，也是以后研究的方向。

- (1) 本文采用矩形单元对起伏地形进行拟合，比用三角形单元拟合要差。
- (2) 在解刚度矩阵所构成的线性方程组时，还有待于推导出一维压缩存储（仅存储非零元素）的乔里斯基(Cholesky)分解算法 LDL^T 。

参考文献

- [1] Tikhonov, A. N. Determination of the electrical characteristics of the deep strata of the Earth's crust. *Dokl Akad. Nauk SSR*, 1950, 73: 295–311.
- [2] Cagniard. L. Basic. Theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting, *Geophysics*, 1953, 18: 605–635.
- [3] 王家映. 石油电法勘探, 石油工业出版社.
- [4] Coggon J H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method[J]. *Geophysics*, 1971, 36(2): 132–151.
- [5] William L, Rodi. A technique for improving the accuracy of finite element solution for magnetotelluric data[J]. *Geophysics*, 1976, 44: 483–506.
- [6] Rijo L. Modeling of electric and electromagnetic data[D]. Ph. D dissertation, University of Utah, 1977.
- [7] Wannamaker P E, Stodt J A, Rijo L. Two-dimensional topographic responses in magnetotelluric model using finite elements, *Geophysics*, 1986, 51: 2131–2144.
- [8] Wannamaker P E, Stodt J A, Rijo L. A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling[J]. *Geophysics*, 1987, 52: 277–296.
- [9] de Lugo P, Wannamaker P E. Calculating the two-dimensional magnetotelluric Jacobian in finite elements using reciprocity[J]. *Geophysics*, 1996, 61: 806–810.
- [10] Franke A, Ralph B, Klaus S. 2D finite element modeling of plane-wave diffusive time-harmonic electromagnetic fields using adaptive unstructured grids[J]. Proceeding of the 17th Workshop, 2004, S. 2: 1–6.
- [11] Reddy I K. Three-dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding[J]. *Geophysics*, 1977, 51: 313–325.
- [12] Mogi T. Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite-element method[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 1996, 35: 185–189.
- [13] Zyserman F I, Santos J E. Parallel finite element algorithm with domain decomposition for three-dimensional magnetotelluric modeling[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2000, 44: 337–351.

- [14] Son J S, Song y, Suh J H. High-Frequency Three-Dimensional Electromagnetic Modeling Using Vector Finite Elements[J]. Three-Dimensional Electromagnetics III, Adelaide, Australia, February, 2003: 20–21.
- [15] Mitsuhasha Y, Uchida T. 3D magnetotelluric modeling using the T-finite-element method[J]. Geophysics, 2004, 69, 108–119.
- [16] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 水利出版社, 1979.
- [17] 陈乐寿. 有限元法在大地电磁测深正演计算中的应用与改进[J]. 石油物探, 1981, 20(3): 84–103.
- [18] 陈乐寿, 孙必俊. 有限元法在大地电磁测深中正演计算的改进[J]. 石油地球物理勘探, 1982, 17(3): 69–72.
- [19] 胡建德, 王光愕, 陈乐寿等. 大地电磁二维正演计算中若干问题的讨论[J]. 石油地球物理勘探, 1982, 17(6): 47–55.
- [20] 胡建德, 蔡刚. 用三角形二次插值法计算二维大地电磁测深曲线[J]. 石油地球物理勘探, 1984, 19(4): 358–367.
- [21] 赵生凯, 徐世浙. 有限单元法计算良导体嵌入体的大地电磁测深曲线[J]. 物探化探计算技术, 1983, 5(1): 47–55.
- [22] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 科学出版社, 1994.
- [23] 徐世浙, 于涛, 李予国等. 电导率连续变化的 MT 有限元正演(I) [J]. 高校地质学报, 1995, 1(2): 65–73.
- [24] 李予国, 徐世浙, 刘斌等. 电导率连续变化的 MT 有限元正演(II) [J]. 高校地质学报, 1996, 2(4): 448–452.
- [25] 陈小斌. 有限元直接迭代算法[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21(2): 165–171.
- [26] 陈小斌, 张翔, 胡文宝. 有限元直接迭代算法在 MT 二维正演中的应用[J]. 石油地球物理勘探, 2000, 35(4): 487–496.
- [27] 刘小军, 王家林, 于鹏. 基于二次场的二维大地电磁有限元数值模拟[J]. 同济大学学报, 2007, 35(8): 1113–1117.
- [28] 黄临平, 戴世坤. 复杂条件下 3D 电磁场有限元计算方法[J]. 中国地质大学学报, 2002, 27(6): 775–779.
- [29] 王若, 王妙月, 卢元林. 三维三分量 CASMT 法有限元正演模拟研究初探[J]. 地球物理学进展, 2007, 22(2): 579–585.
- [30] 陈乐寿, 王光愕. 大地电磁测深法, 地质出版社, 1990.
- [31] 漆新民, 电磁场论. 武汉大学出版社, 1998.

- [32] 张永杰, 孙秦, 李江海. 大型稀疏线性方程组的改进 ICCG 方法[J]. 计算物理, 2007, (5).
- [33] 张永杰, 孙秦. 大型稀疏线性方程组新的 ICCG 方法[J]. 数值计算与计算机应用, 2007, (2).
- [34] 张永杰, 孙秦. 大型稀疏线性方程组的全稀疏存贮策略[J]. 陕西理工大学学报(自然科学版), 2005, (4).
- [35] 吴小平, 徐果明, 李时灿. 解大型稀疏方程组的 ICCG 方法及其计算机实现[J]. 煤田地质与勘探, 1999, (6).

附 录

程序源代码:

```

!=====
!
!          主程序
!
!      本程序用于矩形单元、双二次插值有限单元法求解二维大地电磁问题
!
PROGRAM MAIN
USE IMSL
ALLOCATABLE OMIGA(:), FRE(:, :), RO(:, :, :), SHITA(:, :, :), DLX(:, :), DLY(:, :), &
X(:, :), Y(:, :), RES(:, :, :), KE(:, :, :), KE1(:, :, :), U(:, :, :), U3(:, :, :), &
U4(:, :, :), U1(:, :, :), FAC1(:, :, :), IPVT(:, :, :), BBB(:, :, :), XXX(:, :, :), &
LN(:, :, :), LM(:, :, :)
DIMENSION U2(4)
INTEGER T, L, NX, NY, ND, ND1, NZ, NE, NRES, NFRE, DLX, DLY, IPVT, &
TDX, NDX, LN, LM
REAL RO, SHITA, OMIGA, SGM, B, X, Y, TIME_BEGIN, TIME_END, TIME, TIME1, &
TEMP, TEMP1, TEMP2
CHARACTER *20 FILENAME, OUTFILE1, OUTFILE2
COMPLEX KE, KE1, U, U1, U2, U3, U4, FAC1, BBB, XXX
CALL CPU_TIME(TIME_BEGIN)
WRITE(*, *) "请输入模型参数文件名:"
READ(*, *) FILENAME
WRITE(*, *) "请输入结果保存文件名(两个):" !其中第二个输出频率为对数
READ(*, *) OUTFILE1, OUTFILE2
OPEN(11, FILE=FILENAME, STATUS='OLD', &
      ACCESS='SEQUENTIAL', FORM='FORMATTED')
READ(11, *) T
READ(11, *) TDX, NDX
READ(11, *) NX
READ(11, *) NY
READ(11, *) NZ
READ(11, *) NRES
READ(11, *) NFRE

```

```

ALLOCATE (FRE (NFRE) , RES (NRES) , DLX (NX) , DLY (NY) , OMIGA (NFRE) , &
          RO (NFRE, NX+1) , SHITA (NFRE, NX+1) )

READ (11, *) (FRE (I) , I=1, NFRE)
READ (11, *) (RES (I) , I=1, NRES)
SGM=1. 0/RES (1)
DEALLOCATE (RES)

READ (11, *) (DLX (I) , I=1, NX)
READ (11, *) (DLY (I) , I=1, NY)
B=DLY (1) /2. 0
CLOSE (11)

ND=3*NX*(NY+NZ)+2*NX+2*(NY+NZ)+1           !ND 为 TE 模式节点总数
ND1=3*NX*NY+2*NX+2*NY+1                      !ND 为 TM 模式节点总数
NE=NX*(NY+NZ)                                  !NE 是单元总

CALL CALOMIGA (NFRE, FRE, OMIGA)

TIME=0. 0

DO 100 I=1, NFRE !, 1, -1
    ALLOCATE (KE (ND, ND) , U (ND) , LN (NX+1) , LM (NX) )
    CALL EKU (T, TDX, NDX, FILENAME, NX, NY, NZ, ND, NE, NRES, &
              NFRE, OMIGA (I) , KE, U, LN, LM)
    CALL CPU_TIME (TIME_END)
    IF (T. EQ. 1) THEN
        ALLOCATE (U3 (ND) , BBB (ND, 1) , XXX (ND, 1) , FAC1 (ND, ND) , IPVT (ND) )
        BBB (1:ND, 1)=U (1:ND)
        CALL LFTCG (ND, KE, ND, FAC1, ND, IPVT)
        CALL LFSCG (ND, FAC1, ND, IPVT, BBB (1, 1) , 1, XXX (1, 1) )
        U3 (1:ND)=XXX (1:ND, 1)
        DEALLOCATE (KE, U, BBB, XXX, FAC1, IPVT)
        DO 700 JK=1, NX+1
            DO 600 IJ=1, 4
                U2 (IJ)=U3 ((JK-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*NZ+IJ+LN (JK) )
600             CONTINUE
                CALL ROXW (T, B, U2, OMIGA (I) , SGM, RO (I, JK) , SHITA (I, JK) )
700             CONTINUE
            DEALLOCATE (U3, LN, LM)

```

```

ELSE
  ALLOCATE (KE1 (ND1, ND1) , U4 (ND1) )
  DO 500 K=1, ND1
    TEMP1=REAL (U (K) )
    TEMP2=AIMAG (U (K) )
    U4 (K)=CMPLX (TEMP1, TEMP2)
    DO 400 J=1, ND1
      TEMP1=REAL (KE (K, J) )
      TEMP2=AIMAG (KE (K, J) )
      KE1 (K, J)=CMPLX (TEMP1, TEMP2)
400    CONTINUE
500    CONTINUE
    DEALLOCATE (KE, U)
    ALLOCATE (U1 (ND1) , BBB (ND1, 1) , XXX (ND1, 1) , IPVT (ND1) , &
              FAC1 (ND1, ND1) )
    BBB (1:ND1, 1)=U4 (1:ND1)
    CALL LFTCG (ND1, KE1, ND1, FAC1, ND1, IPVT)
    CALL LFSCG (ND1, FAC1, ND1, IPVT, BBB (1, 1) , 1, XXX (1, 1) )
    U1 (1:ND1)=XXX (1:ND1, 1)
    DEALLOCATE (KE1, U4, BBB, XXX, IPVT, FAC1)
    DO 900 JK=1, NX+1
      DO 800 IJ=1, 4
        U2 (IJ)=U1 ((JK-1)*(3*NY+2)+IJ+LN (JK) )
800    CONTINUE
    CALL ROXW (T, B, U2, OMINA (I) , SGM, RO (I, JK) , SHITA (I, JK) )
900    CONTINUE
    DEALLOCATE (U1, LN, LM)
  END IF
  CALL CPU_TIME (TIME_END)
  TIME1=TIME_END-TIME_BEGIN-TIME
  TIME=TIME_END-TIME_BEGIN
  WRITE (*, *) "Time of operation was", TIME1, " seconds"
  WRITE (*, *) I, FRE (I)
  WRITE (*, *) (RO (I, J) , J=1, NX+1)

```

```

        WRITE(*, *) (SHITA(I, J), J=1, NX+1)
        WRITE(*, *)
!
PAUSE
100 CONTINUE
DEALLOCATE(OMIGA)
CALL CPU_TIME(TIME_END)
WRITE(*, *) "ALL Time of operation was", TIME_END-TIME_BEGIN, &
           " seconds"
ALLOCATE(X(NX+1), Y(NY+1))
CALL CALXY(NX, NY, DLX, DLY, X, Y)
DEALLOCATE(Y, DLX, DLY)
CALL OUTPUT(T, OUTFILE1, OUTFILE2, NX, NFRE, TIME_END, &
            TIME_BEGIN, FRE, X, RO, SHITA)
DEALLOCATE(FRE, X, RO, SHITA)
END
!=====
!
          合成总体系数矩阵 KE
!=====

SUBROUTINE EKU(T, TDX, NDX, FILENAME, NX, NY, NZ, ND, NE, NRES, &
               NFRE, OMIGA, KE, BU, LN, LM)
DIMENSION FRE(NFRE), XY(2, ND), X(NX+1), Y(NY+1), RO(NRES), DLX(NX), &
           DLY(NY), DLAZ(NZ), NPT(NY, NX), I8(8, NE), KE(ND, ND), &
           OMIGA(NFRE), U1(2*NX+1), BU(ND), NB1(2*NX+1), &
           LN(NX+1), LM(NX), X0(NDX), Y0(NDX)
INTEGER T, NODEX, NODEY, NRES, NFRE, NX, NY, NZ, ND, NE, NPT, I8, ND1, &
        NB1, DLX, DLY, DLAZ, TDX, NDX, LN, LM
REAL FRE, XY, X, Y, RO, OMIGA, TEMP, A, B, X0, Y0
CHARACTER *20 FILENAME
COMPLEX KE, U1, BU, U
CALL INP(FILENAME, TDX, NDX, NX, NY, NZ, NRES, NFRE, FRE, DLAZ, &
        RO, DLX, DLY, NPT, X0, Y0) !读入模型参数
CALL CALXY(NX, NY, DLX, DLY, X, Y)
!计算各个水平间隔点的 X 坐标和计算垂直间隔点的 Y 坐标
call XYI8(T, NX, NY, NZ, X, Y, ND, NE, DLAZ, XY, I8)

```

```

!计算各个单元的节点编号和各个节点的坐标
CALL SUMEK(T, NRES, NX, NY, NZ, ND, NE, XY, I8, NPT, RO, OMIGA, KE)
IF (TDX. EQ. 1) THEN
  CALL ADDTOP(X0, Y0, NDX, NX, X, Y(1), DLY(1)/1.0, LN, LM)
END IF
ND1=2*NX+1
IF (T. EQ. 1) THEN
  DO 10 J=1, NX
    K=2*J-1
    NB1(K)=(J-1)*(3*(NY+NZ)+2)+1
    NB1(K+1)=(J-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*(NY+NZ)+2
    U1(K)=(1.0, 0.0)
    U1(K+1)=(1.0, 0.0)
10      CONTINUE
    NB1(2*NX+1)=NX*(3*(NY+NZ)+2)+1
    U1(2*NX+1)=(1.0, 0.0)
  ELSE
    DO 20 J=1, NX
      K=2*J-1
      NB1(K)=(J-1)*(3*NY+2)+1+LN(J)
      NB1(K+1)=(J-1)*(3*NY+2)+2*NY+2+LM(J)
      U1(K)=(1.0, 0.0)
      U1(K+1)=(1.0, 0.0)
20      CONTINUE
      NB1(2*NX+1)=NX*(3*NY+2)+1+LN(NX+1)
      U1(2*NX+1)=(1.0, 0.0)
  END IF
  CALL boundary1(ND1, NB1, U1, ND, KE, BU)
  RETURN
END

!-----
module constant
real ( kind = 4 ), parameter :: pi = 3.14159265358979 !圆周率
real ( kind = 4 ), parameter :: miu = 4*pi*1.0e-7 !磁导率

```

```

real ( kind = 4 ), parameter :: ebu = 8.85433e-12 !电介常数
end module constant
!-----
!          本子程序用于区域剖分
!-----
!      (1) 功能
!          自动形成规则网格的节点 xy 坐标数组 XY 和单元节点编号数组 I8
!      (2) 使用说明
!          子程序语句
!          SUBROUTINE XYI4(T, NX, NY, NZ, X, Y, ND, NE, DLAZ, XY, I8)
!          哑元说明
!          NX——整变量, 输入参数, 水平间隔数
!          NY——整变量, 输入参数, 垂直间隔数
!          NZ——整变量, 输入参数, 空气层间隔数
!          X——NX+1 个元的一维实数组, 输入参数, 存放水平间隔点 x 坐标
!          Y——NY+1 个元的一维实数组, 输入参数, 存放垂直间隔点 y 坐标
!          ND——整变量, 输入参数, ND=(NX+1)*(NY+NZ+1) 是节点总数
!          NE——整变量, 输入参数, NE=NX*(NY+NZ) 是单元总数
!          DLAZ——NZ 个元的一维整数组, 输入参数, 空气层间隔厚度
!          XY——2×ND 的二维实数组, 输出参数, 存放节点的 xy 坐标
!          I8——8×NE 的二维实数组, 输出参数, 存放单元的节点编号。
!          -----
!          SUBROUTINE XYI8(T, NX, NY, NZ, X, Y, ND, NE, DLAZ, XY, I8)
!          DIMENSION X(NX+1), Y(NY+1), Z(NZ), XY(2, ND), I8(8, NE), DLAZ(NZ)
!          REAL X, Y, Z, XY
!          INTEGER T, NX, NY, NZ, ND, NE, I8, DLAZ, SUM
!          DO 1 I=1, ND
!              DO 2 J=1, 2
!                  XY(J, I)=0. 0
! 2          CONTINUE
! 1          CONTINUE
!          DO 3 I=1, NE
!              DO 4 J=1, 8
!                  I8(J, I)=0. 0

```

```

4      CONTINUE
3      CONTINUE
      SUM=0
      DO 100 I=1, NZ
         SUM=SUM+DLAZ(I)
100 CONTINUE
      Z(1)=SUM
      DO 200 I=2, NZ
         Z(I)=Z(I-1)-DLAZ(I-1)
200 CONTINUE
      IF (T. EQ. 1) THEN
         DO 60 IX=1, NX
            DO 50 IY=1, NY+NZ
               N=(IX-1)*(NY+NZ)+IY
               N1=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*IY-1
               I8(1, N)=N1
               I8(2, N)=N1+2
               I8(3, N)=I8(2, N)+3*(NY+NZ)+2
               I8(4, N)=N1+3*(NY+NZ)+2
               I8(5, N)=N1+1
               I8(6, N)=I8(2, N)+2*(NY+NZ)-IY+1
               I8(7, N)=I8(5, N)+3*(NY+NZ)+2
               I8(8, N)=I8(6, N)-1
50      CONTINUE
60      CONTINUE
      ELSE
         DO 80 IX=1, NX
            DO 70 IY=1, NY
               N=(IX-1)*NY+IY
               N1=(IX-1)*(3*NY+2)+2*IY-1
               I8(1, N)=N1
               I8(2, N)=N1+2
               I8(3, N)=I8(2, N)+3*NY+2
               I8(4, N)=N1+3*NY+2

```

```

I8(5, N)=N1+1
I8(6, N)=I8(2, N)+2*NY-IY+1
I8(7, N)=I8(5, N)+3*NY+2
I8(8, N)=I8(6, N)-1

70      CONTINUE

80      CONTINUE

END IF

IF (T. EQ. 1) THEN

DO 10 IX=1, NX+1
DO 15 IY=1, NZ-1
N=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*IY-1
N1=N+1
XY(1, N)=X(IX)
XY(2, N)=Z(IY)
XY(1, N1)=X(IX)
XY(2, N1)=Z(IY)-(Z(IY)-Z(IY+1))/2

15      CONTINUE
N=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*(NZ-1)-1
XY(1, N+2)=X(IX)
XY(2, N+2)=Z(NZ)
XY(1, N+3)=X(IX)
XY(2, N+3)=Z(NZ)/2.0
DO 16 IY=NZ+1, NY+NZ
N=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+2*IY-1
N1=N+1
XY(1, N)=X(IX)
XY(2, N)=Y(IY-NZ)
XY(1, N1)=X(IX)
XY(2, N1)=Y(IY-NZ)-(Y(IY-NZ)-Y(IY-NZ+1))/2

16      CONTINUE
XY(1, N+2)=X(IX)
XY(2, N+2)=Y(NY+1)

10      CONTINUE
DO 20 IX=1, NX

```

```

DO 25 IY=1, NZ
    N=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+(2*(NY+NZ)+1)+IY
    XY(1, N)=X(IX)+(X(IX+1)-X(IX))/2
    XY(2, N)=Z(IY)

25      CONTINUE

DO 26 IY=NZ+1, NY+NZ+1
    N=(IX-1)*(3*(NY+NZ)+2)+(2*(NY+NZ)+1)+IY
    XY(1, N)=X(IX)+(X(IX+1)-X(IX))/2
    XY(2, N)=Y(IY-NZ)

26      CONTINUE

20      CONTINUE

ELSE
    DO 40 IX=1, NX+1
        DO 30 IY=1, NY
            N=(IX-1)*(3*NY+2)+2*IY-1
            N1=N+1
            XY(1, N)=X(IX)
            XY(2, N)=Y(IY)
            XY(1, N1)=X(IX)
            XY(2, N1)=Y(IY)-(Y(IY)-Y(IY+1))/2

30      CONTINUE
            XY(1, N+2)=X(IX)
            XY(2, N+2)=Y(NY+1)

40      CONTINUE
        DO 45 IX=1, NX
            DO 35 IY=1, NY+1
                N=(IX-1)*(3*NY+2)+(2*NY+1)+IY
                XY(1, N)=X(IX)+(X(IX+1)-X(IX))/2
                XY(2, N)=Y(IY)

35      CONTINUE

45      CONTINUE

END IF
RETURN
END

```

```

!-----
! 本子程序用于计算水平间隔点的 X 坐标和计算垂直间隔点的 Y 坐标
!  (1) 功能
!      已知剖分网格后自动计算水平间隔点的 X 坐标和
!          计算垂直间隔点的 Y 坐标
!  (2) 使用说明
!      子程序语句 DF
!      哑元说明
!      NX——整变量, 输入参数, 水平间隔数
!      NY——整变量, 输入参数, 垂直间隔数
!      DLX——NX 个元一维整数组, 输入参数, 存放 X 轴网格单元的宽度
!      DLY——NY 个元一维整数组, 输入参数, 存放 Y 轴网格单元的厚度
!      X——NX+1 个元的一维实数组, 输出参数, 存放水平间隔点的 x 坐
!      标
!      Y——NY+1 个元的一维实数组, 输出参数, 存放垂直间隔点的 y 坐
!      标
!-----

SUBROUTINE CALXY (NX, NY, DLX, DLY, X, Y)
DIMENSION X (NX+1), Y (NY+1), DLX (NX), DLY (NY)
INTEGER NX, NY, DLX, DLY
REAL X, Y, SUMX
SUMX=0. 0
DO 100 I=1, NX
    SUMX=SUMX+DLX (I)
100 CONTINUE
X (1)=-SUMX/2. 0
Y (1)=0. 0
DO 200 I=2, NX+1
    X (I)=X (I-1)+DLX (I-1)
200 CONTINUE
DO 300 J=2, NY+1
    Y (J)=Y (J-1)-DLY (J-1)
300 CONTINUE
RETURN

```

```

    END
!-----
!      本子程序用于求半带宽
!      (1)功能
!      计算总体系数矩阵的半带宽
!      (2)使用说明
!      子程序语句
!      SUBROUTINE MBW(NE, I8, IW)
!      哑元说明
!      NE——整变量, 输出参数, NE=NX*(NY+NZ) 是单元总数
!      I8——8×NE 的二维实数组, 输入参数, 存放单元的节点编号
!      IW——整变量, 输出参数, 半带宽
!-----

SUBROUTINE MBW(NE, I8, IW)
DIMENSION I8(8,NE)
INTEGER NE, IW, I8
IW=0
DO 11 I=1, NE
    I8MAX=MAX(I8(1, I), I8(2, I), I8(3, I), I8(4, I), I8(5, I), &
               I8(6, I), I8(7, I), I8(8, I))
    I8MIN=MIN(I8(1, I), I8(2, I), I8(3, I), I8(4, I), I8(5, I), &
               I8(6, I), I8(7, I), I8(8, I))
    M=I8MAX-I8MIN
    IF (M+1. GT. IW) THEN
        IW=M+1
    END IF
11 CONTINUE
RETURN
END

!-----
!      本子程序用于计算视电阻率
!      (1)功能
!      求地表某节点的视电阻率和相位
!      (2)使用说明

```

!
 ! 子程序语句
 ! SUBROUTINE ROXW(T, B, U, OMINA, SGM, RO, SHITA)
 !
 ! 垂元说明
 !
 ! T——实整数, 输入参数, "T"为 1 时表示 TE 模式, "T"为 2 时表示 TM 模式
 !
 ! B——实变量, 输入参数, 单元的垂直高度
 !
 ! U——4 个数的一维复数组, 输入参数, 存放所求节点近地表 4 个节点的 U 值
 !
 ! OMINA——实变量, 输入参数, 单元的角频率
 !
 ! SGM——实变量, 输入参数, 单元的电导率
 !
 ! RO——实数, 输出参数, 存放所求点地表的电阻率值
 !
 ! SHITA——实数, 输出参数, 存放所求点地表的电阻率值的相位
 !
 !-----

```

SUBROUTINE ROXW(T, B, U, OMINA, SGM, RO, SHITA)
USE CONSTANT
DIMENSION U(4)
integer T
real RO, SHITA, OMINA, X0, Y0, B, SGM
COMPLEX U, TEMP, JK, Z1
TEMP=(-11*U(1)+18*U(2)-9*U(3)+2*U(4)) / (2*3*B)
Z1=TEMP
IF (T.EQ. 1) THEN
  JK=CMPLX(0. 0, -1. 0*OMINA*MIU)
  TEMP=JK*(U(1)/TEMP)*(U(1)/TEMP)
ELSE
  JK=CMPLX(0. 0, 1. 0/(OMINA*MIU*SGM*SGM))
  TEMP=JK*(TEMP/U(1))*(TEMP/U(1))
END IF
X0=REAL(TEMP)
Y0=AIMAG(TEMP)
RO=SQRT(X0*X0+Y0*Y0)
IF (T.EQ. 1) THEN
  TEMP=CMPLX(0. 0, OMINA*MIU)
  Z1=Z1/TEMP

```

```

Z1=U(1)/Z1
ELSE
  Z1=Z1/U(1)/SGM
END IF
X0=REAL(Z1)
Y0=AIMAG(Z1)
SHITA=ATAN(Y0/X0)*180.0/PI
RETURN
END
!-----
! 本子程序用于加第一类边界条件
!(1) 功能
! 在定带宽储存的总体系数矩阵和右侧列向量上加上第一类边界条件
!(2) 使用说明
! 子程序语句
! SUBROUTINE boundary1(ND1, NB1, U1, ND, KE, BU)
! 哑元说明
! ND1——实整变量, 输入参数, 第一类边界条件的节点数
! NB1——ND1 个元的一维整数组, 输入参数, 存放第一类边界条件的
! 节点号
! U1——ND1 个元的一维实数组, 输入参数, 存放第一类边界条件的节
! 点的场值
! ND——整变量, 输入参数, ND=(NX+1)*(NY+NZ+1) 是节点总数
! KE——ND×IW 的二维实数组, 输入、输出参数, 定带宽存放总体系
! 数矩阵,
! BU——ND 个元的一维实数组, 输出参数, 输出加入第一类边界条后
! 的右端列向量
!-----
subroutine boundary1(ND1, NB1, U1, ND, KE, BU)
DIMENSION NB1(ND1), U1(ND1), KE(ND, ND), BU(ND)
REAL MAX
INTEGER NB1, ND1, ND
COMPLEX U1, KE, BU
MAX=1.0E10

```

```

DO 10 I=1, ND
  BU(I)=(0. 0, 0. 0)
10 CONTINUE
DO 20 I=1, ND1
  J=NB1(I)
  KE(J, J)=KE(J, J)*MAX
  BU(J)=KE(J, J)*U1(I)
20 CONTINUE
RETURN
END
!-----
! 本子程序用于已知频率求角频率
! (1) 功能
!   计算角频率
! (2) 使用说明
!   子程序语句
!   SUBROUTINE CALOMIGA(NFRE, FRE, OMINGA)
!   哑元说明
!   NFRE——整变量, 输入参数, 频点个数
!   FRE——NFRE 个元的一维实数组, 输入参数, 存放需计算的频点
!   OMINGA——NFRE 个元的一维实数组, 输出参数, 存放需计算的角频率
!-----
SUBROUTINE CALOMIGA(NFRE, FRE, OMINGA)
USE CONSTANT
DIMENSION FRE(NFRE), OMINGA(NFRE)
REAL FRE, OMINGA
INTEGER NFRE
DO 11 I=1, NFRE
  OMINGA(I)=2*PI*FRE(I)
11 CONTINUE
RETURN
END
!=====
!  计算起伏地形条件下地表各个节点与水平坐标轴相距的节点数

```

```

!=====
SUBROUTINE ADDTOP (X0, Y0, N, NX, X, Y1, DLY1, LN, LM)
DIMENSION X0 (N), Y0 (N), X (NX+1), LN (NX+1), LM (NX), &
          L1 (NX+1), L2 (NX)
REAL X0, Y0, X, Y1, DLY1, TEMP, L1, L2
INTEGER N, NX, LN, LM
IF ((X0 (1) .GT. X (1)) .OR. (X0 (N) .LT. X (NX+1))) THEN
  WRITE (*, *) "ERROR!"
  STOP
END IF
DO 1 I=1, NX
  LN (I)=0
  LM (I)=0
1 CONTINUE
LN (NX+1)=0
DO 200 I=1, NX+1
  J=0
100   J=J+1
  TEMP=X0 (J)-X (I)
  IF (TEMP. GE. 0) THEN
    L1 (I)=Y0 (J-1)+(Y0 (J)-Y0 (J-1))*(X (I)-X0 (J-1)) /&
               (X0 (J)-X0 (J-1))
  ELSE
    GOTO 100
  END IF
200 CONTINUE
DO 300 I=1, NX
  L2 (I)=(L1 (I)+L1 (I+1))/2. 0
300 CONTINUE
DO 500 I=1, NX+1
  LN (I)=INT ((Y1-L1 (I))*2/DLY1)
500 CONTINUE
DO 700 I=1, NX
  LM (I)=INT ((Y1-L2 (I))/DLY1)

```

```
700 CONTINUE
    RETURN
    END
=====
!
!                               读取模型参数
!
SUBROUTINE INP(FILENAME, TDX, NDX, NX, NY, NZ, NRES, NFRE, FRE, &
               DLAZ, RO, DLX, DLY, NPT, X0, Y0)
CHARACTER *20 FILENAME
DIMENSION FRE(NFRE), DLAZ(NZ), RO(NRES), DLX(NX), DLY(NY), NPT(NY, NX), &
           X0(NDX), Y0(NDX)
REAL FRE, RO, X0, Y0
INTEGER NX, NY, NZ, NRES, NFRE, NPT, DLAZ, DLX, DLY, TDX, NDX
OPEN(15, FILE=FILENAME, STATUS='OLD', &
      ACCESS='SEQUENTIAL', FORM='FORMATTED')
READ(15, *) AAA
READ(15, *) AAA, AAA
READ(15, *) (FRE(I), I=1, NFRE)
READ(15, *) (RO(I), I=1, NRES)
READ(15, *) (DLX(I), I=1, NX)
READ(15, *) (DLY(I), I=1, NY)
READ(15, *) (DLAZ(I), I=1, NZ)
DO 100 I=1, NY
    READ(15, *) (NPT(I, J), J=1, NX)
100 CONTINUE
DO 200 I=1, NDX
    READ(15, *) X0(I), Y0(I)
200 CONTINUE
CLOSE(15)
```

```

    END
!=====
!          输出计算结果 (视电阻率和相位) 到文件中
!=====

SUBROUTINE OUTPUT (T, OUTFILE1, OUTFILE2, NX, NFRE, TIME_END, &
                   TIME_BEGIN, FRE, X, RO, SHITA)
CHARACTER *20 OUTFILE1, OUTFILE2
DIMENSION FRE (NFRE), X (NX+1), RO (NFRE, NX+1), SHITA (NFRE, NX+1)
REAL FRE, RO, SHITA, X, TIME_END, TIME_BEGIN, TEMP
INTEGER T, NX, NFRE
OPEN(15, FILE=OUTFILE1, STATUS='UNKNOWN', &
      ACCESS='SEQUENTIAL', FORM='FORMATTED')
IF (T.EQ.1) THEN
    WRITE(15, *) "TE_MODEL" "
ELSE
    WRITE(15, *) "TM_MODEL" "
END IF
WRITE(15, *) "Time of operation was", TIME_END-TIME_BEGIN, " seconds"
DO 10 I=1, NX+1
    WRITE(15, *)
    WRITE(15, 100) I, X(I)
    DO 20 J=NFRE, 1, -1
        WRITE(15, 200) X(I), FRE(J), RO(J, I), SHITA(J, I)
20    CONTINUE
10    CONTINUE
CLOSE(15)
OPEN(25, FILE=OUTFILE2, STATUS='UNKNOWN', &
      ACCESS='SEQUENTIAL', FORM='FORMATTED')
IF (T.EQ.1) THEN
    WRITE(25, *) "TE_MODEL" "
ELSE
    WRITE(25, *) "TM_MODEL" "
END IF
WRITE(25, *) "Time of operation was", TIME_END-TIME_BEGIN, " seconds"

```

```
D0 40 I=1, NX+1
  WRITE(25, *)
  WRITE(25, 100) I, X(I)
  DO 30 J=1, NFRE
    TEMP=LOG10(FRE(J))
    WRITE(25, 200) X(I), TEMP, R0(J, I), SHITA(J, I)
30      CONTINUE
40      CONTINUE
      CLOSE(25)
100 FORMAT(1X, I5, F20. 4)
200 FORMAT(1X, F20. 4, F10. 4, F20. 4, F20. 4)
      END
```

致 谢

本文是在导师何继善教授的悉心指导下完成。在硕士学习期间，无论是学习上还是生活上，何老师都给予了悉心的指导和热情的帮助，他严谨的治学态度、广博的学识、敏锐地洞察力、科学的方法论，敢于创新的学术风格使我在三年的研究生学习及科研中收获丰厚并受益终身。导师高尚的人格、率直的性格、宽广的胸怀也将对我产生长远而深刻的影响。在此对导师表示诚挚的谢意，并送上衷心的祝福！

三年的研究生学习期间，物探所柳建新教授、汤井田教授、戴前伟教授、瓮晶波等老师也给予我热情的帮助和悉心的指导，我深深的谢谢他们。

感谢赵斌、黄松、叶庆华、李建华、梁建刚等师兄弟在学习和生活上给予我无限的帮助。感谢我在校学习期间的同学们，感谢他们陪我度过了难忘的三年生活，我祝福他们幸福平安！

感谢同窗好友张继锋博士、王烨博士、童孝忠博士、杨晓弘博士、谢维博士等人在我硕士期间及论文期间给予的建议和帮助。

谨以此文献给我的父母和家人，感谢他们对我整个求学生涯的无私奉献，使得我能够安心学习，最终促使论文完稿，完成我的学业。

同时，还要感谢出席我答辩会的各位师长、专家和同学们。

由于时间等条件的限制，本人在理论研究等方面难免存在不足之处，敬请各位老师、同学提出意见和建议。

曾国
2008年5月
于中南大学

攻读硕士学位期间主要研究成果

一、攻读硕士期间发表的论文

[1] 曾国, 崔德海, 刘杰, 李凯, 地震折射波法和高密度电法在隧道勘察中的应用, 物探与化探, 已录用, 待刊登中.

[2] 刘杰, 段炜, 曾国, EH4 电导率成像系统在隐伏金属矿勘探中的应用, 西部探矿工程, 2008, 2.

二、攻读硕士学位期间参加的科研、生产工作

[1] 屏蔽电极法物理模拟实验 2006.5~2006.6

[2] 向莆铁路隧道地震勘探项目 2006.7~2006.8

[3] 吉怀高速公路地基岩溶勘探项目 2007.7~2007.8