

摘要

本文采用“对角笛卡尔网格法”数值模拟包括复杂几何边界的二维不可压缩流动。对角笛卡尔网格法同时使用笛卡尔网格线以及笛卡尔网格节点的对角线来模拟复杂的几何边界。经过验证，使用对角笛卡尔网格法生成的近似边界比用锯齿笛卡尔网格法生成的近似边界更加精确。在数值计算过程中采用基于单元中心的非交错网格，将动量方程用有限分析法，在较大的控制体积上离散，将连续性方程在较小的控制体积上离散。通过这样处理在边界上不需要确定压力边界条件，同时也消除了不正确的压力棋盘现象。最后计算了旋转后的空腔内的流动问题验证了本文所提到的方法。

关键词：对角笛卡尔网格，复杂几何边界，有限分析法，非交错网格

Abstract

This paper uses Diagonal Cartesian method for simulation of incompressible flows over complex boundaries. The method approximates the complex geometry boundaries using both Cartesian grid lines and diagonal lines of grid nodes. Some examples indicate that the approximate boundary made by Diagonal Cartesian method is more accurate than by the traditional Saw-tooth Cartesian method under the same grid size. Based on cell-center nodes on non-staggered grid, momentum equations is discretized using Finite Analytical method in a bigger control volume while continuous equation is discretized in a smaller control volume. By this treatment, there is no need to define pressure boundary condition and the wrong pressure check-board phenomenon is eliminated. Finally the flow in a rotated cavity is simulated to verify the validity of the above methods.

Keywords: Diagonal Cartesian method, complex geometry boundaries, Finite Analytical method, non-staggered grid

图表目录

图 2.2.1 计算区域.....	9
图 2.2.2 九点有限分析解.....	9
图 2.2.3 五点有限分析解.....	10
图 3.1.1 用锯齿笛卡尔网格法模拟.....	12
图 3.1.2 用对角笛卡尔网格法模拟.....	12
图 3.1.3 最短距离法确定模拟点.....	13
图 3.1.4 用单调性准则选择离散点.....	14
图 3.1.5 离散点太密导致模拟不精确.....	15
图 3.1.6 离散点太疏导致模拟不精确.....	15
图 3.2.1 标准距离示意图.....	17
图 3.3.1 网格密度 51×51 用锯齿笛卡尔网格法模拟圆形.....	20
图 3.3.2 网格密度 51×51 用对角笛卡尔网格法模拟圆形.....	20
图 3.3.3 网格密度 301×301 用锯齿笛卡尔网格法模拟圆形.....	20
图 3.3.4 网格密度 301×301 用对角笛卡尔网格法模拟圆形.....	20
图 3.3.5 模拟圆形时网格密度与 E1 之间的关系.....	21
图 3.3.6 模拟圆形时网格密度与 E2 之间的关系.....	21
图 3.3.7 模拟圆形时网格密度与 E3 之间的关系.....	21
图 3.3.8 网格密度 51×51 用锯齿笛卡尔网格法模拟斜位正方形.....	22
图 3.3.9 网格密度 51×51 用对角笛卡尔网格法模拟斜位正方形.....	22
图 3.3.10 网格密度 301×301 用锯齿笛卡尔网格法模拟斜位正方形.....	23
图 3.3.11 网格密度 301×301 用对角笛卡尔网格法模拟斜位正方形.....	23
图 3.3.12 模拟斜位正方形时网格密度与 E1 之间的关系.....	23

图 3.3.13 模拟斜位正方形时网格密度与 E2 之间的关系.....	23
图 3.3.14 模拟斜位正方形时网格密度与 E3 之间的关系.....	24
图 4.1.1 基于单元顶点的非交错网格示意图.....	25
图 4.1.2 基于单元中心的非交错网格示意图.....	25
图 4.1.3 交错网格示意图.....	26
图 4.1.4 选择在合适的控制体上离散.....	27
图 4.3.1 边界虚拟点示意图.....	32
图 4.3.2 临近边界点的处理.....	33
图 4.4.1 对角边界点与边界虚拟点.....	34
图 4.4.2 本地控制体积守恒法.....	35
图 4.4.3 扩大的控制体积守恒法.....	37
图 5.1.1 空腔流动计算区域.....	42
图 5.1.2 空腔纵向轴线上 X 方向速度($RE=100$).....	43
图 5.1.3 空腔横向轴线上 Y 方向速度($RE=100$).....	43
图 5.1.4 空腔纵向轴线上 X 方向速度($RE=400$).....	43
图 5.1.5 空腔横向轴线上 Y 方向速度($RE=400$).....	43
图 5.1.6 空腔纵向轴线上 X 方向速度($RE=1000$).....	44
图 5.1.7 空腔横向轴线上 Y 方向速度($RE=1000$).....	44
图 5.1.8 空腔内流动流函数图($RE=100$).....	44
图 5.1.9 空腔内流动流函数图($RE=400$).....	44
图 5.1.10 空腔内流动流函数图($RE=1000$).....	45
图 5.1.11 空腔内流动压力分布图($RE=100$)	45
图 5.1.12 空腔内流动压力分布图($RE=400$)	45
图 5.1.13 空腔内流动压力分布图($RE=1000$)	45
图 5.2.1 斜置的空腔内流动计算区域.....	46
图 5.2.2 斜置的空腔纵向轴线上 X 方向速度 ($RE=100$)	47

图 5.2.3 斜置的空腔横向轴线上 Y 方向速度($Re=100$).....	47
图 5.2.4 斜置的空腔纵向轴线上 X 方向速度($Re=400$).....	47
图 5.2.5 斜置的空腔横向轴线上 Y 方向速度($Re=400$).....	47
图 5.2.6 斜置的空腔纵向轴线上 X 方向速度($Re=1000$).....	48
图 5.2.7 斜置的空腔横向轴线上 Y 方向速度($Re=1000$).....	48
图 5.2.8 斜置的空腔纵向轴线上 X 方向速度(锯齿法, $Re=1000$).....	48
图 5.2.9 斜置的空腔横向轴线上 Y 方向速度(锯齿法, $Re=1000$).....	48
图 5.2.10 斜置的空腔内流动流函数图($Re=100$).....	49
图 5.2.11 斜置的空腔内流动流函数图($Re=400$).....	49
图 5.2.12 斜置的空腔内流动流函数图($Re=1000$).....	49
图 5.2.13 斜置的空腔内流动压力分布图($Re=100$)	49
图 5.2.14 斜置的空腔内流动压力分布图($Re=400$)	50
图 5.2.15 斜置的空腔内流动压力分布图($Re=1000$)	50

第一章：引言

本世纪，计算机技术得到了飞速的发展，计算流体力学应运而生，它使用数值计算这一手段模拟流体的流动问题，打开了流体力学发展的新局面。在流体力学中，一些问题用数值模拟比做实验在时间和费用上都节省的多，而且它的应用范围又比理论研究更加广泛。因此，数值模拟已经成为研究流动问题的一个重要手段，部分地代替一些实验研究。

在计算流体力学的历史上，用差分格式求解流体动力学问题时，求解域的离散网格及其边界都取直线，但是在实际应用中，有许多问题都包含有复杂的、不规则的几何曲边。在数值模拟此类问题时，对这些不规则的曲边准确的近似非常重要，它直接影响计算结果的好坏。对不规则几何曲边问题的研究仍然是一项挑战性的工作。

1.1 处理复杂几何边界的重要性

许多在工程上广泛应用的问题都包括有复杂的几何边界。在预测全球气候以及海洋环境时需要知道海洋内的流动情况，地球上的陆地以及岛屿都具有不规则的形状，对这种问题的研究显然包括如何处理不规则的几何边界。对飞行器周围空气流动以及传热的研究是设计高性能飞行器的关键，由于飞行器的外形不规则，要研究好这类问题也必须处理好不规则的几何边界。许多散热器的外形也非常复杂，它的传热性能与散热器内的流动情况密切相关，研究这类问题显然也要处理好它的不规则的几何边界。事实上，大多数工程问题都包括不规则

的几何边界，由于存在不规则的几何边界，用理论的方法几乎不可能得出结果，用实验的方法或者不可能或者代价很大。一种切实可行的方法就是利用计算机数值模拟，当前迫切需要找到一种简单、通用、精确的处理复杂几何边界的方法。

1.2 处理复杂几何边界的常用方法

许多工程问题都包括有复杂的几何边界，处理好它们复杂的几何边界在工程上有广泛的应用价值。因此，多年来人们对此作了广泛的研究，总结出许多方法。如贴体坐标法、无结构网格法、重叠网格法、锯齿笛卡尔网格法等。

1.2.1 贴体坐标

贴体坐标法首先根据求解域的边界生成曲线坐标系即贴体坐标系，这样，求解域的边界与坐标曲面（线）相重合。求解域在物理空间呈现复杂的形状，而在变换后的空间内是矩形或者矩形的组合（三维问题时为长方体或者长方体的组合）。在确定适当的贴体坐标后，再将控制方程转换为贴体曲线坐标下的形式。有关贴体坐标的详细用法可以参见有关文献，这里不再赘述。

几十年来，贴体坐标生成技术迅速发展，贴体坐标也得到了日益广泛的应用。它的出现无疑是数值模拟流动技术的一个巨大进步。但是，应当认识到贴体坐标法也存在一些缺陷。首先，它需要为每一个物体生成新的贴体坐标，而生成贴体坐标又是相当费时费力的。其次，在曲线坐标下控制方程的形式远比在直角坐标下复杂，使得数值计算更加烦琐。最后，由于坐标形式的复杂性和多样性，坐标变换一般不

能用解析的形式，而只能用离散的方法，多种参数的微分只能用差分来代替，这样在计算时就会产生附加的误差。当采用非正交网格时更是如此。

1.2.2 无结构网格

无结构网格起源于有限元法。近年来，人们在有限元法的启发下开拓了将有限差分法直接应用于无结构有限元网格中，这既大大扩展了有限差分法的应用，又避免了有限元法生成大规模的代数方程组及其因非线性而造成的求解的困难性。原则上讲，无结构网格具有任意的形状，但为了容易实现，对二维问题多用三角形网格，对三维问题多用四面体网格。由于无结构网格的安排无序，加之三角形（四面体）的形状多变，它可以应用于求解具有复杂几何边界的问题。有关无结构网格的详细用法可以参见有关文献，这里不再赘述。

无结构网格是一种有前途的新发展方向，但这一方向有一些棘手的问题急需解决。首先，无结构网格的生成，特别是三维情况，是十分耗时的烦琐工作，需要找到通用的高速有效的生成方法。其次，对无结构网格，高精度的差分格式难以应用。最后，无结构网格应用于不可压流场困难较大，主要原因是不可压缩流体流动方程中没有显式的压力方程，压力耦合求解比较困难。

1.2.3 重叠网格

重叠网格也可用于求解具有复杂几何边界的问题。对具有复杂几何边界的问题，当难以采用单个网格时，可以生成几个矩形的规则网格互相重叠，每个子网格可以具有不同的精细程度。这就是所谓的重

叠网格。有关重叠网格的详细用法可以参见有关文献，这里不再赘述。

使用重叠网格后，整个计算区域被分成几个具有简单几何形状的子区域，每个子区域可以分块计算，使问题得以简单化。但是，在区域内边界上需要处理边界条件，这一点非常复杂。各个子区域之间需要传递信息，以使整个物理区间上的计算是协调的，使用内插是传递信息的最简单的方法，但不能保证守恒性。当计算包括类似激波那样的间断流动时，计算格式的守恒性是重要的。此外，如果要解决的问题的几何边界非常复杂，将造成子区域过多而使计算难以进行。

1.2.4 锯齿笛卡尔网格

在计算中用锯齿形的折线来代替复杂的几何边界就叫做锯齿笛卡尔网格法。这种方法的优点在于无论是在控制方程的形式，还是在数值计算阶段，它都比较简单。另外，这种方法能够自动生成网格、自动处理复杂的边界，便于编制出具有通用性的程序。其主要缺点在于用这个方法构成的边界是锯齿形的，即使网格划分的很精细，用锯齿形折线模拟的边界仍然是粗糙的，有时候难以满足人们的需要。

1.2.5 对角笛卡尔网格

为了克服锯齿笛卡尔网格法模拟边界精度较差这一缺点，美国学者 Chen 等提出了对锯齿笛卡尔网格法的改进，即对角笛卡尔网格法。这一方法继承了锯齿笛卡尔网格法的优点，并在某种程度上克服了锯齿笛卡尔网格法的缺点。锯齿笛卡尔网格法仅仅使用网格线来模拟复杂的几何边界而造成精度较差，而对角笛卡尔网格法既使用网格线又使用网格节点的对角线来模拟复杂几何边界。可以想象，其精确程度

较锯齿笛卡尔网格法高。

1.3 本文的主要内容

本文拟采用对角笛卡尔网格法数值模拟包含有复杂几何边界条件的不可压缩粘性流动问题。这一章已经讲述了处理复杂几何边界的重要性以及常用的方法；第二章将给出不可压缩流动的控制方程及其边界条件，并给出了用有限分析法离散动量方程的公式；第三章介绍如何使用对角笛卡尔网格法自动模拟复杂的几何边界，同时将生成的模拟边界同用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界作比较，以此验证对角笛卡尔网格法的精确程度；第四章讨论具体的计算方法，包括具体的计算公式、在边界处对压力边界条件的处理、收敛的判据以及完整的计算流程；第五章以空腔问题为例来验证对角笛卡尔网格法；第六章总结了全文的工作并对后续工作提出了建议。

第二章：不可压流的控制方程及其 离散方法

这一章讨论不可压粘性流动的控制方程及其边界条件和初始条件，然后讨论如何使用有限分析法离散动量方程。在考虑控制方程时，我们假设所研究的流体为不可压缩的牛顿流体，密度、粘度、热传导系数均为常数。

2.1 控制方程及其定解条件

2.1.1 控制方程及其无量纲化

对二维不可压流，质量方程、动量方程、能量方程分别为：

$$U_x + V_y = 0 \quad (2.1.1)$$

$$U_t + UU_x + VU_y = -\frac{P_x}{\rho} + \nu(U_{xx} + V_{yy}) \quad (2.1.2)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -\frac{P_y}{\rho} + \nu(V_{xx} + V_{yy}) \quad (2.1.3)$$

$$T_t + UT_x + VT_y = \alpha(T_{xx} + T_{yy}) + s \quad (2.1.4)$$

其中， $\alpha = \frac{K}{\rho C_v}$ ， s 为能量方程中的源项。

通常为了计算方便，常常使用无量纲化的控制方程，即选择特征长度 L 、特征速度 U_0 、温度差 ΔT 、参考温度 T_{ref} 、以及密度 ρ 等对方程(2.1.1)、(2.1.2)、(2.1.3)、(2.1.4)无量纲化。以下是由特征物理变量定义的无量纲参数：

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, t = \frac{\tau U_0}{L} \quad (2.1.5)$$

$$U^* = \frac{U}{U_0}, V^* = \frac{V}{V_0}, P^* = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad (2.1.6)$$

$$\theta = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T} \quad (2.1.7)$$

使用上述无量纲变量，控制方程变成：

$$U_x + V_y = 0 \quad (2.1.8)$$

$$U_t + UU_x + VU_y = -P_x + \frac{1}{Re}(U_{xx} + U_{yy}) \quad (2.1.9)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -P_y + \frac{1}{Re}(V_{xx} + V_{yy}) \quad (2.1.10)$$

$$\theta_t + U\theta_x + V\theta_y = \frac{1}{Pe}(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + S \quad (2.1.11)$$

其中， $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ ， $Pe = \frac{\nu}{\alpha} Re$ ， S 为无量纲化的源项。

2.1.2 边界条件和初始条件

上一节所述的控制方程中，动量方程(2.1.9)、(2.1.10)在空间上是椭圆形的，在时间上是抛物形的。因此，速度边界条件要定义在整个边界上，初始条件则定义在整个区域内。与动量方程类似，能量方程

(2.1.11)也是在空间上为椭圆形的，在时间上是抛物形，其温度边界条件、初始条件也与动量方程类似。

可以看出，能量方程与动量方程以及连续性方程是互相独立的，联立动量方程以及连续性方程就可以解出速度场。因此可以先解动量方程以及连续性方程得出速度场后再解能量方程。因为没有状态方程，而且能量方程与动量方程以及连续性方程独立，所以找不到显式的压力方程求压力场。基于这个原因，在计算不可压流动时，如何采用合适的压力边界条件仍然有必要作进一步的探讨。在第四章中将要详细讨论一种处理压力边界条件的方法，它通过使用边界上速度的信息来避免确定边界上的压力值。

2.2 有限分析法

2.2.1 有限分析法的基本理论

在求偏微分方程数值解时，有多种离散方法，如有限差分法、有限元法、有限分析法等。有限分析法的基本思想就是在微分方程的数值计算中嵌入局部解析解。这就是它与有限差分法和有限元法的不同之处。它与有限差分法、有限元法的共同之处是仍然把计算区域分成若干个小单元。

对于非线性或准线性的微分方程经过局部线化后，有限分析解可表示为代数的形式，并重叠覆盖着计算域的每个区间。这样就得到一组代数方程组，求解这些方程组而可以得到数值解。

2.2.2 九点有限分析解

假设计算区域如图 2.2.1 所示，对 NS 方程采用有限分析法离散后，

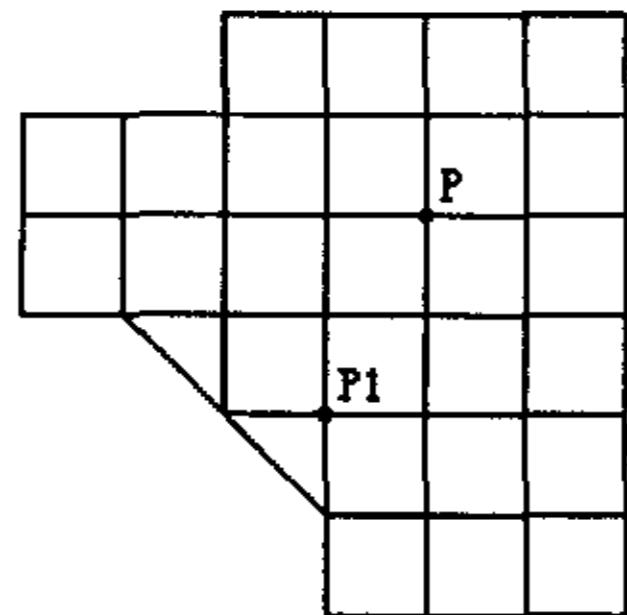


图 2.2.1 计算区域

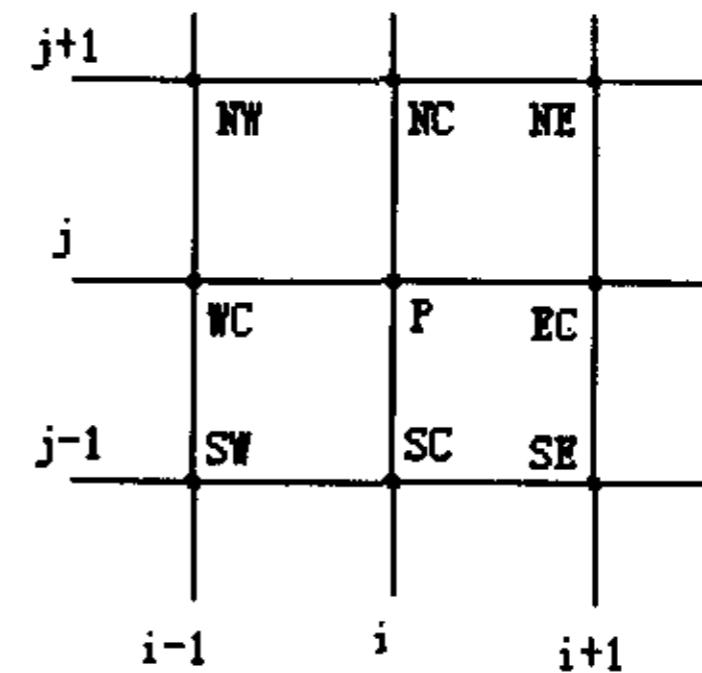


图 2.2.2 九点有限分析解

对 P 点可以建立这一点与它相邻的八个点之间的关系，如图 2.2.2 所示。这种离散方法建立了九个点之间的关系，可以称为九点有限分析法。许多文献上有九点有限分析法的详细推导过程，这里我们直接给出它们的关系式，具体的推导过程不再赘叙。

对二维非定常流，有限分析解表示为：

$$U_p = \alpha_p \sum_{nb=1}^8 (C_{nb} U_{nb}) + (1 - \alpha_p) U_p^0 - \alpha_p S_p \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (2.2.1)$$

$$V_p = \alpha_p \sum_{nb=1}^8 (C_{nb} V_{nb}) + (1 - \alpha_p) V_p^0 - \alpha_p S_p \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (2.2.2)$$

其中：

$$\alpha_p = \frac{1}{1 + (C_p \text{Re}/\Delta t)} \quad (2.2.3)$$

$$S_p = C_p \text{Re} \quad (2.2.4)$$

这里上标 0 表示上一个时间步长的速度值， C_{nb} 为有限分析系数，在附录 A 中将给出计算九点有限分析系数的具体公式。

2.2.3 五点有限分析解

从前面几章我们可以知道，对角笛卡尔网格法在使用笛卡尔网格线的同时也使用网格点的对角线来模拟复杂的边界。考虑如图 2.2.1 所示的 P1 点，因 P1 点位于对角边界附近，在这一点上，我们无法使用九点有限分析法离散。对这样的点可以采用五点有限分析法，建立这一点与它直接相邻的上、下、左、右四个点，如图 2.2.3 所示，之间的关系。

五点有限分析法的有限分析系数的计算公式在附录 B 中给出。这里仅仅给出用五点有限分析法离散的公式如下：

$$U_p = \alpha_p \sum_{nb=1}^4 (C_{nb} U_{nb}) + (1 - \alpha_p) U_p^0 - \alpha_p Q_p \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (2.2.5)$$

$$V_p = \alpha_p \sum_{nb=1}^4 (C_{nb} V_{nb}) + (1 - \alpha_p) V_p^0 - \alpha_p Q_p \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (2.2.6)$$

其中：

$$\alpha_p = \frac{1}{1 + (C_p \text{Re} / \Delta t)} \quad (2.2.7)$$

$$Q_p = C_p \text{Re} \quad (2.2.8)$$

同样，上标 0 表示上一个时间步长的速度值， C_{nb} 为有限分析系数。

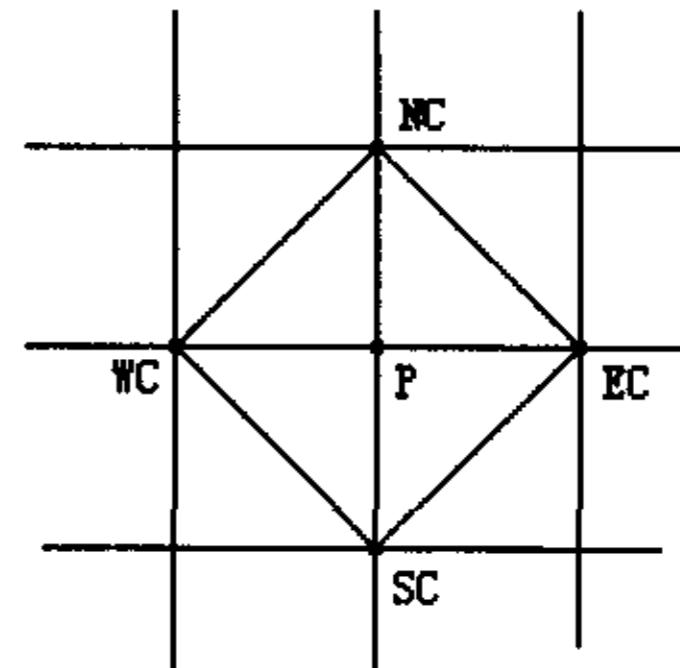


图 2.2.3 五点有限分析解

2.3 小结

这一章首先给出了二维不可压流的控制方程以及定解所需的初始条件和边界条件。在用有限分析法离散动量方程的时候，在流体区域内部以及规则边界（边界为笛卡尔网格线）附近的点上用九点有限分析法离散，在临近复杂边界（边界为笛卡尔网格节点的对角线）的点上用五点有限分析法离散。

第三章：生成模拟边界

这一章讨论用对角笛卡尔网格法根据原始的复杂几何边界在笛卡尔网格下自动生成模拟边界。并把生成的模拟边界与用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界相比较，以验证对角笛卡尔网格法生成的模拟边界的精确性。

3.1 对角笛卡尔网格法简介

3.1.1 概述

锯齿笛卡尔网格法应用笛卡尔网格线来模拟复杂的几何边界，而

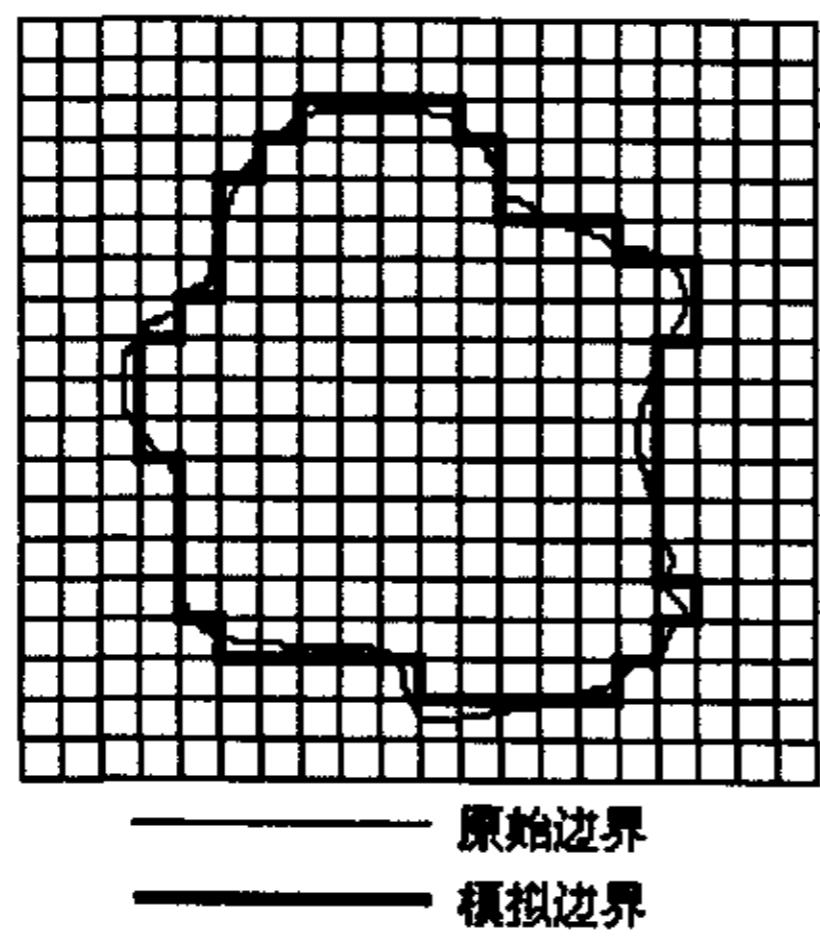


图 3.1.1 用锯齿笛卡尔网格法模拟

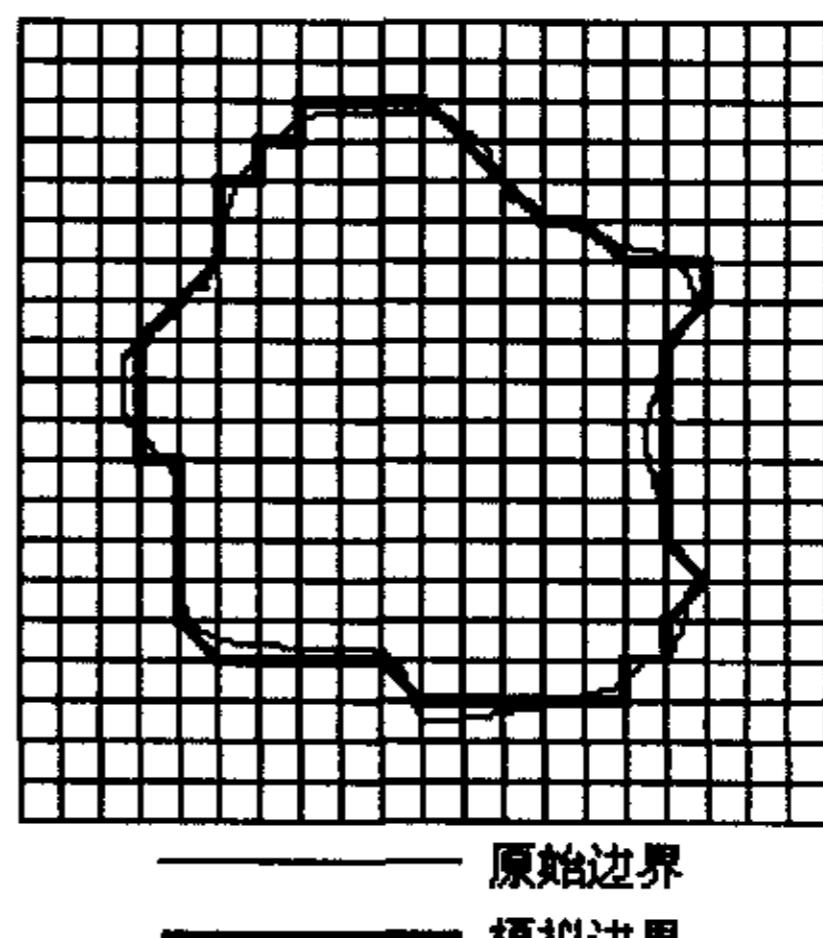


图 3.1.2 用对角笛卡尔网格法模拟

对角笛卡尔网格法同时用笛卡尔网格线以及笛卡尔网格节点的对角线来模拟复杂的几何边界。用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界以及用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界分别如图 3.1.1 和图 3.1.2 所示。可以看出图 3.1.2 的模拟边界比图 3.1.1 的模拟边界更加接近原始边界。以下讨论模拟方法上的一些考虑。

3.1.2 最短距离原则

凭直观感觉可以模拟任何复杂的边界。但是，对非常复杂的边界，例如边界由大量的离散点组成，难以想象用手工方法生成模拟边界。必须找到一种通用的、利用计算机高速、自动处理数据的特性、能在笛卡尔坐标系下自动生成模拟边界的方法。

本文采用最短距离法确定模拟点。假设原始边界由曲线 S 描述，如图 3.1.3 所示。‘A’、‘B’、‘C’是原始边界曲线给定的相邻的两点。则距离 A 点最近的网格节点 ‘a’ 即是 ‘A’ 的模拟点，同样 ‘b’ 为 ‘B’ 的模拟点，‘c’ 为 ‘C’ 的模拟点。在 S 上选择一系列能体现 S 特征的点，分别找出它们的模拟点，模拟点即组成了原始边界的模拟边界。

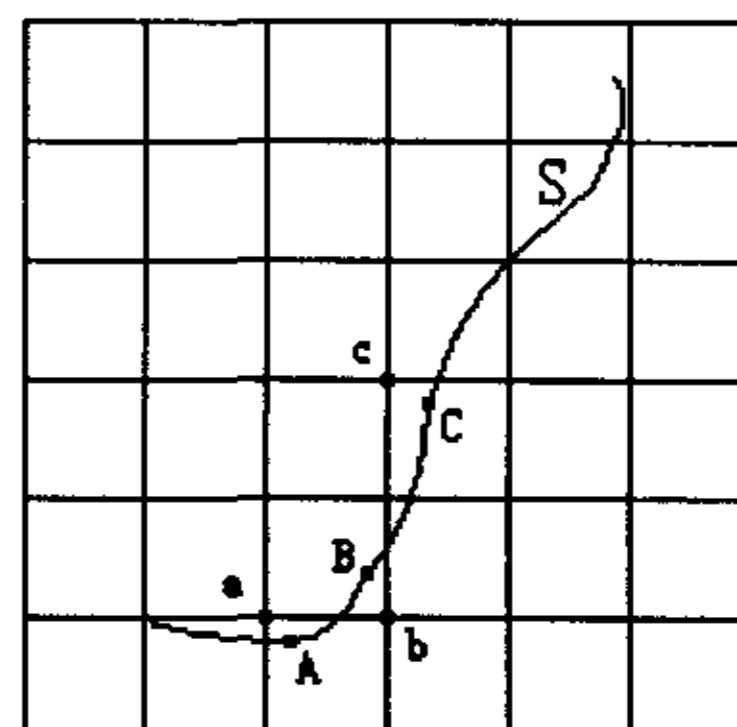


图 3.1.3 最短距离法确定模拟点

3.1.3 单调性原则

大多数复杂的几何边界可由一系列的离散点来描述，有些也可以用一些解析函数来描述。为了数值处理的方便，我们假设所有的复杂几何边界都由一系列的离散点描述，即使构成复杂边界的某一部分由解析函数描述，也把它转换成一系列的离散点。

离散点的个数是有限的，考虑如图 3.1.4 所示的曲线 S，如何从曲线 S 上选择尽可能少的点，并能体现这个曲线大致的特征呢？本文用单调性准则来作到这一点。单

调性准则定义为对任何相邻的两个离散点（例如图 3.1.4 中的 A, B 两点）之间的曲线段在 x 方向和 y 方向都是单调的。用数学描述为：对任何相邻的两个离散点之间的曲线段满足以下两条：

1. 在 x 方向和 y 方向都没有最大或最小值；
2. 其二阶导数不变号；

使用这个准则，图 3.1.4 中的曲线可以用 15 个点来近似描述，把这 15 个点用直线相连，就近似地认为所得到的轮廓线模拟原始的轮廓线。

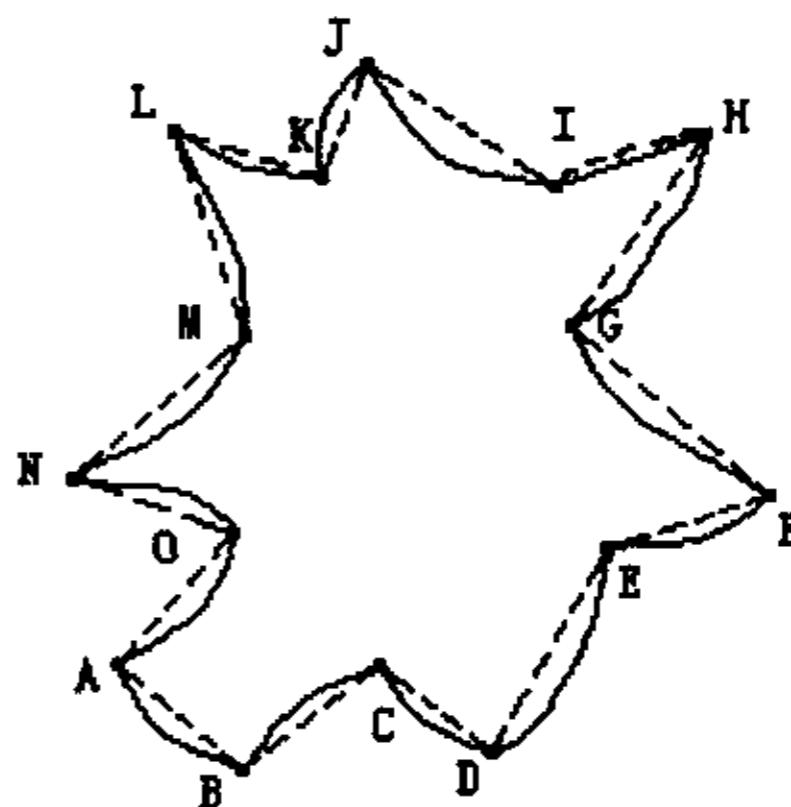


图 3.1.4 用单调性准则选择离散点

3.1.4 合理的离散点密度

仅仅通过单调性准则选择的离散点来描述原始的边界曲线仍然不太精确。为了精确的模拟原始边界，还需要增加离散点的个数。但是，

是否离散点越多，模拟出来的边界就越精确呢？事实情况并非如此。

如图 3.1.5 所示，假设曲线 S 是组成原始的边界的一段曲线，在曲线上选择 5 个离散点(‘A’、‘B’、‘C’、‘D’、‘E’)来描述这个曲线。‘a’、‘b’、‘c’、‘d’、‘e’是通过最短距离法确定的 5 个模拟点。结果是 A-B-C-D-E 被模拟为 a-b-c-d-e，看起来象是用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界。也许，用 a-c-e 来模拟 A-B-C-D-E 更加合适。这种现象给我们的启示是有时候给定的离散点过多时，模拟的边界不一定好。为了避免这种不合理的现象，当给定的一些离散点太近时，有必要去掉那些多余的离散点。这里采用如下的判据：

$$|x_1 - x_2| \leq 0.70 dx \quad (3.1.1)$$

$$|y_1 - y_2| \leq 0.70 dy \quad (3.1.2)$$

如果两个相邻的离散点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 同时满足上述两式，那么，这两个离散点中的一个应去掉。

另外一种情况正好相反，如果选择的离散点太少，得出来得模拟边界也不精确。如图 3.1.6 所示，对曲线如果只给定 ‘A’、‘E’ 两点，那么得出来得模拟曲线为 a-e，显然，用 a-b-c-d-e 来模拟原始曲线 S 更加精确。

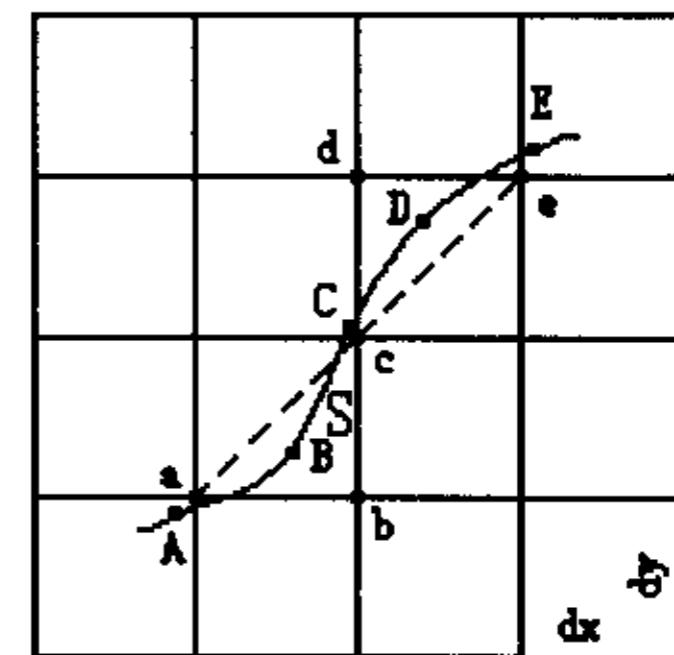


图 3.1.5 离散点太密导致模拟不精确

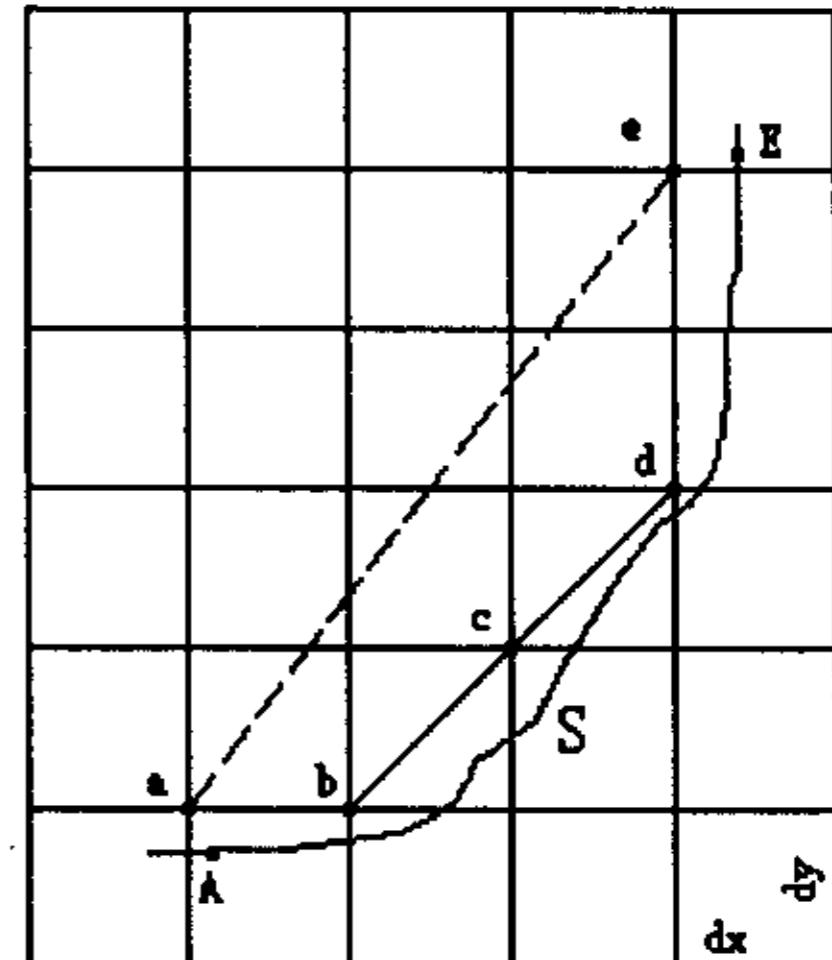


图 3.1.6 离散点太疏导致模拟不精确

这意味着，如果给出得离散点太少，使得相邻两点的距离太远时，将导致模拟边界不精确。为了精确的模拟原始边界，有必要增加离散点的个数。判断相邻两点的距离是否太远时可以采用如下的判据：

$$|x_1 - x_2| \geq 1.40 dx \quad (3.1.3)$$

$$|y_1 - y_2| \geq 1.40 dy \quad (3.1.4)$$

如果两个相邻的离散点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 同时满足上述两式，那么，就要在这两个离散点中至少增加一个点。

3.2 衡量模拟边界准确性的标准

从以上各节可以知道，通过对角笛卡尔网格法，复杂的几何边界轮廓曲线可以用笛卡尔网格的网格线以及网格节点的对角线来模拟。从直观感觉上很容易看出，用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界比用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界要精细，与原始边界更加接近。然而，如何定量的表示一个模拟边界与其原始边界的差距呢？下面我们讨论三个衡量模拟边界准确性的标准。

3.2.1 相对长度误差 $E1$

首先是相对长度误差 $E1$ 。我们已经知道，原始边界以及模拟边界都是由一系列的离散点组成。假设 N_{ori} 表示描述原始边界的离散点的个数， N_{app} 表示模拟边界的离散点的个数， Δx 和 Δy 分别为两个相邻点在 x 方向和 y 方向上的差值，则原始边界的长度 L_{ori} ，模拟边界的长度 L_{app} 可以用数学公式表示为：

$$L_{ori} = \sum_{i=1}^{N_{ori}} (\Delta l_{ori})_i \quad (3.2.1)$$

$$L_{app} = \sum_{i=1}^{N_{app}} (\Delta l_{app})_i \quad (3.2.2)$$

其中：

$$(\Delta l_{ori})_i = \sqrt{(\Delta x_{ori})_i^2 + (\Delta y_{ori})_i^2} \quad (3.2.3)$$

$$(\Delta l_{app})_i = \sqrt{(\Delta x_{app})_i^2 + (\Delta y_{app})_i^2} \quad (3.2.4)$$

我们定义相对长度误差为：

$$E1 = \frac{|L_{ori} - L_{app}|}{L_{ori}} \times 100\% \quad (3.2.5)$$

理所当然，一个较好的对原始边界的模拟边界应该具有较小的相对长度误差 $E1$ 。

3.2.2 平均标准距离误差 $E2$ 和最大标准距离误差 $E3$

另外两个衡量模拟边界准确性的标准为平均标准距离误差 $E2$ 和最大标准距离误差 $E3$ 。模拟边界与原始边界的标准距离越大就说明用模拟边界来代替原始边界的可信度越低。

下面来讨论标准距离这个概念。图 3.2.1 所示曲线 S 为复杂几何边界轮廓的一部分，这里 ‘a’ 为组成模拟边界的离散点，‘A’、‘B’ 为描述原始边界的离散点它和原始边界的真实距离为 am 。但是正如前面所述的那样，这个原始边界也是由一系列的离散点描述，我们并不知道在离散点之间边界曲线的变化，其真实距离也就难以求出。因此在

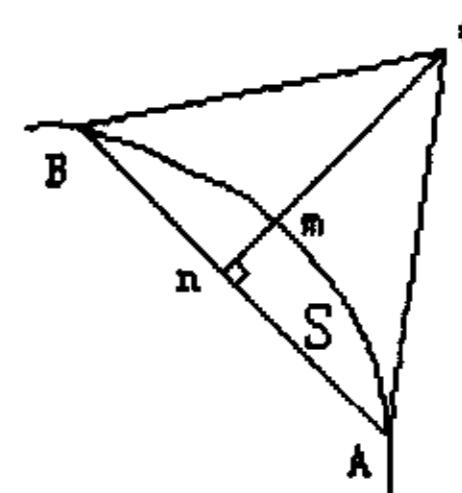


图 3.2.1 标准距离示意图

这里我们用标准距离 an 来代替真实距离 am 。为了得到无量纲的平均标准距离误差 $E2$ 和最大标准距离误差 $E3$ ，可以取计算区域的特征长度为参考长度。用数学公式可以表示为：

$$E2 = \frac{AND}{L_0} \quad (3.2.6)$$

$$E3 = \frac{MND}{L_0} \quad (3.2.7)$$

其中：

$$AND = \frac{\sum_{i=1}^{Napp} (an)_i}{Napp} \quad (3.2.8)$$

$$MND = \max(an)_i \quad (3.2.9)$$

在本文中，计算区域的特征长度 L_0 ，由下式定义：

$$L_0 = \frac{Lx + Ly}{2} \quad (3.2.10)$$

这里， Lx 和 Ly 分别表示计算区域在 x 方向和 y 方向上的长度。

对原始边界的精确模拟，其模拟边界应该同时具有较小的 $E1$ 、 $E2$ 和 $E3$ 。从后面的章节可以知道用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界与用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界相比，其 $E1$ 、 $E2$ 和 $E3$ 值都较小。

3.3 模拟两维复杂几何边界的例子

为了证明用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界比用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界更加精确，在这一节里，我们分别用这两种方法来模拟一些常见的几何边界，并且比较它们的相对长度误差 $E1$ 、平均标准距离误差 $E2$ 和最大标准距离误差 $E3$ 。最后可以得出用对角笛

卡尔网格法生成的模拟边界比锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界更加精确的结论。

3.3.1 分别用两种方法模拟圆形

第一个例子为圆，在计算流体力学中，流体绕圆柱流动是一个经典的问题。在笛卡尔网格下，圆是一个复杂的几何形，这里我们分别使用锯齿笛卡尔网格法和对角笛卡尔网格法模拟圆形，并将两种方法生成的模拟边界作比较。

在网格密度为 51×51 时，分别用锯齿笛卡尔网格法和对角笛卡尔网格法生成一个圆的模拟边界如图 3.3.1、图 3.3.2 所示。经过计算，用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界其 $E1=27.32\%$ 、 $E2=0.7226 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.2202 \times 10^{-1}$ ；用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界其 $E1=9.611\%$ 、 $E2=0.4821 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.1232 \times 10^{-1}$ 。可见在这个网格密度之下，用对角笛卡尔网格法能比用锯齿笛卡尔网格法更加精确的模拟原始边界。在更加精密的网格下情况如何呢？图 3.3.3、图 3.3.4 是在网格密度为 301×301 时分别用对角笛卡尔网格法和锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界。经过计算，用图 3.3.3 所示的模拟边界，其 $E1=27.19\%$ 、 $E2=0.1214 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.3414 \times 10^{-2}$ ，图 3.3.4 所示的模拟边界，其 $E1=13.57\%$ 、 $E2=0.9237 \times 10^{-3}$ 、 $E3=0.2278 \times 10^{-2}$ 。

图 3.3.5、图 3.3.6、图 3.3.7 给出了用对角笛卡尔网格法和锯齿笛卡尔网格法方法分别模拟圆形，其误差 $E1$ 、 $E2$ 、 $E3$ 变化与网格密度之间的关系曲线。从这三个图，我们可以看出，在各种网格密度之下，用对角笛卡尔网格法来模拟圆形总是比用锯齿笛卡尔网格法更加精确。

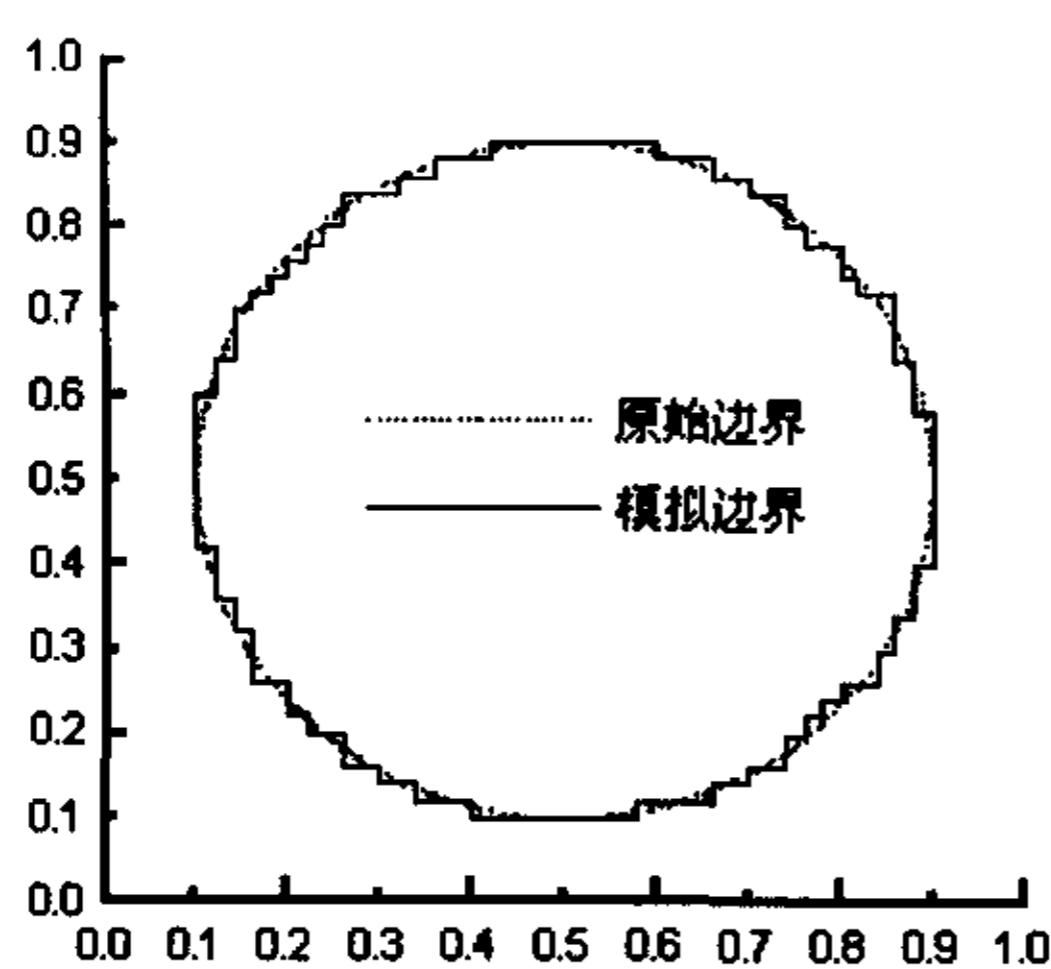


图 3.3.1 网格密度 51×51 用
锯齿笛卡尔网格法模拟圆形

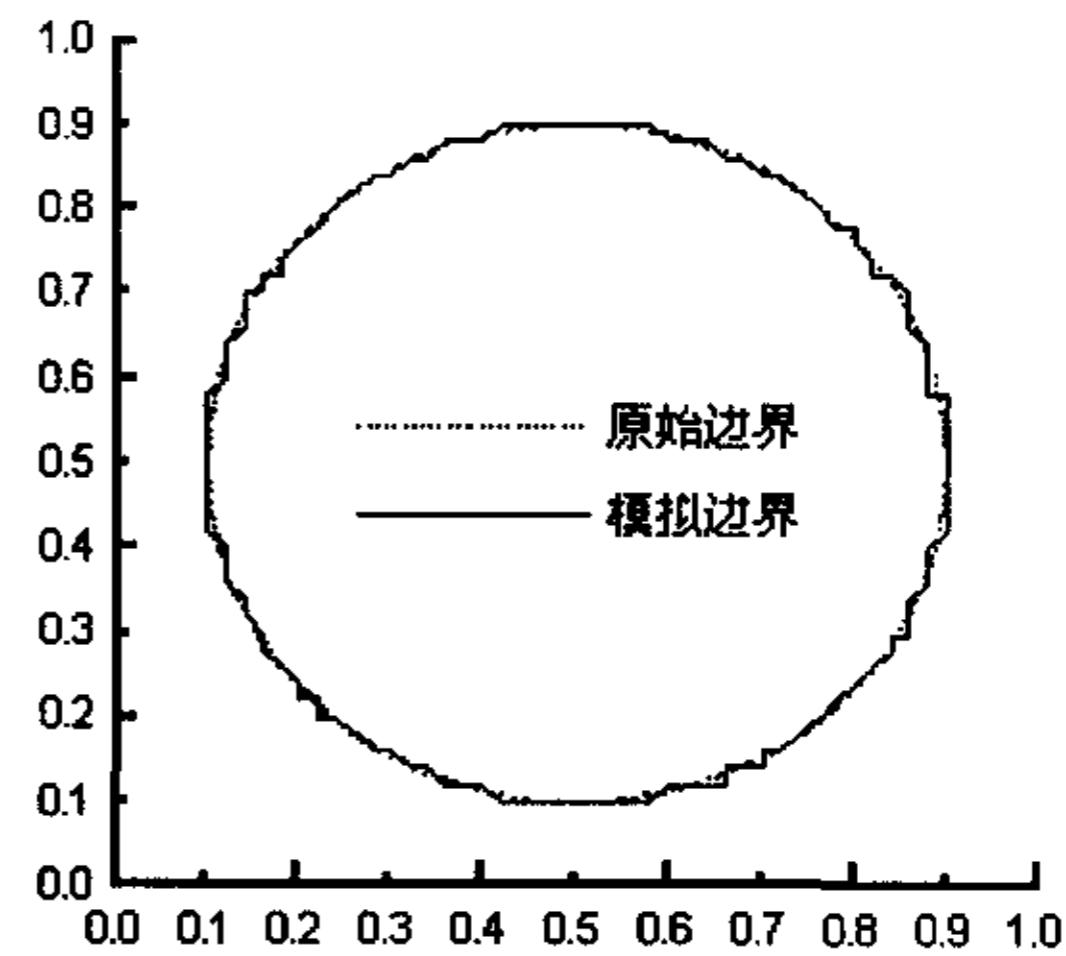


图 3.3.2 网格密度 51×51 用
对角笛卡尔网格法模拟圆形

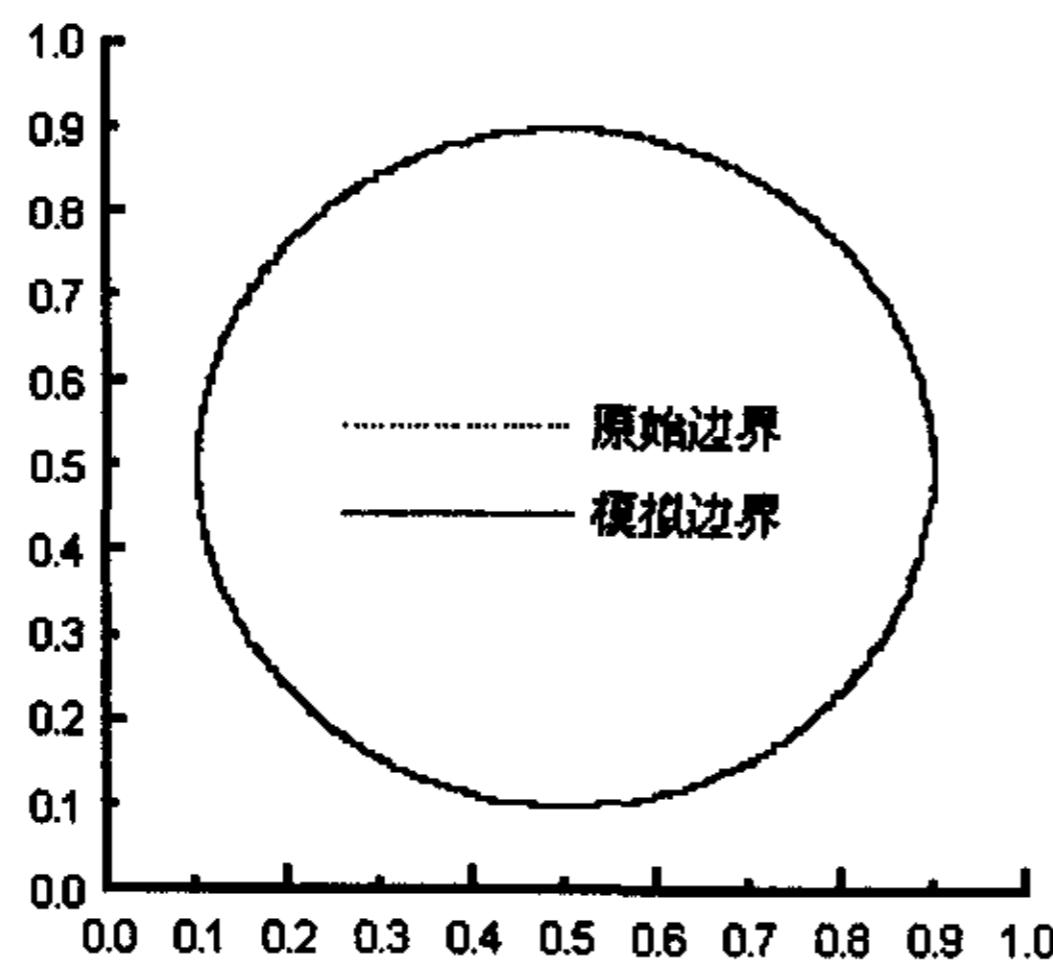


图 3.3.3 网格密度 301×301 用
锯齿笛卡尔网格法模拟圆形

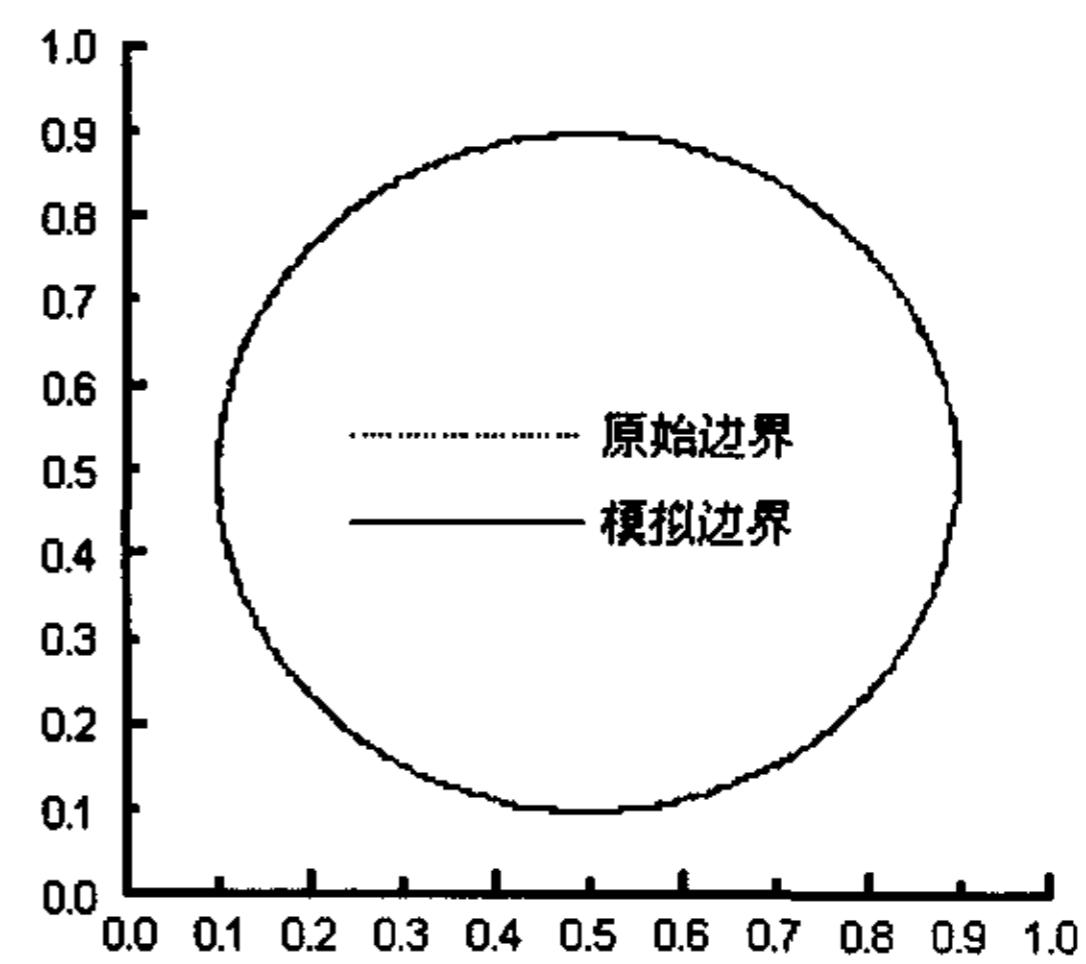


图 3.3.4 网格密度 301×301 用
对角笛卡尔网格法模拟圆形

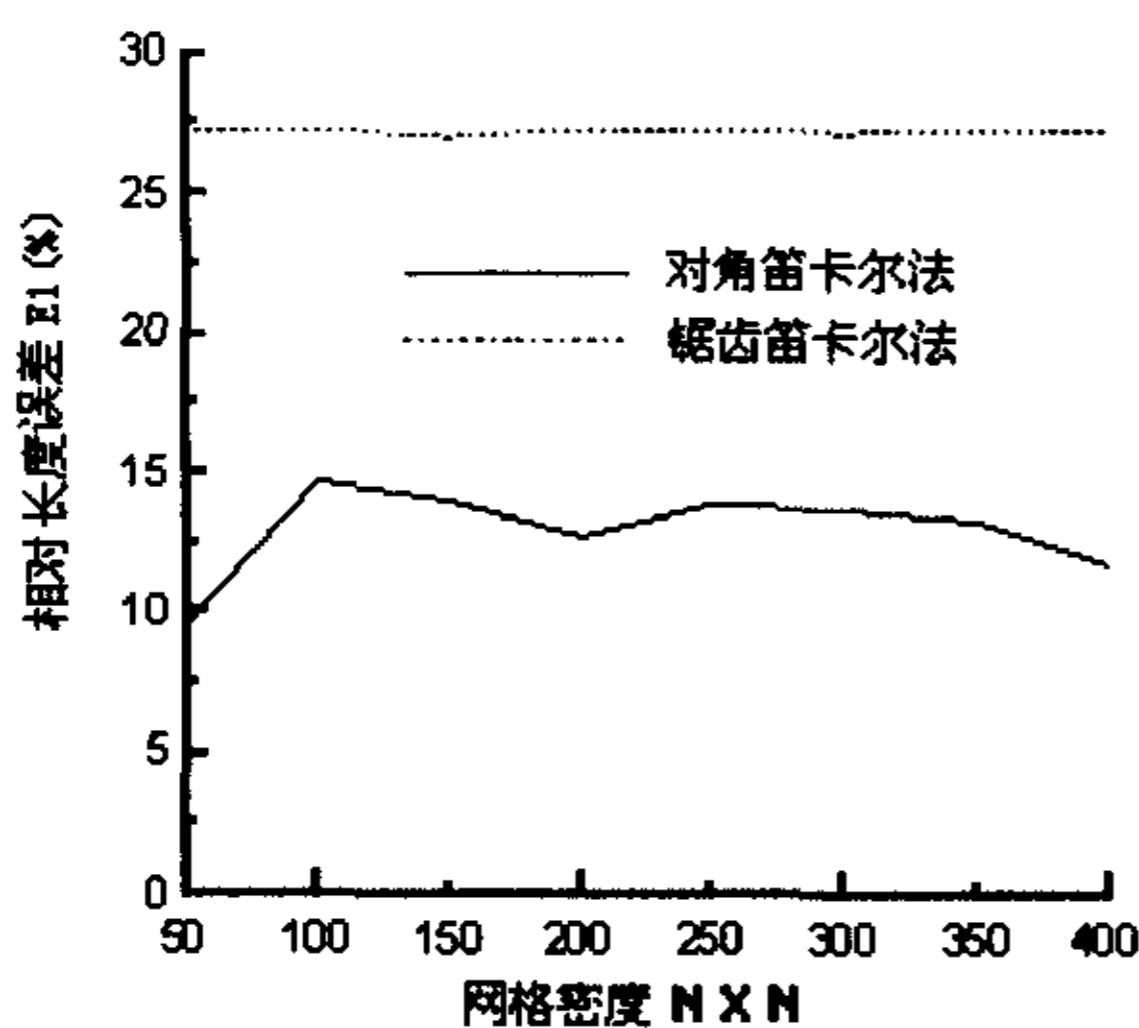


图 3.3.5 模拟圆形时网格密度与
E1 之间的关系

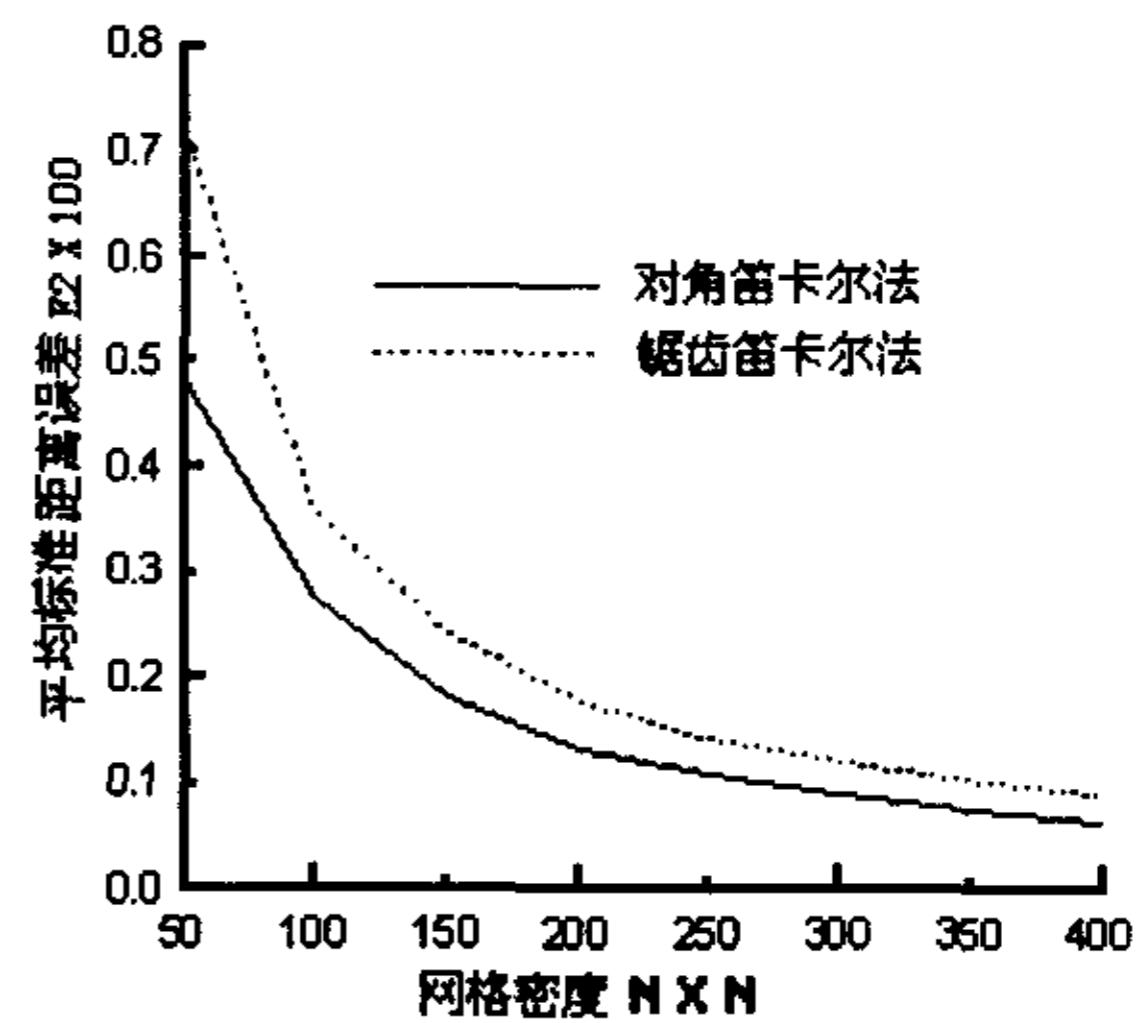


图 3.3.6 模拟圆形时网格密度与
E2 之间的关系

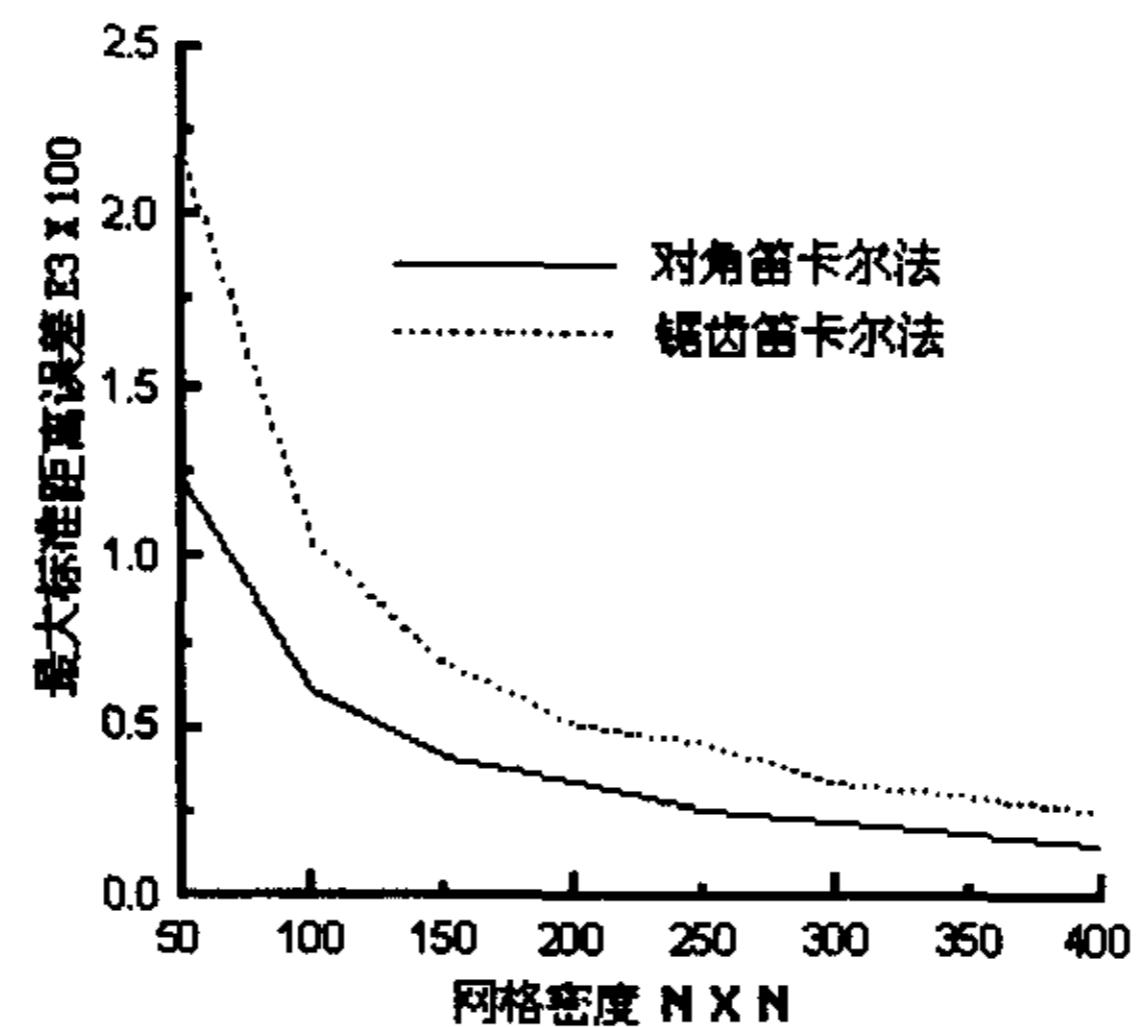


图 3.3.7 模拟圆形时网格密度与
E3 之间的关系

3.3.2 分别用两种方法模拟斜位正方形

第二个例子为斜位正方形。空腔内的流动问题也是验证数值计算方法的一个经典问题。把空腔旋转一个角度（本例中为 30 度），它在笛卡尔坐标下就变成了一个复杂的几何形。

图 3.3.8、图 3.3.9 是在网格密度为 51×51 时，分别用锯齿笛卡尔网格法和对角笛卡尔网格法生成的模拟边界。经过计算，用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界，其 $E1=32.50\%$ 、 $E2=0.8624 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.1971 \times 10^{-1}$ ；用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界其 $E1=11.02\%$ 、 $E2=0.5945 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.1239 \times 10^{-1}$ 。图 3.3.10、图 3.3.11 是在网格密度为 301×301 时，分别用锯齿笛卡尔网格法和对角笛卡尔网格法生成的模拟边界。经过计算，用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界，其 $E1=36.67\%$ 、 $E2=0.1487 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.3628 \times 10^{-2}$ ；用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界，其 $E1=13.24\%$ 、 $E2=0.1008 \times 10^{-2}$ 、 $E3=0.2232 \times 10^{-2}$ 。

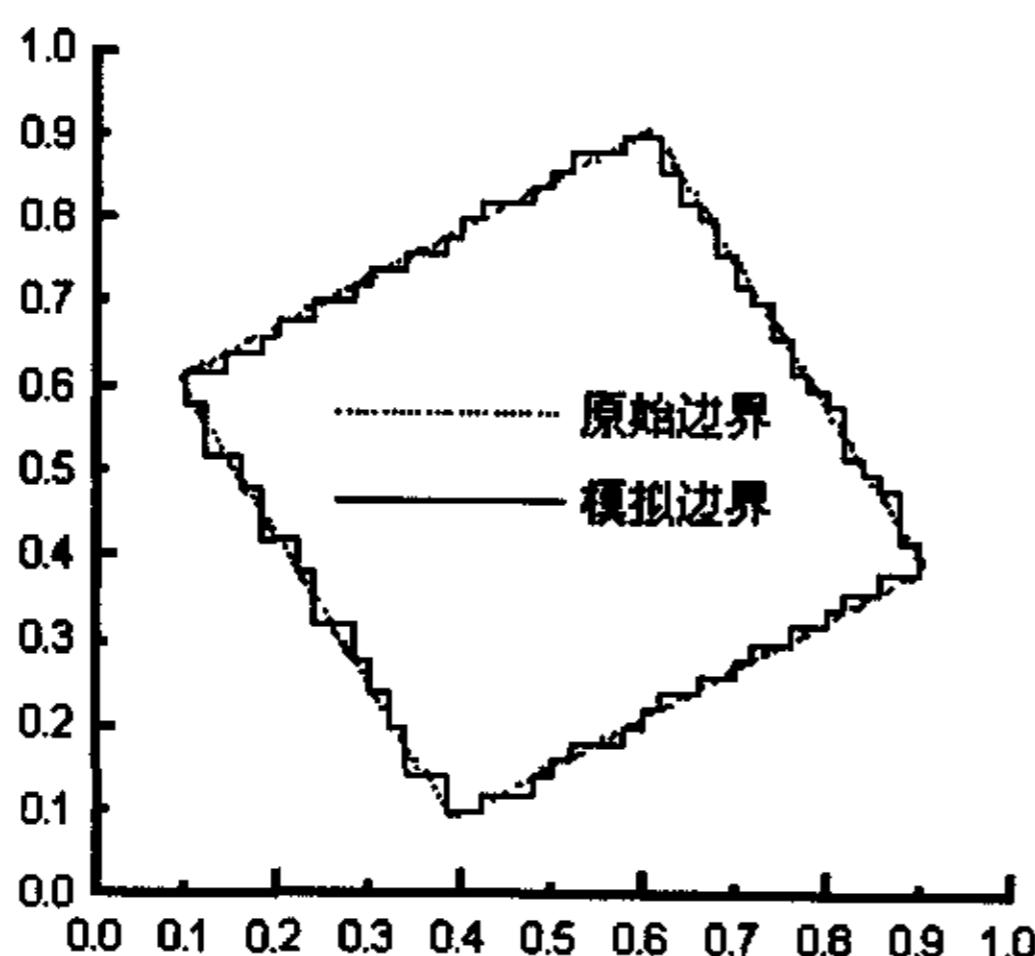


图 3.3.8 网格密度 51×51 用锯齿笛卡尔网格法模拟斜位正方形

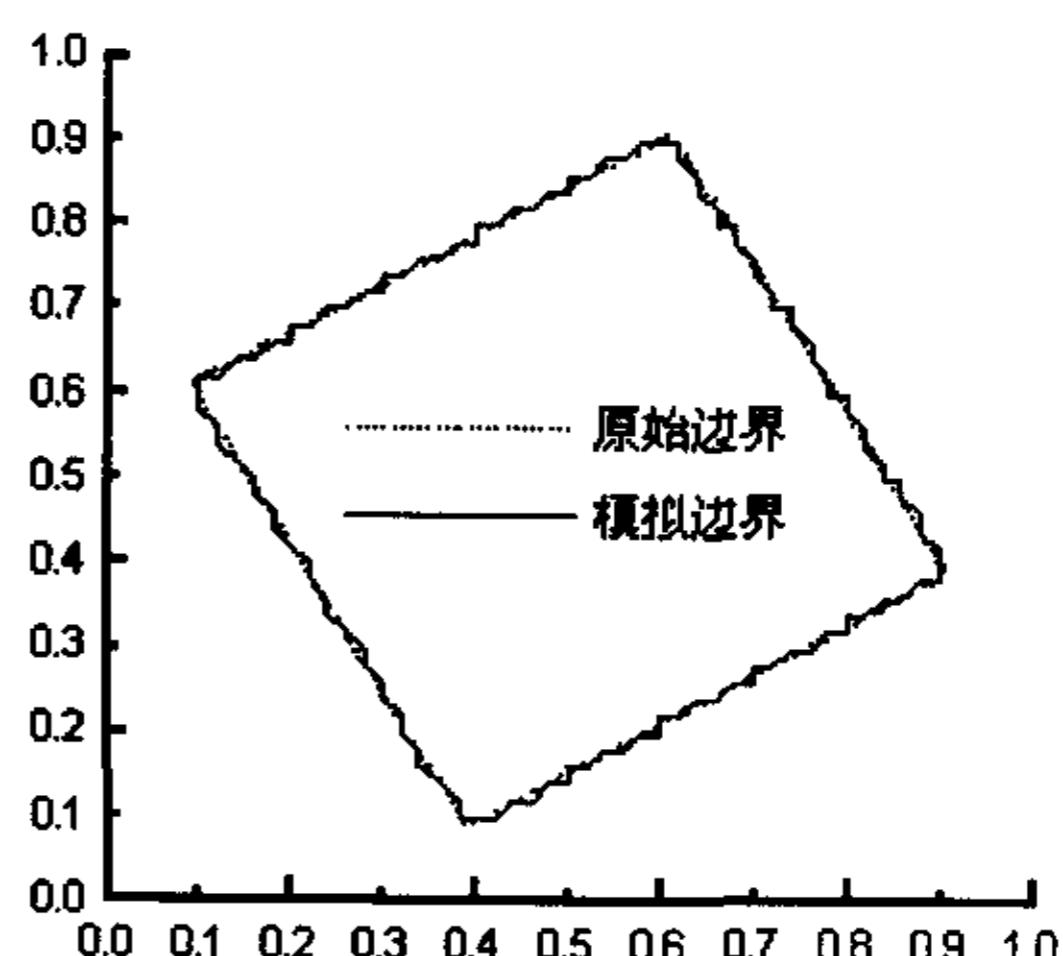


图 3.3.9 网格密度 51×51 用对角笛卡尔网格法模拟斜位正方形

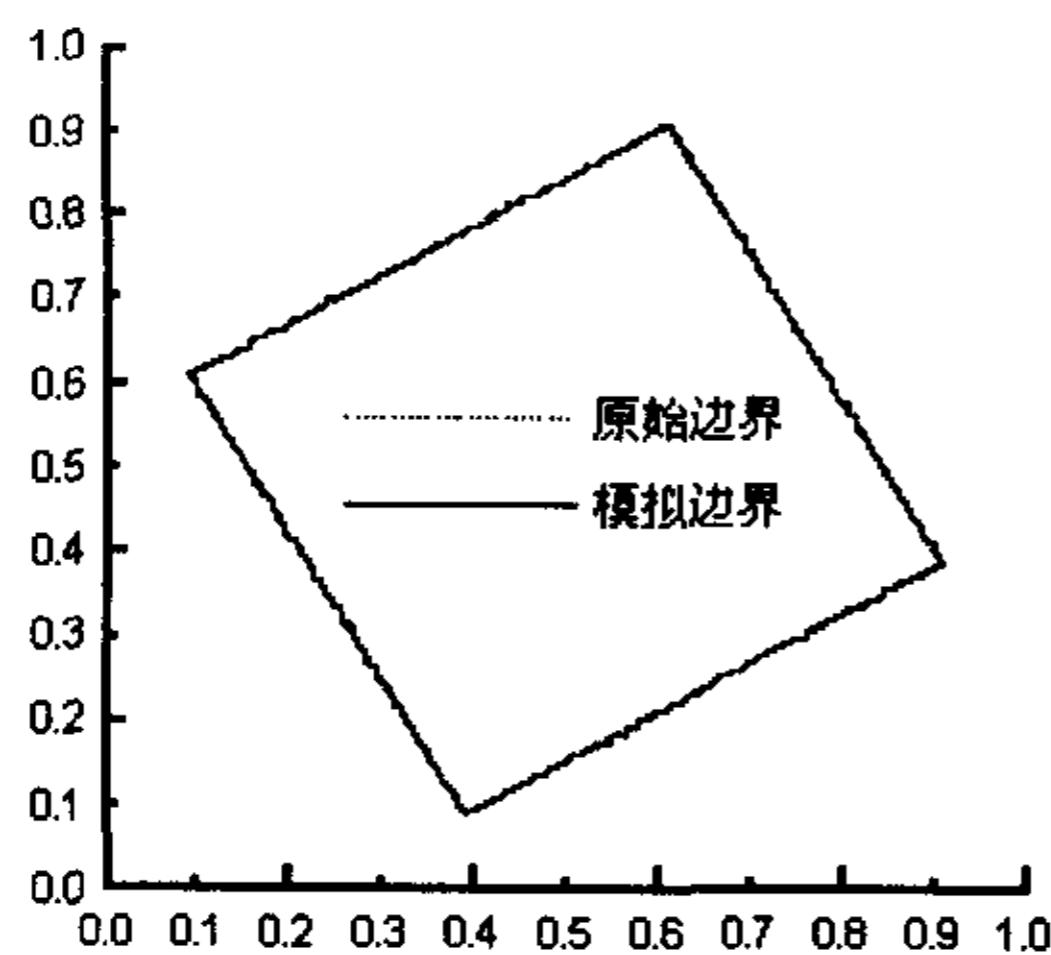


图 3.3.10 网格密度 301×301 用锯齿笛卡尔网格法模拟斜位正方形

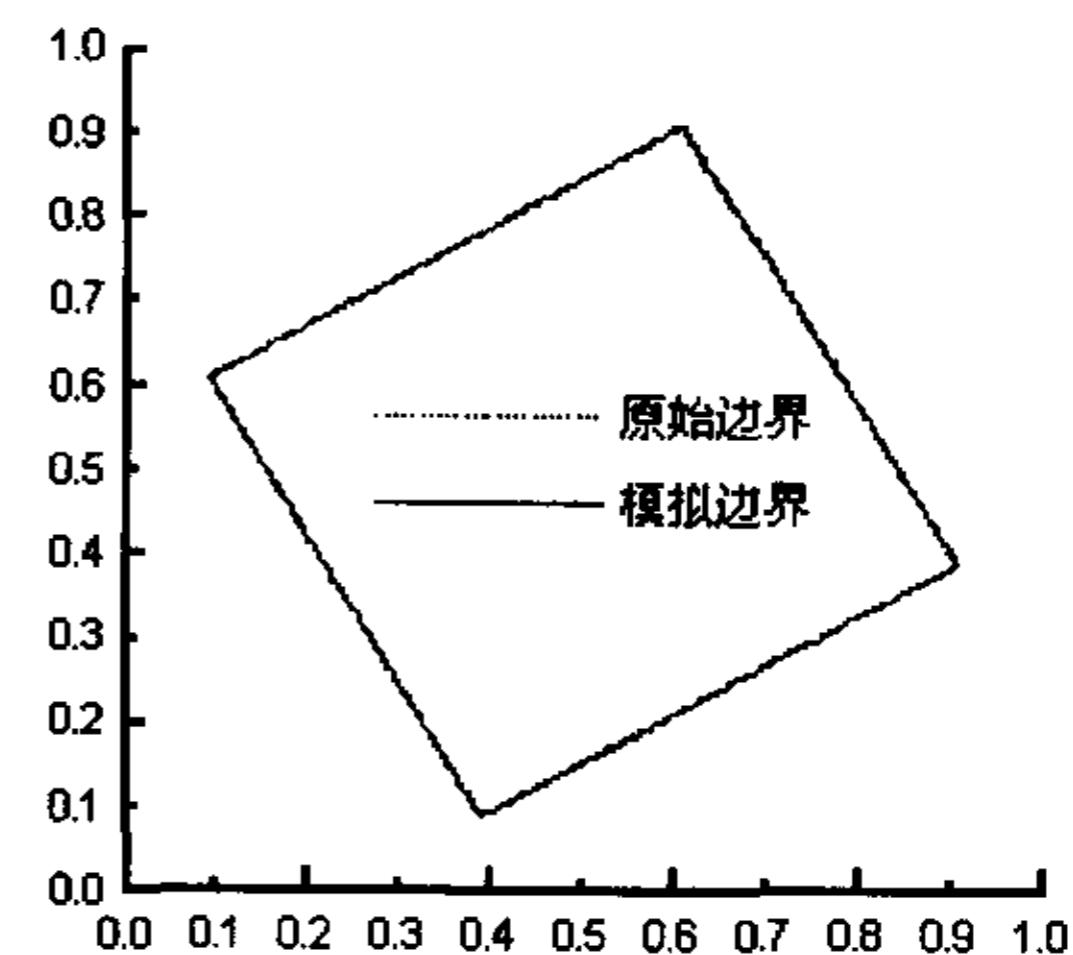


图 3.3.11 网格密度 301×301 用对角笛卡尔网格法模拟斜位正方形

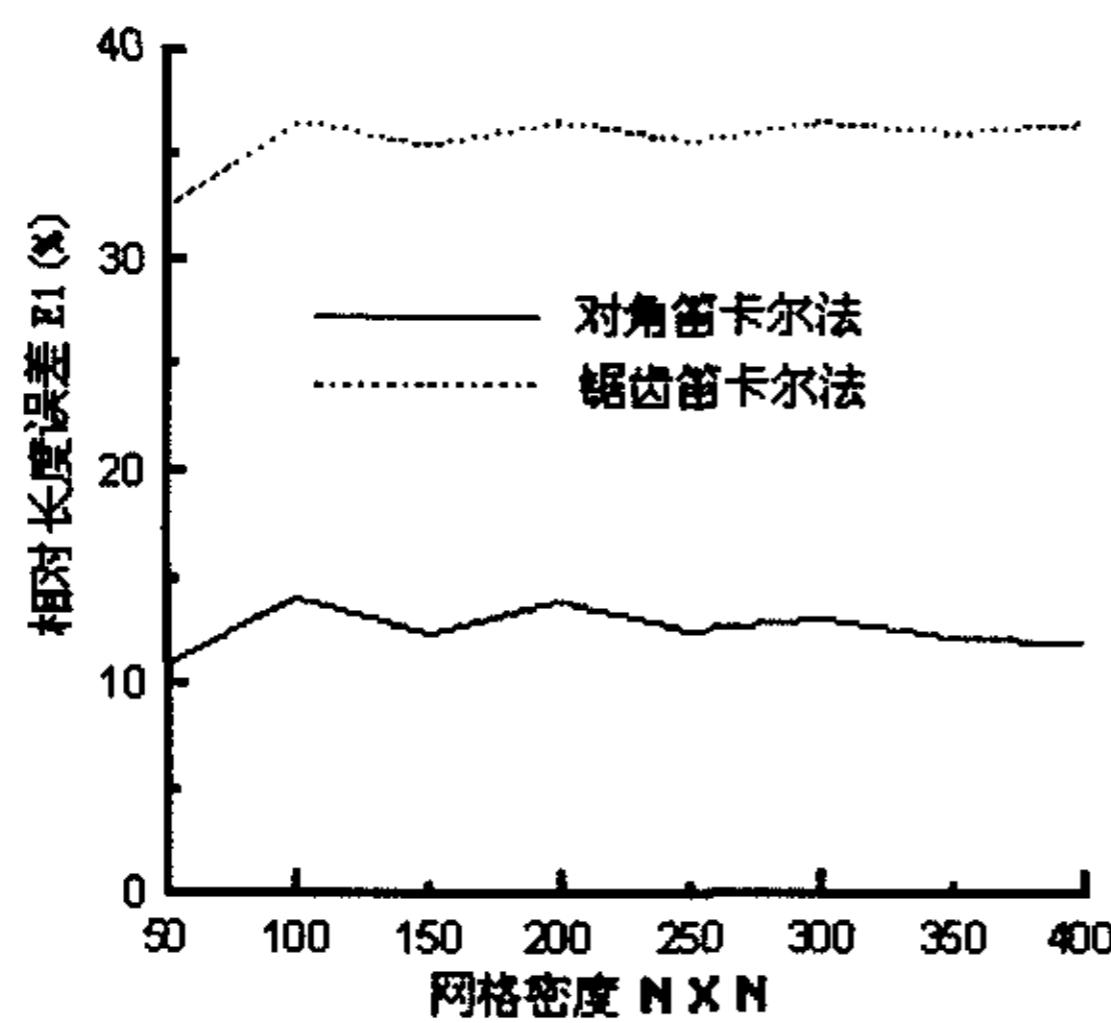


图 3.3.12 模拟斜位正方形时网
格密度与 $E1$ 之间的关系

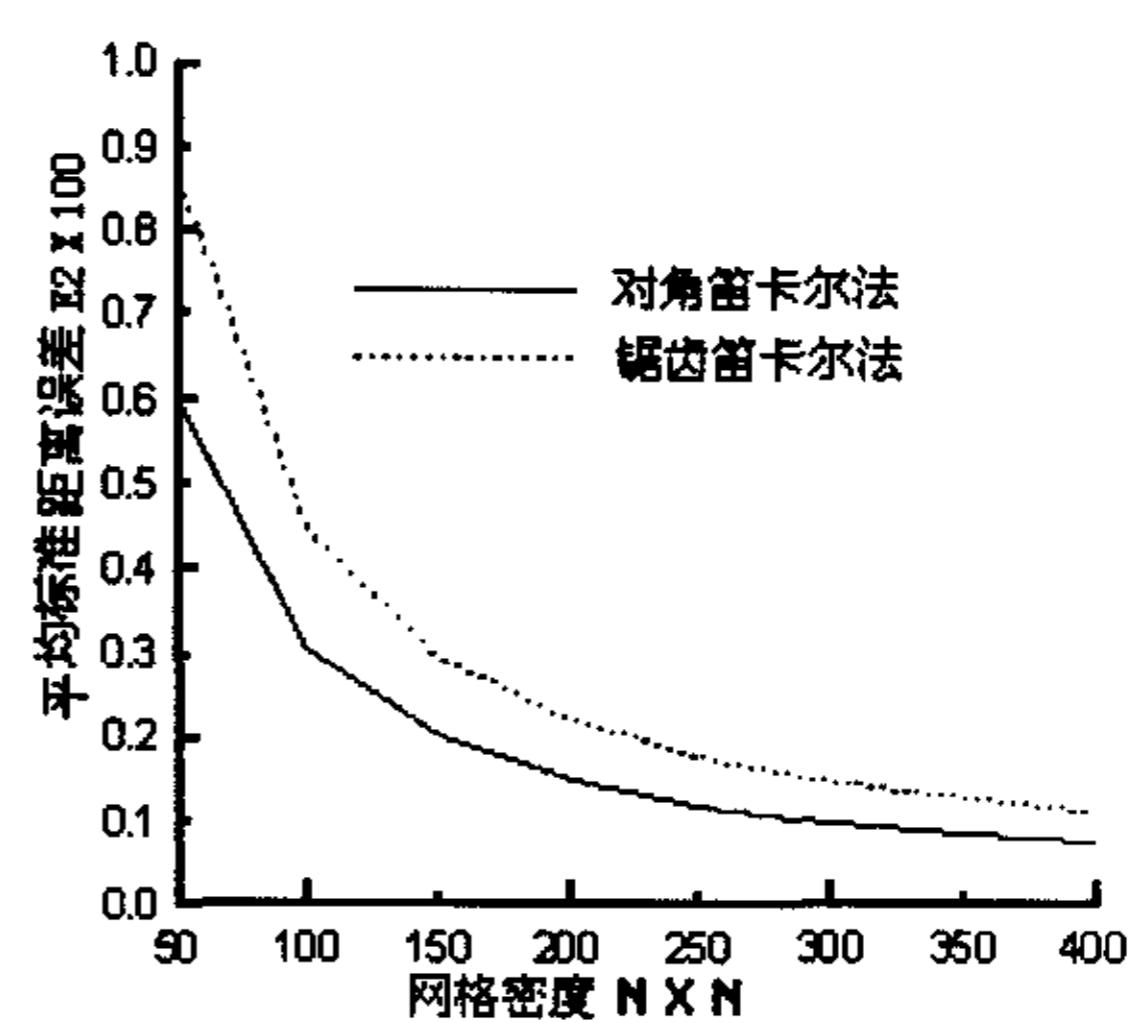


图 3.3.13 模拟斜位正方形时网
格密度与 $E2$ 之间的关系

图 3.3.12、图 3.3.13、图 3.3.14 给出了用对角笛卡尔网格法和锯齿笛卡尔网格法方法分别模拟斜位正方形其误差 E_1 、 E_2 、 E_3 的变化与网格密度之间的关系曲线。从这三个图，我们可以看出，在各种网格密度之下，用对角笛卡尔网格法来模拟斜位正方形同样总是比用锯齿笛卡尔网格法更加精确。

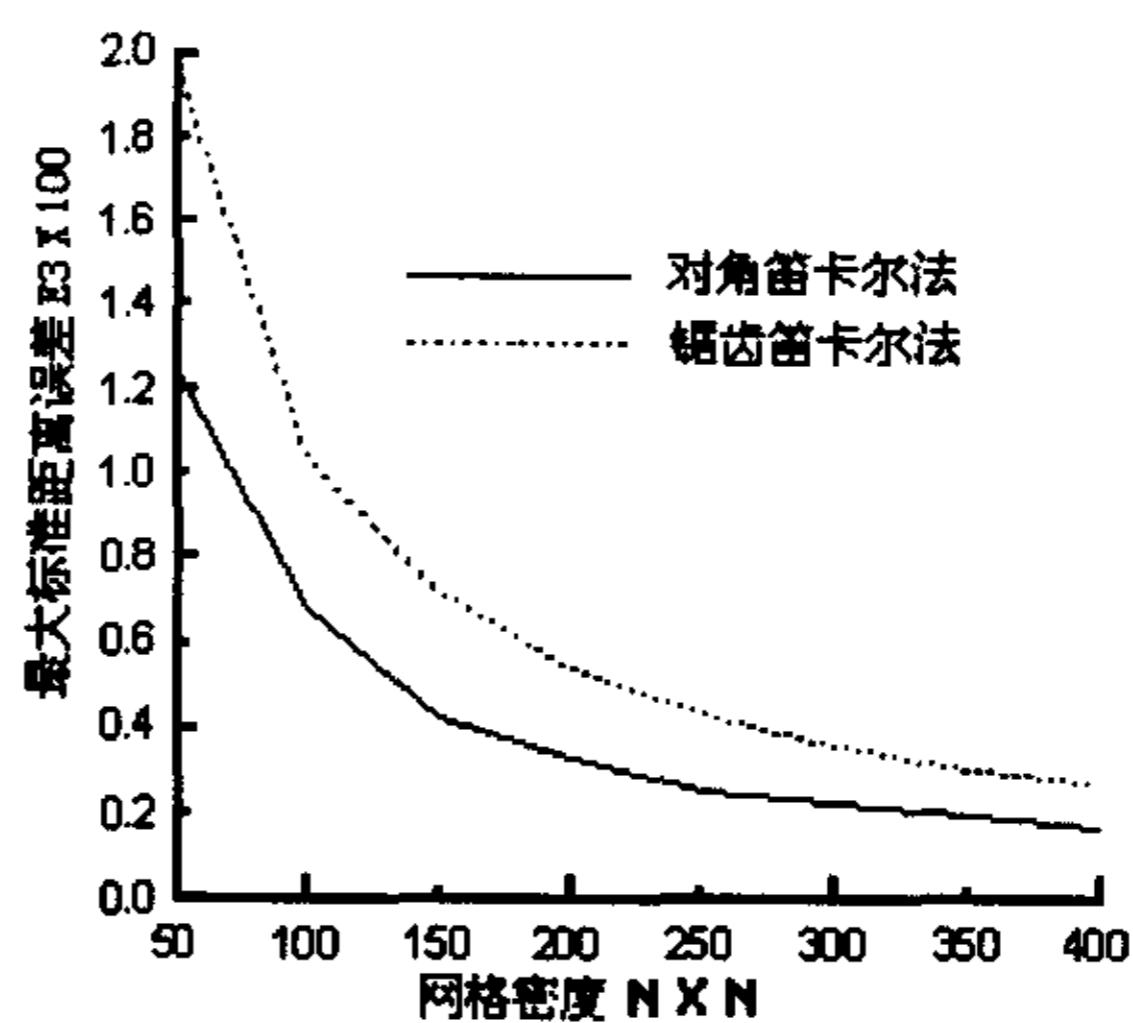


图 3.3.14 模拟斜位正方形时网格密度与 E_3 之间的关系

3.4 小结

从以上两个例子我们可以看出，在相同的网格密度之下，使用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界总是比用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界更加精确。同锯齿笛卡尔网格法一样，对角笛卡尔网格法也能够很方便的为复杂的几何边界自动生成模拟边界和计算网格。在自动性与精确性中找到了更好的结合点正是对角笛卡尔网格法的优势所在。

第四章 不可压流的数值分析

这一章讨论在笛卡尔坐标下数值模拟不可压流流过复杂边界的具方法。采用基于单元中心的非交错网格，把所有的变量都定义在单元中心。对规则的边界同时在边界上定义速度，以此来避免确定压力边界条件的困难。通过在一个选定的靠近边界的控制体积上的离散连续性方程来保证质量守恒，从而消除了计算中的压力震荡（棋盘现象）。对不规则的边界，由于使用了对角笛卡尔网格法，有一些边界点位于笛卡尔网格点上，而另外一些点位于网格中心，即所谓对角表面点，对它们的压力边界条件需要特殊的处理。采用控制体积法来保证这些边界附近的质量守恒。

4.1 网格排列方式

在数值模拟流动问题中，网格排列方式起着重要的作用。交错网格和非交错网格是两种常见的网格排列方式。

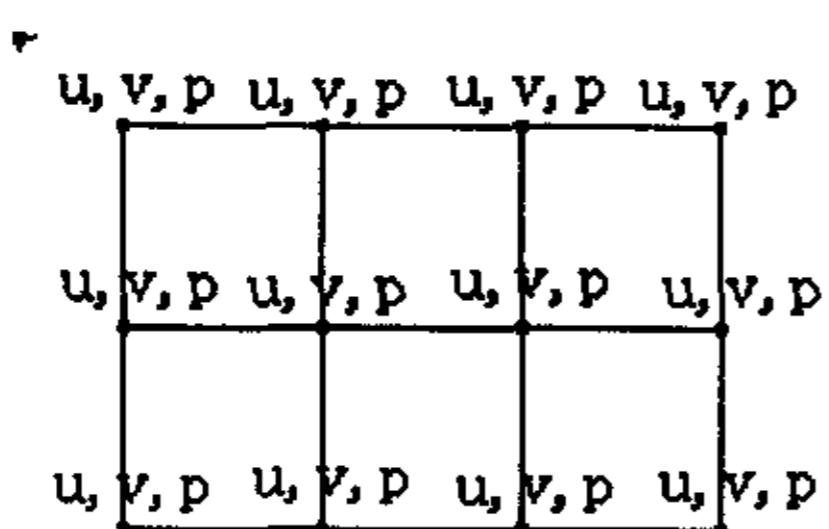


图 4.1.1 基于单元顶点的
非交错网格示意图

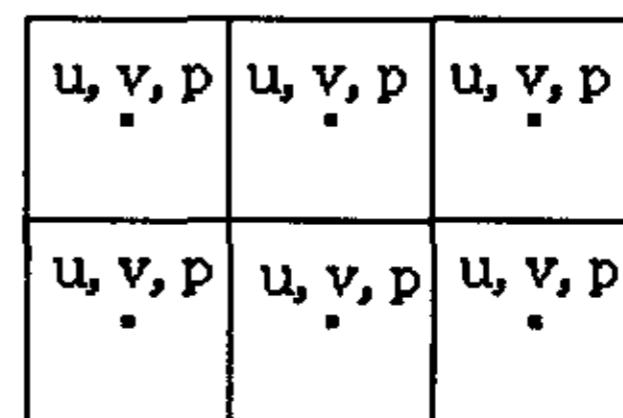


图 4.1.2 基于单元中心的非
交错网格示意图

4.1.1 非交错网格

在非交错网格中，变量都存储在网格的同一点上，既可以是网格顶点也可以是网格单元的中心，分别如图 4.1.1，图 4.1.2 所示。非交错网格的主要优点是编程容易、占内存小。在非交错网格中，当质量方程采用中心差分，同时动量方程的压力梯度也采用中心差分时，就会产生非物理震荡，这就是所谓的压力棋盘现象。可能产生压力棋盘现象是非交错网格的主要缺点。使用交错网格可以弥补这一点。

4.1.2 交错网格

在交错网格中，压力点设置在网格中心，而 x 方向速度 U 设置在网格左右边， y 方向速度 V 设置在网格上下边，如图 4.1.3 所示。

控制体积内的 NS 方程的有限差分解要求速度既满足质量方程，又满足动量方程。在交错网格中，压力定义在网格中心，速度定义在网格边界上，这样做的最大好处在于使相邻节点上的压力差而不是相间节点上的压力差成为控制体界面上的速度分布的驱动力，从而避免了棋盘式压力场的出现。

然而，在计算包括复杂几何边界的流动问题时，交错网格的速度和压力存储在不同的节点上，这就导致所需的机时和内存加大。而且，在复杂的几何边界下，不同变量以及在交错网格中的节点的位置难以

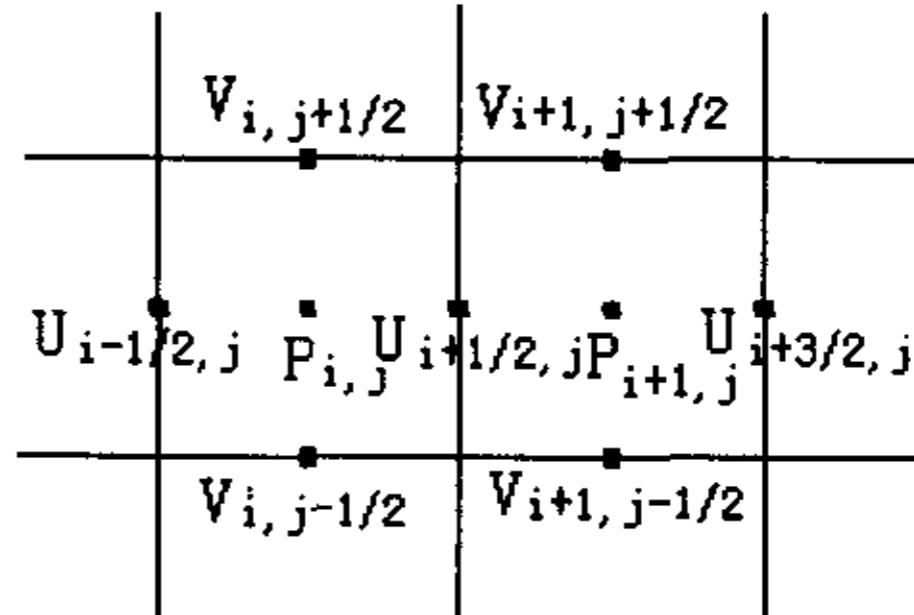


图 4.1.3 交错网格示意图

确定。因此在解决具有复杂几何边界的问题时，不宜采用交错网格。

4.1.3 基于单元中心的非交错网格

由于要讨论的问题包括复杂的几何边界，采用交错网格困难太大而不可取。因此，本文采用非交错网格，并且所有的变量都定义在单元中心。

在模拟不可压缩流动时，因为没有状态方程，而且能量方程独立于动量方程以及质量方程，所以没有显式的压力方程来确定压力场。

本文首先通过采用有限分析法离散的动量方程求出预估速度，再将预估速度代入用有限差分法离散的连续性方程中，在非交错网格上直接得到压力方程而不是压力校正方程。为了消除压力棋盘现象，可以将质量方程在较小的控制体积，如图 4.1.4

中的‘senw’上离散，而将动量方程在较大的控制体积，如图 4.1.4 中的‘SEWN’上离散。单元表面上的速度 U_e 、 U_w 、 V_n 、 V_s 可以从用有限分析法离散的动量方程式(4.1.1)求出。

$$U_e = U_e^* - \alpha_e S_e \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e \quad (4.1.1)$$

其中单元表面预估速度 U_e^* 、 U_w^* 、 V_n^* 、 V_s^* 可以通过 LIM(线性内插法)或者 MWIM(动量加权内插法)求出。

以 U_e^* 为例，线性内插法的计算公式如下，计算 U_w^* 、 V_n^* 、 V_s^* 的公式如之类似。

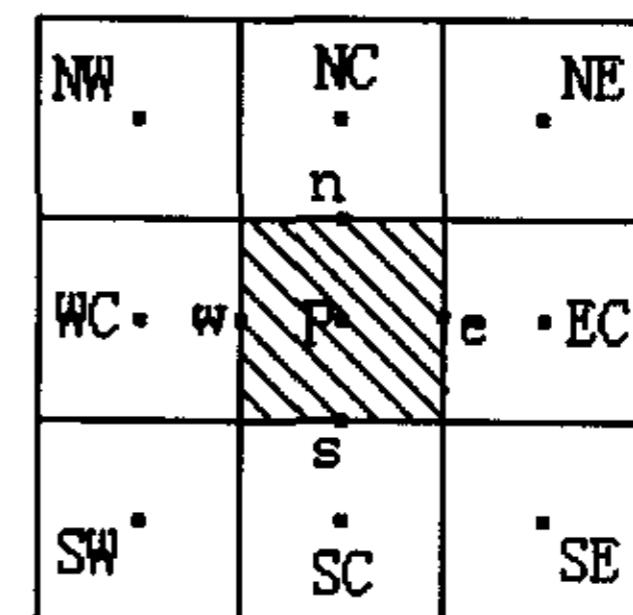


图 4.1.4 选择在合适的控制体上离散

$$U_e^* = \frac{U_E^* + U_P^*}{2} \quad (4.1.2)$$

节点的预估速度，例如 U_P^* 可以表达为：

$$U_P^* = \alpha_P \sum_{nb=1}^8 (C_{nb} U_{nb}) + (1 - \alpha_P) U_P^0 \quad (4.1.3)$$

计算单元表面预估速度 U_e^* 、 U_w^* 、 V_n^* 、 V_s^* 还可以使用 MWIM(动量加权内插法)求得，以 U_e^* 为例，它的计算公式为：

$$U_e^* = \left(\sum C_{nb}^e U_{nb}^e \right)_e + (1 - \alpha_e) U_e^0 \quad (4.1.4)$$

其中：

$$C_{nb}^e = \frac{C_{nb}^E + C_{nb}^P}{2} \quad (4.1.5)$$

$$U_{nb}^e = \frac{U_{nb}^E + U_{nb}^P}{2} \quad (4.1.6)$$

$$U_e^0 = \frac{U_E^0 + U_P^0}{2} \quad (4.1.7)$$

MWIM(动量加权内插法)反映了动量方程的非线性，应该更加合理，而 LIM(线性内插法)比较简便、消耗更少的 CPU 时间和内存。实际上用这两种计算方法计算的结果相差不大，在雷诺数不大、网格不很精细的时候更是如此。因此，在计算程序中采用线性内插法。

通过这种安排的网格结构可以消除压力棋盘现象，而且其所需的存贮量和计算量以及编程难度都比交错网格小。

4.2 流体区域内部节点的计算方法

不可压缩流的无量纲化的连续性方程和动量方程如式(4.2.1)、(4.2.2)、(4.2.3)所示：

$$U_x + V_y = 0 \quad (4.2.1)$$

$$U_t + UU_x + VU_y = -P_x + \frac{1}{Re}(U_{xx} + U_{yy}) \quad (4.2.2)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -P_y + \frac{1}{Re}(V_{xx} + V_{yy}) \quad (4.2.3)$$

相应的 Dirichlet 边界条件为：

$$\vec{v} = \vec{v}_{bc} \quad (4.2.4)$$

在小控制体积，如图 4.1.4 所示的 ‘senw’，上满足连续性方程(4.2.1)，而在大控制体积，如图 4.1.4 所示的 ‘SENW’，上满足动量方程(4.2.2)和(4.2.3)。

在小控制体积 ‘senw’ 上离散连续性方程(4.2.1)可以得到如下的离散的连续性方程：

$$\frac{U_e - U_w}{x_e - x_w} + \frac{V_n - V_s}{y_n - y_s} = 0 \quad (4.2.5)$$

方程(4.2.5)中的单元表面速度 U_e 、 U_w 、 V_n 、 V_s 通过有限分析法可以用下式表示：

$$U_e = U_e^* - \alpha_e S_e \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e \quad (4.2.6)$$

$$U_w = U_w^* - \alpha_w S_w \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_w \quad (4.2.7)$$

$$V_n = V_n^* - \alpha_n S_n \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n \quad (4.2.8)$$

$$V_s = V_s^* - \alpha_s S_s \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_s \quad (4.2.9)$$

在上述四式中的 U_e^* 、 U_w^* 、 V_n^* 、 V_s^* 是不考虑压力影响的单元表面的预估速度，用下式定义：

$$U_e^* = \alpha_e \sum_{nb=1}^8 (C_{nb}^e U_{nb}^e) + (1 - \alpha_e) U_e^0 \quad (4.2.10)$$

$$U_w^* = \alpha_w \sum_{nb=1}^8 (C_{nb}^w U_{nb}^w) + (1 - \alpha_w) U_w^0 \quad (4.2.11)$$

$$V_n^* = \alpha_n \sum_{nb=1}^8 (C_{nb}^n V_{nb}^n) + (1 - \alpha_n) V_n^0 \quad (4.2.12)$$

$$V_s^* = \alpha_s \sum_{nb=1}^8 (C_{nb}^s V_{nb}^s) + (1 - \alpha_s) V_s^0 \quad (4.2.13)$$

以上四式中，上标 0 表示上一个时间步长的速度值， C_{nb} 为有限分析系数。

式(4.2.6)、(4.2.7)、(4.2.8)、(4.2.9)中的压力梯度项通过中心差分用下式计算：

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e = \frac{P_E - P_P}{x_E - x_P} \quad (4.2.14)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_w = \frac{P_W - P_P}{x_W - x_P} \quad (4.2.15)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n = \frac{P_N - P_P}{y_N - y_P} \quad (4.2.16)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_s = \frac{P_S - P_P}{y_S - y_P} \quad (4.2.17)$$

式(4.2.6)、(4.2.7)、(4.2.8)、(4.2.9)中的 α_e 、 α_w 、 α_n 、 α_s 、 S_e 、 S_w 、 S_n 和 S_s 表示为：

$$\alpha_e = \frac{\alpha_E + \alpha_P}{2}, \quad \alpha_w = \frac{\alpha_W + \alpha_P}{2} \quad (4.2.18)$$

$$\alpha_n = \frac{\alpha_N + \alpha_P}{2}, \quad \alpha_s = \frac{\alpha_S + \alpha_P}{2} \quad (4.2.19)$$

$$S_e = \frac{S_E + S_P}{2}, \quad S_w = \frac{S_W + S_P}{2} \quad (4.2.20)$$

$$S_n = \frac{S_N + S_P}{2}, \quad S_s = \frac{S_S + S_P}{2} \quad (4.2.21)$$

α_E 、 α_W 、 α_N 、 α_S 、 α_P 、 S_E 、 S_W 、 S_N 、 S_S 和 S_P 由下式给出：

$$\alpha_E = \frac{1}{1 + (C_E \text{Re}/\Delta t)}, \quad \alpha_W = \frac{1}{1 + (C_W \text{Re}/\Delta t)} \quad (4.2.22)$$

$$\alpha_N = \frac{1}{1 + (C_N \text{Re}/\Delta t)}, \quad \alpha_S = \frac{1}{1 + (C_S \text{Re}/\Delta t)} \quad (4.2.23)$$

$$\alpha_P = \frac{1}{1 + (C_P \text{Re}/\Delta t)} \quad (4.2.24)$$

$$S_E = C_E \text{Re}, \quad S_W = C_W \text{Re} \quad (4.2.25)$$

$$S_N = C_N \text{Re}, \quad S_S = C_S \text{Re} \quad (4.2.26)$$

$$S_P = C_P \text{Re} \quad (4.2.27)$$

将式(4.2.6)、(4.2.7)、(4.2.8)、(4.2.9)、(4.2.14)、(4.2.15)、(4.2.16)和(4.2.17)代入式(4.2.5)就可以得到下面的离散的压力方程：

$$a^P P_P = a^E P_E + a^W P_W + a^N P_N + a^S P_S - D^* \quad (4.2.28)$$

其中：

$$D^* = \frac{U_e^* - U_w^*}{x_e - x_w} + \frac{V_n^* - V_s^*}{y_n - y_s} \quad (4.2.29)$$

系数 a^E 、 a^W 、 a^N 、 a^S 、 a^P 由下式给出：

$$a^E = \frac{\alpha_e S_e}{(x_e - x_w)(x_E - x_P)} \quad (4.2.30)$$

$$a^W = \frac{\alpha_w S_w}{(x_e - x_w)(x_P - x_W)} \quad (4.2.31)$$

$$a^N = \frac{\alpha_n S_n}{(y_n - y_s)(y_N - y_p)} \quad (4.2.32)$$

$$a^S = \frac{\alpha_s S_s}{(y_n - y_s)(y_p - y_s)} \quad (4.2.33)$$

$$a^P = a^E + a^W + a^N + a^S \quad (4.2.34)$$

式(4.2.29)中的单元表面预估速度 U_e^* 、 U_w^* 、 V_n^* 、 V_s^* 可以通过 4.1 节介绍的线性内插法或者动量加权内插法计算。

从离散的压力方程(4.2.28)可以看出，单元中心点 P 的压力值与 P 点的四个临近点 ‘E’、‘W’、‘N’ 和 ‘S’ 的压力值相关。因此不会出现不正确的压力棋盘现象。

4.3 处理规则边界附近的压力边界条件

4.3.1 边界虚拟点

如果要研究包括传热现象的流体流动的问题，就存在内外两个边界，内边界是流体和固体的分界面，在流体区域必须满足质量、动量、能量守恒，在固体区域只要考虑热传导。

应该注意到，在使用基

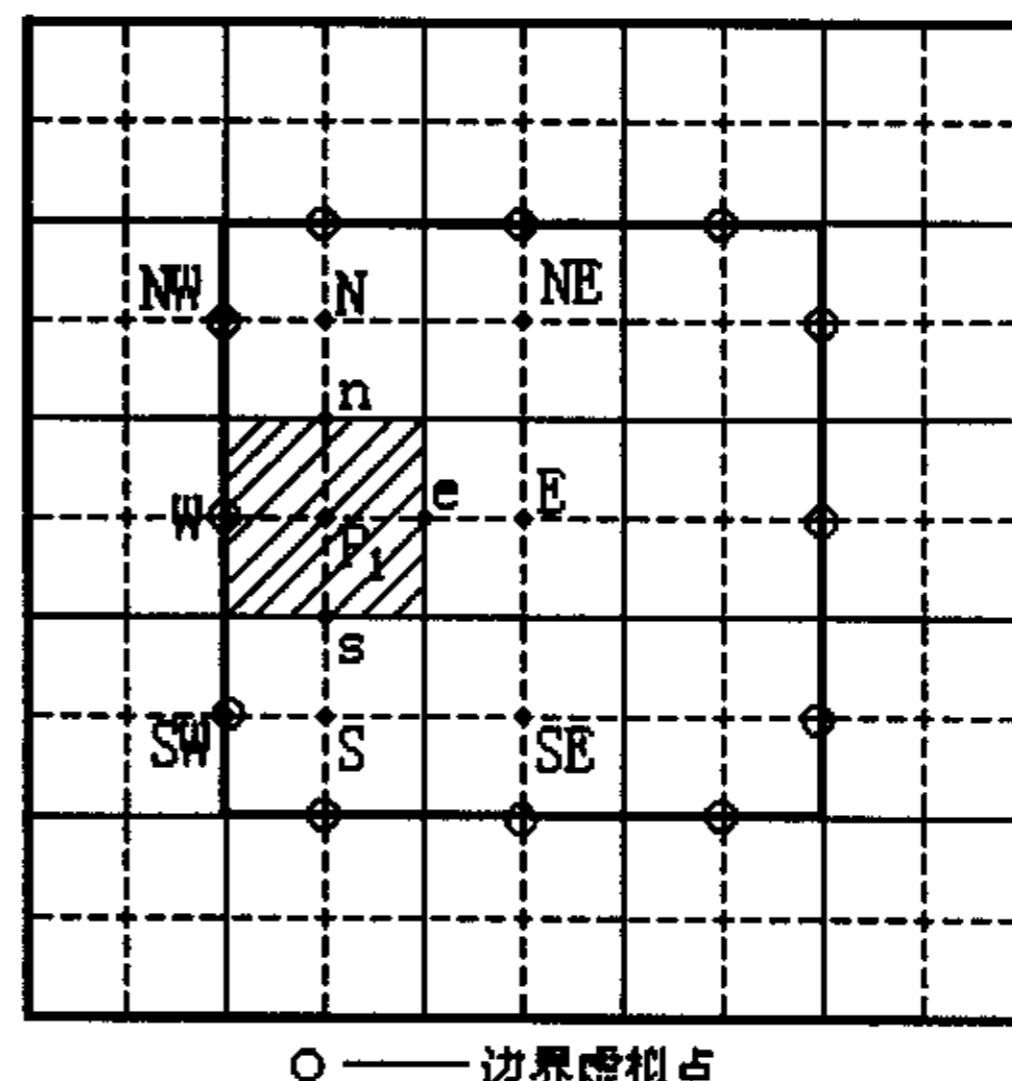


图 4.3.1 边界虚拟点示意图

于单元中心的非交错网格时，内边界不经过任何节点，如图 4.3.1 所示。为了保证内边界的边界条件，我们总是希望边界上也定义变量。这里使用边界虚拟节点法。使用这个方法，内边界由一系列的虚拟节点组成，这些点位于网格节点的中间，在图 4.3.1 中用小圆圈表示。在这些虚拟节点上，可以使用相应的速度边界条件。使用边界虚拟节点后，此类问题的压力方程同样不需要压力边界条件。

4.3.2 靠近规则边界的点的处理

对靠近规则边界(边界为网格线)的单元中心点，如图 4.3.2 中所示的 P₁ 点，在控制体积‘Wsen’上离散连续性方程(4.2.1)得到：

$$\frac{U_e - U_w}{x_e - x_w} + \frac{V_n - V_s}{y_n - y_s} = 0 \quad (4.3.1)$$

U_w 可以从边界条件中得知，而不需要从(4.2.11)求出，同理，可以导出下面得离散的压力方程：

$$a^P P_p = a^E P_E + a^W P_w + a^N P_N + a^S P_S - D^* \quad (4.3.2)$$

其中：

$$D^* = \frac{U_e^* - U_w^*}{x_e - x_w} + \frac{V_n^* - V_s^*}{y_n - y_s} \quad (4.3.3)$$

同时：

$$a^W = 0 \quad (4.3.4)$$

从式(4.3.2)到(4.3.4)可以看出，虽然在动量方程中出现压力导数项，

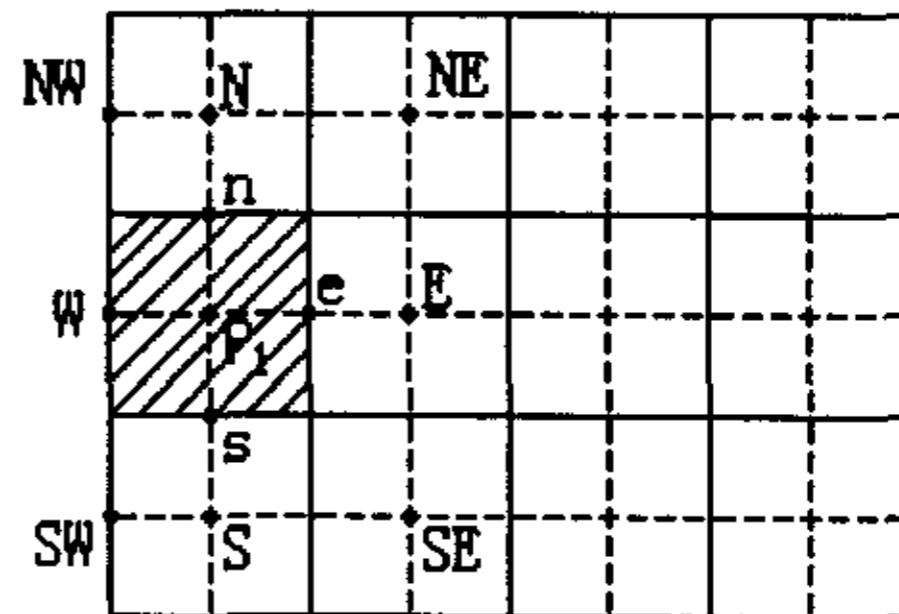


图 4.3.2 临近边界点的处理

但是在边界点‘W’上并不需要压力值。而且，临近边界点和内点同样都能够保证质量和动量守恒。

4.4 处理复杂边界附近的压力边界条件

4.4.1 对角边界点

本文使用对角笛卡尔网格法处理包括复杂几何边界的流动问题。使用这个方法，复杂的几何边界由笛卡尔坐标线以及笛卡尔网格点的对角线模拟，注意到在上一节中提到的边界虚拟点法，可以看出，内边界由边界虚拟点以及对角边界点组成，如图 4.4.1 所示。

在复杂的几何表面上使用边界虚拟点的思想与上一节中处理内边界的思想使同样的。从上一节可以知道，在边界虚拟点上的压力方程不需要压力边界条件。下面我们要讨论在对角边界点上的情形。

在数值模拟流体流过复杂几何时，往往最重要的问题在于临近对角边界点处的质量与动量守恒。在临近对角边界点处的动量方程用 5 点有限分析法离散。因为只有合适的压力边界条件才能保证质量守

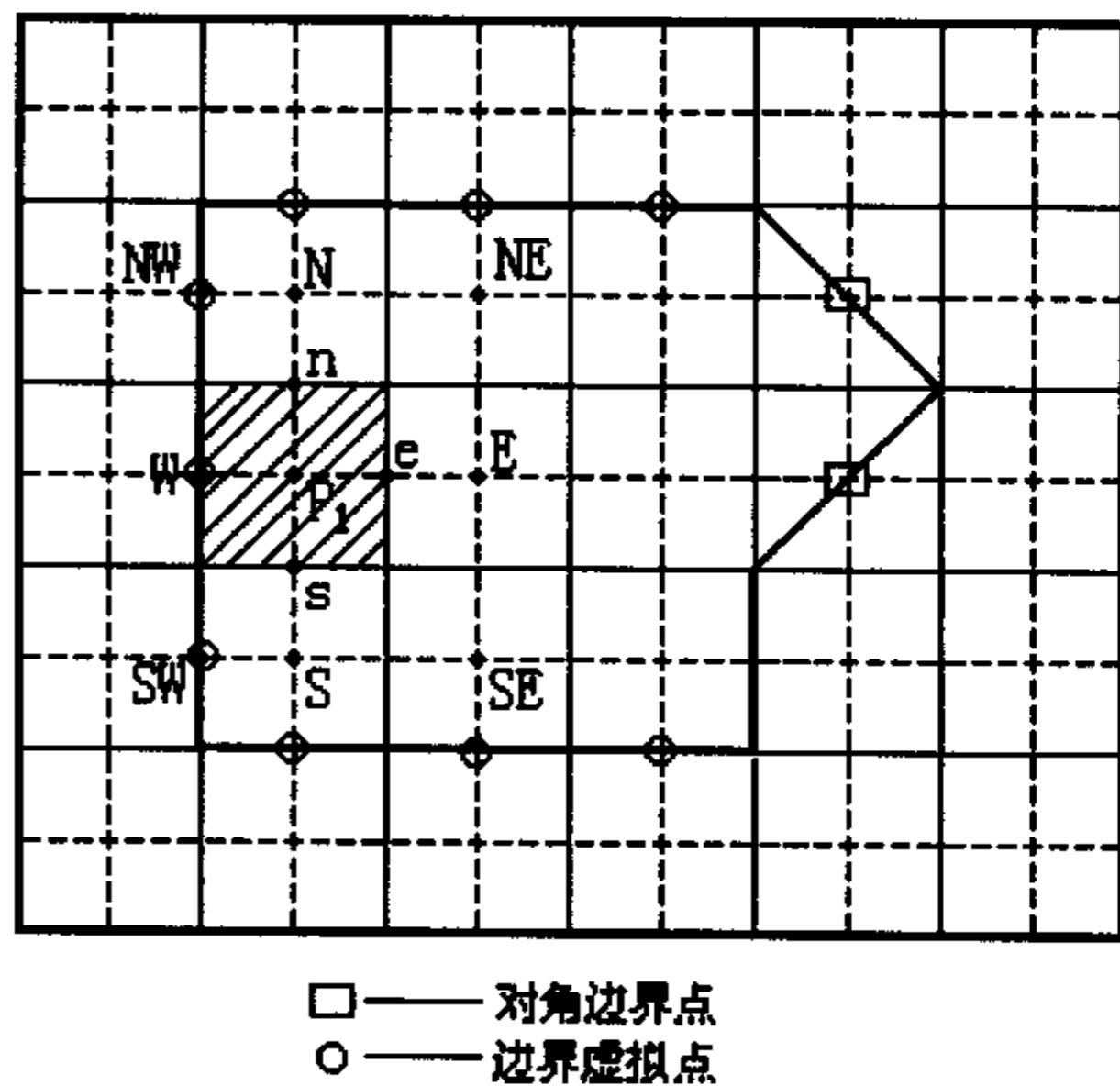


图 4.4.1 对角边界点与边界虚拟点

恒。因此，在对角边界点处的压力边界条件需要特殊的处理。这里采用两种方法，即本地控制体积质量守恒法和扩大的控制体积质量守恒法。

4.4.2 本地控制体积质量守恒法

首先讨论本地控制体积质量守恒法。考虑如图 4.4.2 中阴影部分的质量守恒，连续性方程(4.2.1)的离散形式为

$$\frac{U_e - U_p}{x_e - x_p} + \frac{V_n - V_p}{y_n - y_p} = 0 \quad (4.4.1)$$

这里， U_p 、 V_p 由速度边界条件可知。 U_e 、 V_n 可以表示为：

$$U_e = U_e^* - \alpha_e S_e \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e \quad (4.4.2)$$

$$V_n = V_n^* - \alpha_n S_n \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n \quad (4.4.3)$$

将式(4.4.2)、(4.4.3)代入式(4.4.1)可以得到：

$$\left[\frac{U_e^* - U_{bc}^P}{x_e - x_p} - \frac{\alpha_e S_e \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e}{x_e - x_p} \right] + \left[\frac{V_n^* - V_{bc}^P}{y_n - y_p} - \frac{\alpha_n S_n \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n}{y_n - y_p} \right] = 0 \quad (4.4.4)$$

上式中的压力梯度项可由中心差分法求出，整理上式可得：

$$\alpha^P P_p = \alpha^E P_E + \alpha^W P_W + \alpha^N P_N + \alpha^S P_S - D^* \quad (4.4.5)$$

其中：

$$D^* = \frac{U_e^* - U_{bc}^P}{x_e - x_p} + \frac{V_n^* - V_{bc}^P}{y_n - y_p} \quad (4.4.6)$$

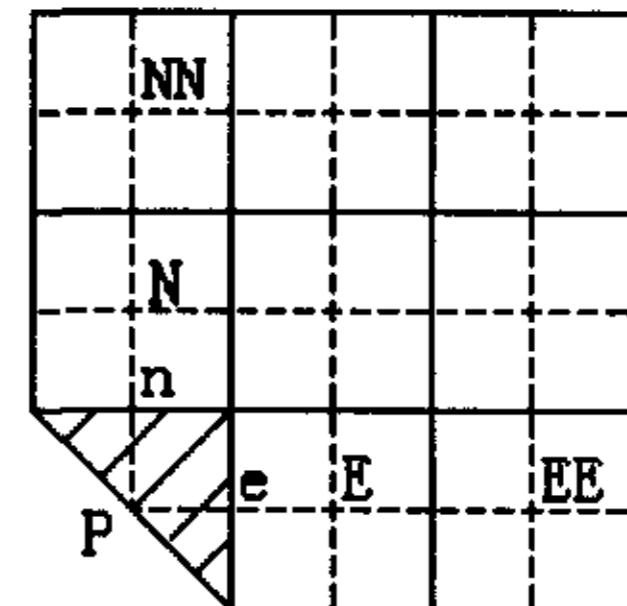


图 4.4.2 本地控制体积守恒法

而且：

$$\alpha^W = 0, \quad \alpha^S = 0 \quad (4.4.7)$$

$$\alpha^E = \frac{\alpha_e S_e}{(x_e - x_p)(x_E - x_p)} \quad (4.4.8)$$

$$\alpha^N = \frac{\alpha_n S_n}{(y_n - y_p)(y_N - y_p)} \quad (4.4.9)$$

$$\alpha^P = \alpha^E + \alpha^W + \alpha^N + \alpha^S \quad (4.4.10)$$

应当指出，预估速度 U_e^* 和 V_n^* 不能由(4.2.10)和(4.2.12)求出，因为在对角边界点 P 处的有限分析系数 C_{nb}^e 、 C_{nb}^n 和 C_{nb}^P 无法确定。因此只能采用线形内插法来计算 U_e^* 和 V_n^* ：

$$U_e^* = \frac{U_p^* + U_E^*}{2} \quad (4.4.11)$$

$$V_n^* = \frac{V_p^* + V_N^*}{2} \quad (4.4.12)$$

预估速度 U_p^* 和 V_p^* 可以用下式计算：

$$U_p^* = U_p + \alpha_p S_p \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_p \quad (4.4.13)$$

$$V_p^* = V_p + \alpha_p S_p \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_p \quad (4.4.14)$$

压力梯度 $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_p$ 和 $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_p$ 采用下式计算：

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_p = \frac{P_E^0 - P_p^0}{x_E - x_p} \quad (4.4.15)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_p = \frac{P_N^0 - P_p^0}{y_N - y_p} \quad (4.4.16)$$

这里，上标 0 表示上一个时间步长的值。

在式(4.4.8)、(4.4.9)中的 α_e 、 α_n 、 S_e 和 S_n 可以通过下式计算：

$$\alpha_e = \frac{\alpha_E + \alpha_P}{2}, \quad \alpha_n = \frac{\alpha_N + \alpha_P}{2} \quad (4.4.17)$$

$$S_e = \frac{S_E + S_P}{2}, \quad S_n = \frac{S_N + S_P}{2} \quad (4.4.18)$$

这里， α 和 S 的定义与式(4.2.22)到式(4.2.27)的定义相同。无法定义的 C_P 可以通过 C_E 、 C_{EE} 、 C_N 和 C_{NN} 的值内插而得。

由式(4.4.5)和式(4.4.7)可知，采用本地控制体积守恒法，在对角边界上不需要压力边界条件。

本地控制体积守恒法需要通过插值求出 C_P ，在雷诺数较大，和/或网格不很精密时会带来较大的误差，可能影响计算结果的收敛速度。因此，本文采用下面将要提到的扩大的控制体积守恒法。

4.4.3 扩大的控制体积守恒法

为了保证复杂边界处的质量守恒，也可以使用扩大的控制体积守恒法。与本地控制体积守恒不同，扩大的控制体积守恒法在如图 4.4.3 所示的阴影部分离散连续性方程。得到下式：

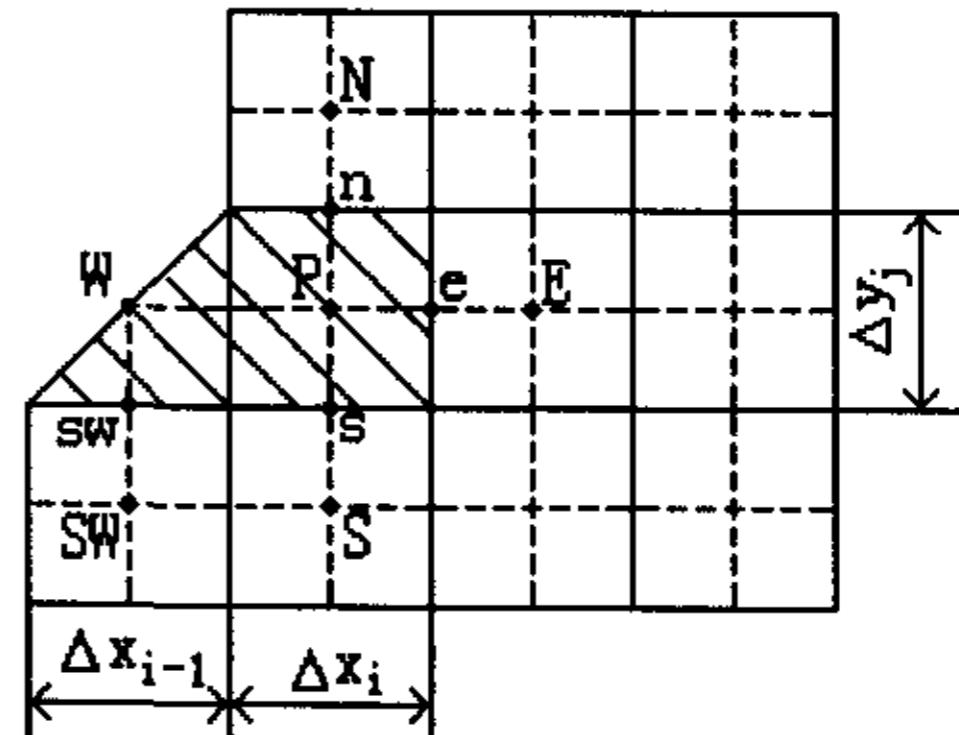


图 4.4.3 扩大的控制体积守恒法

$$(U_e \Delta y_j - U_w \Delta y_j) + (V_n \Delta x_i - V_s \Delta x_i) + V_w \Delta x_{i-1} - V_{sw} \Delta x_{i-1} = 0 \quad (4.4.19)$$

也就是：

$$\frac{U_e - U_w}{\Delta x_i} + \frac{V_n - V_s}{\Delta y_j} + \frac{V_w - V_{sw}}{\Delta x_i \Delta y_j} \Delta x_{i-1} = 0 \quad (4.4.20)$$

通过形如式(4.2.10)到(4.2.13)定义的预估速度有：

$$U_e = U_e^* - \alpha_e S_e \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_e \quad (4.4.21)$$

$$V_n = V_n^* - \alpha_n S_n \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_n \quad (4.4.22)$$

$$V_s = V_s^* - \alpha_s S_s \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_s \quad (4.4.23)$$

其中的压力梯度 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 可以通过中心差分法求出。然后就可以得到

如下的压力方程：

$$a^P P_p = a^E P_E + a^W P_W + a^N P_N + a^S P_S - (D^* + D_w^*) \quad (4.4.24)$$

其中：

$$a^E = \frac{\alpha_e S_e}{\Delta x_i (x_E - x_p)} \quad (4.4.25)$$

$$a^W = 0 \quad (4.4.26)$$

$$a^N = \frac{\alpha_n S_n}{\Delta y_j (y_N - y_p)} \quad (4.4.27)$$

$$a^S = \frac{\alpha_s S_s}{\Delta y_j (y_p - y_s)} \quad (4.4.28)$$

$$a^P = a^E + a^W + a^N + a^S \quad (4.4.29)$$

$$D^* = \frac{U_e^* - U_w}{\Delta x_i} + \frac{V_n^* - V_s}{\Delta y_j} \quad (4.4.30)$$

$$D_w^* = \frac{V_w - V_{sw}}{\Delta x_i \Delta y_j} \Delta x_{i-1} \quad (4.4.31)$$

点 ‘sw’ 的速度 V_{sw} 可以表示为：

$$V_{sw} = \frac{V_w + V_{sw}}{2} \quad (4.4.32)$$

通过式(4.4.24)和(4.4.26)可以知道，同样，使用扩大的控制体积法，在对角边界点处也不需要压力边界条件。

4.5 具体计算步骤与收敛判据

4.5.1 计算流程

在计算不可压流动问题过程中，质量守恒方程与动量守恒方程难以同时满足通常是计算收敛速度慢的主要原因。1972 年，Patankar 和 Spalding 提出 SIMPLE 方法用来解决在计算不可压流的速度场和压力场不匹配现象。SIMPLE 算法最主要的缺点是压力场收敛速度慢。因此，Patankar 又提出了 SIMPLE 算法的一种改进，即 SIMPLER 算法。SIMPLER 算法总体收敛性能较好，但是它的每一步计算更耗时。Van Doormaal 和 Raithby 提出的 SIMPLEC 算法比 SIMPLE 算法 和 SIMPLER 算法都要更好一些。Issa 等，提出的 PISO 算法对不可压流可以得到精确的结果，它对定常流和非定常流都有效，其收敛性也较 SIMPLE 算法好。

本文采用的算法与 PISO 算法相类似，从速度场中直接得到压力方程而不是压力校正方程，其具体的计算步骤如下：

1. 确定初始速度场和压力场；
2. 计算有限分析系数；
3. 根据上一时间步的压力场计算速度场；

4. 返回第二步，直到获得收敛的速度场；
5. 重新计算有限分析系数；
6. 计算预估速度；
7. 解压力方程得到压力场；
8. 显式的求出速度场；
9. 返回第五步，直到速度场和压力场都收敛；
10. 返回第二步开始计算下一时间步；

4.5.2 收敛判据

在以上的计算过程中，需要判断速度场和压力场是否收敛，在计算过程中引入 dp 、 du 、 dv 来判断是否收敛。当 dp 、 du 、 dv 中最大的值小于预先给定的值，如 1×10^{-3} 时，则认为这一个时间步的计算已经收敛。 dp 、 du 、 dv 分别定义为：

$$dp = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \left| \frac{(p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1})}{p_{i,j}^n} \right|}{n_{fluid}} \quad (4.5.1)$$

$$du = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \left| \frac{(u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1})}{u_{i,j}^n} \right|}{n_{fluid}} \quad (4.5.2)$$

$$dv = \frac{\sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \left| \frac{(v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1})}{v_{i,j}^n} \right|}{n_{fluid}} \quad (4.5.3)$$

以上三式中， n_{fluid} 表示流体区域网格点的个数。

4.6 小结

这一章，我们使用基于单元中心的非交错网格，选择在较小的控制体积上离散连续性方程，在较大的控制体积上离散动量方程，有效的消除了不正确的压力棋盘现象。介绍了两种确定单元表面速度的方法。通过适当处理压力条件后避免了在边界上确定压力边界条件的困难。同时介绍了两种保证复杂表面附近质量守恒的方法。最后说明了计算步骤以及计算收敛性判据。

第五章 计算实例

为了验证第四章提出的处理压力边界的方法的正确性，在这一章中，我们用对角笛卡尔网格法来计算空腔流动问题，并将计算结果与前人的结果作比较。为了验证对角笛卡尔网格法处理复杂边界的性能，将空腔旋转一个角度。一个斜置空腔的边界在笛卡尔网格下可以认为是一个复杂的几何边界。

5.1 计算平置的空腔内流动

这一节，我们先计算平置的空腔内流动问题以验证对角笛卡尔网格法处理规则边界的方法。图 5.1.1

显示了空腔内流动问题的计算区域。

在计算中，采用 60×60 的网格，边界采用无扩散、无滑移速度边界条件，时间步长取 0.25，雷诺数分别取 100、400、1000，计算致定常。

图 5.1.2—5.1.7 分别为雷诺数取 100、400、1000 时空腔中线上的速度分布。小方块所示为 U.GHIA 等在密度为 129×129 的多重网格上的计算结果，图 5.1.8—5.2.10 分别为计算所得流函数图。图 5.1.11—5.2.13 分别为计算所得压力分布图。从图 5.1.2—5.1.7 可以看出在雷诺数为 100 和 400 时，计算所得空腔中线上的速度和 U.Ghia 的结果相当吻合，在雷诺数等于 1000 时，只有极细微的差异。

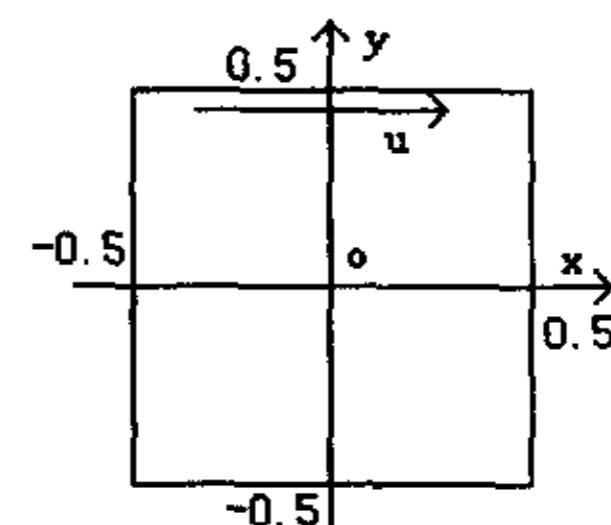


图 5.1.1 空腔流动计算区域

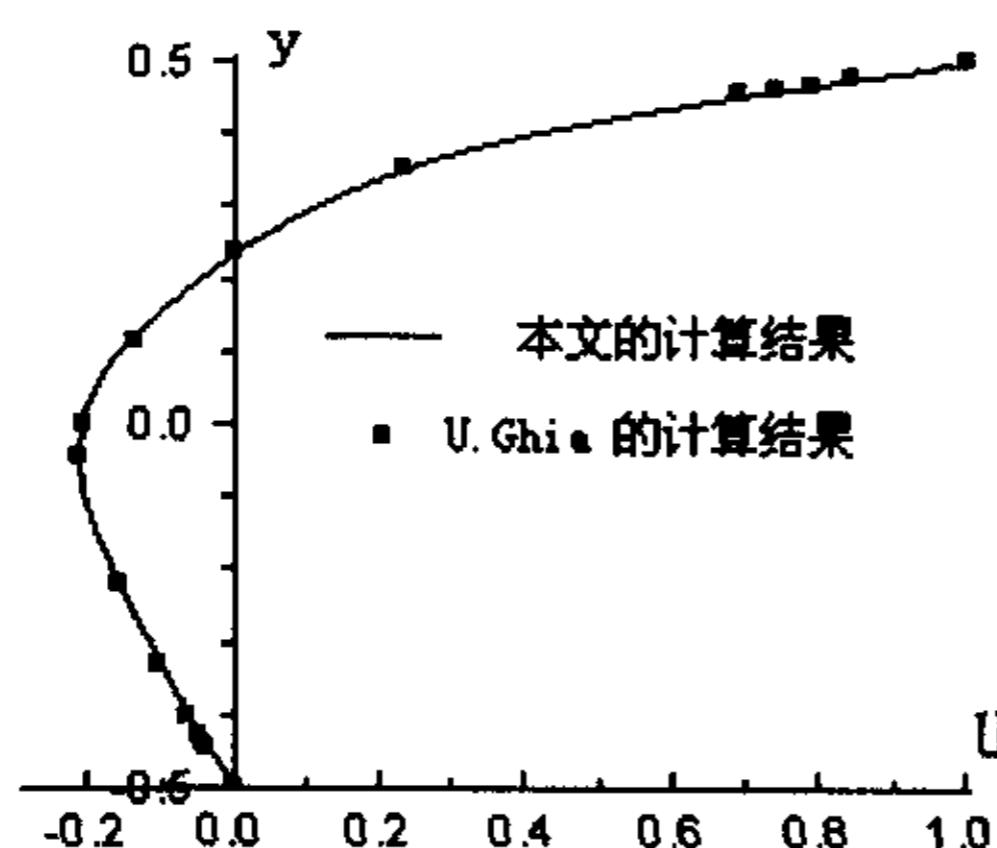


图 5.1.2 空腔纵向轴线上 x 方向速度 ($Re=100$)

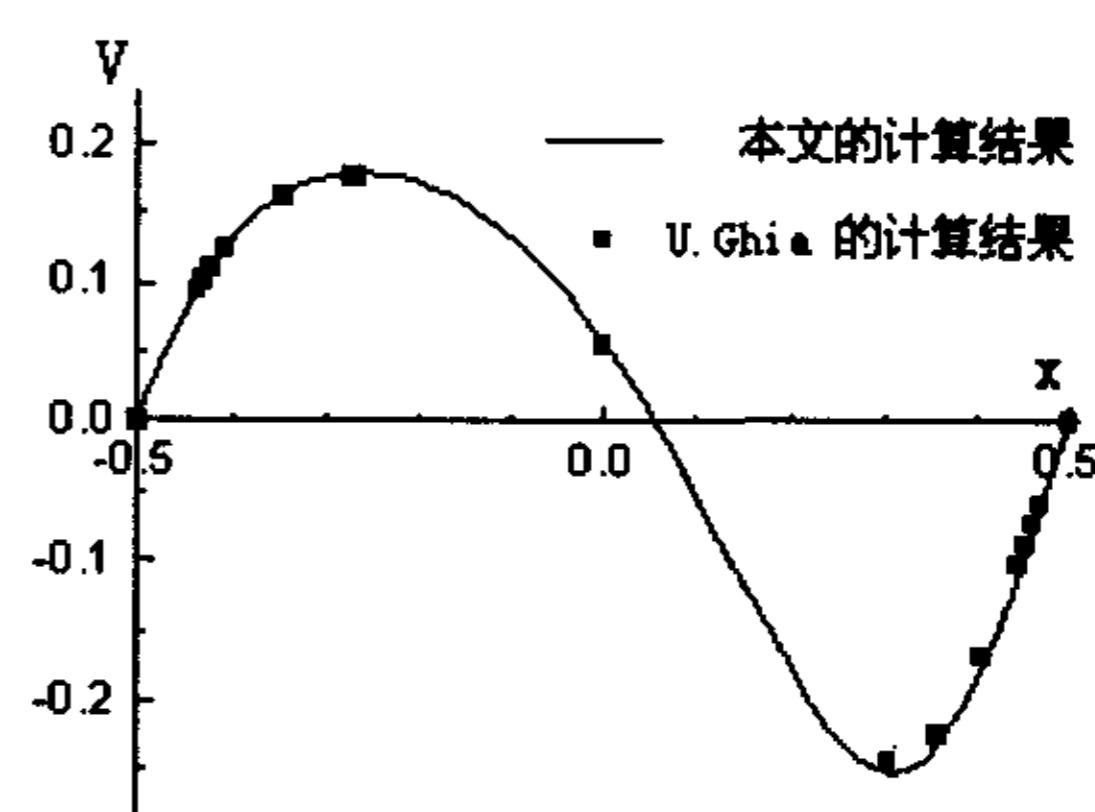


图 5.1.3 空腔横向轴线上 y 方向速度 ($Re=100$)

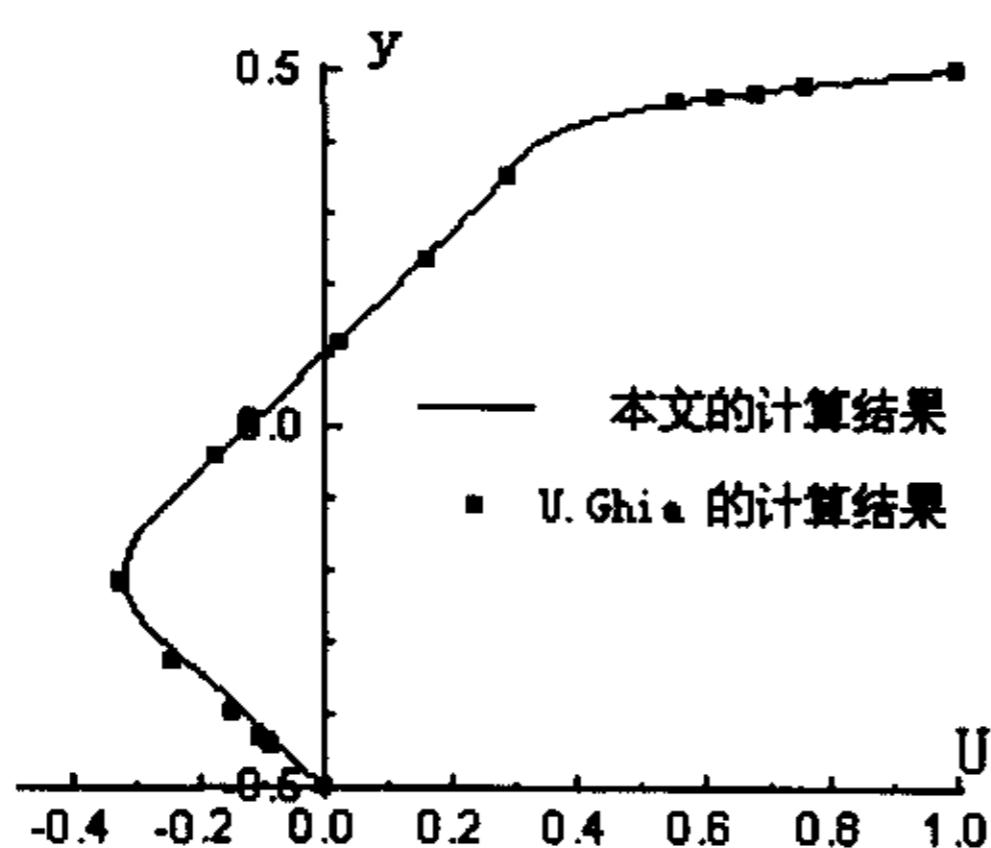


图 5.1.4 空腔纵向轴线上 x 方向速度 ($Re=400$)

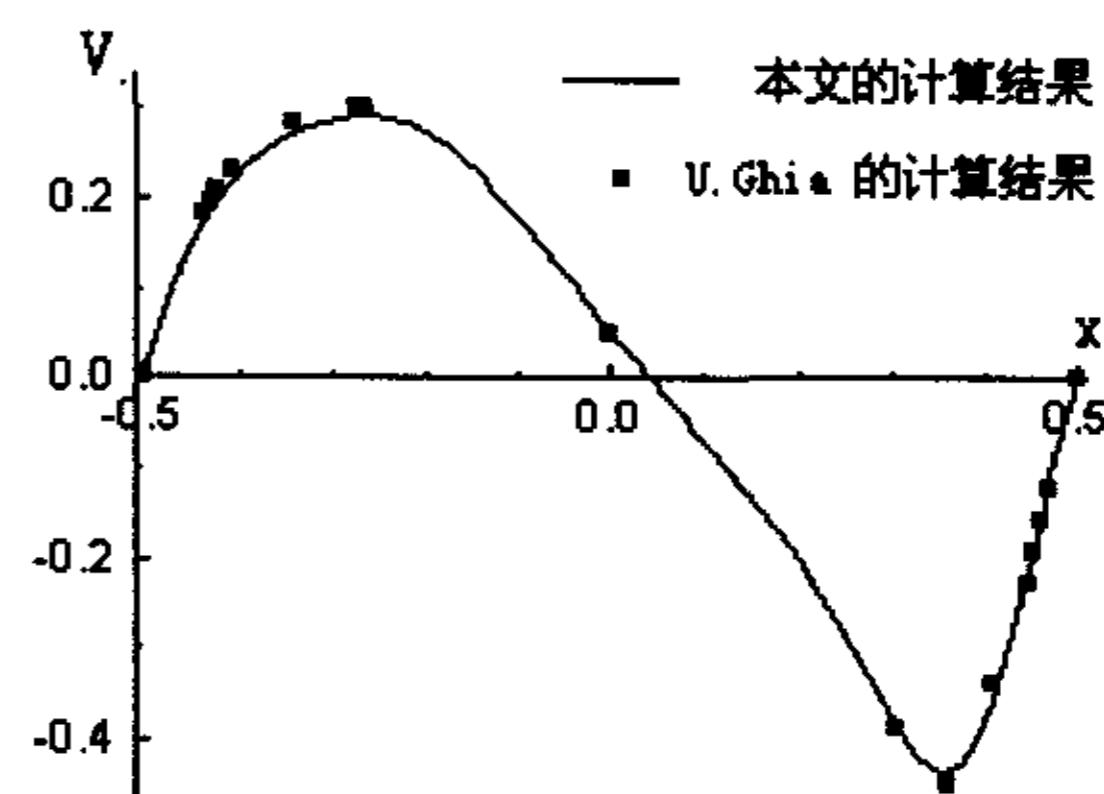


图 5.1.5 空腔横向轴线上 y 方向速度 ($Re=400$)

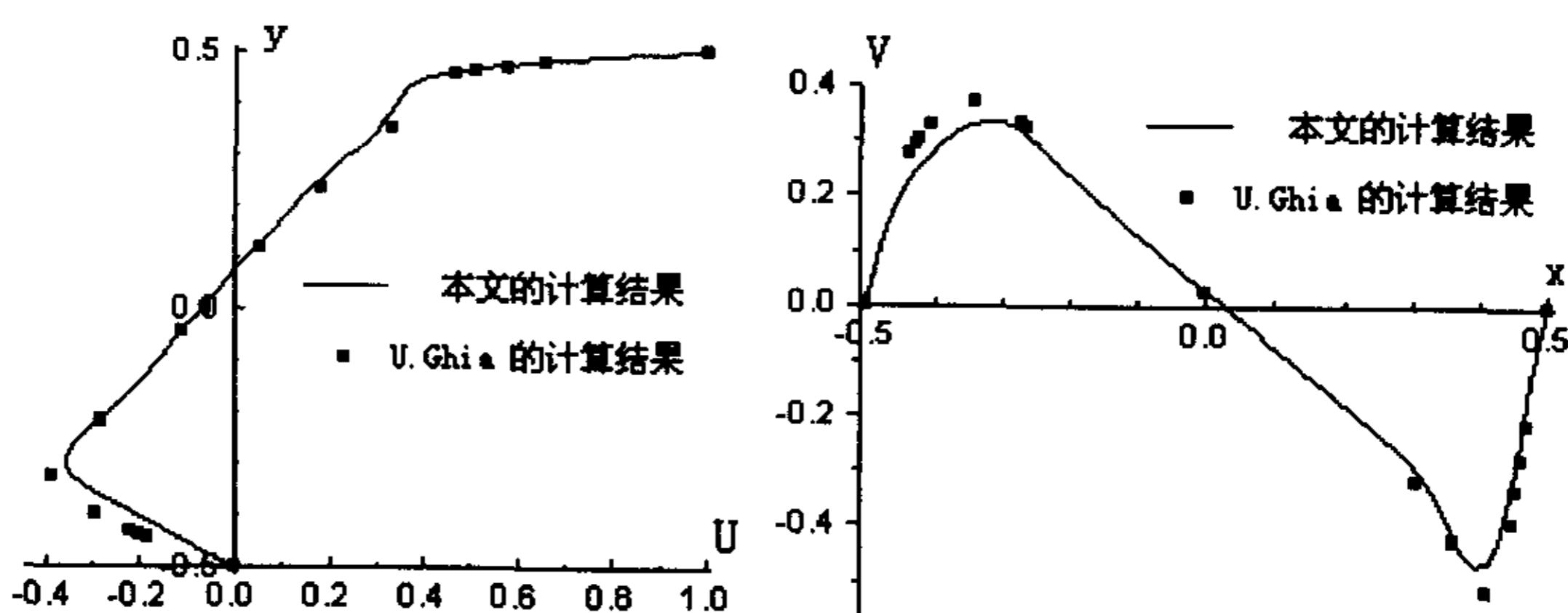


图 5.1.6 空腔纵向轴线上 x 方向速度 图 5.1.7 空腔横向轴线上 y 方向速度
($Re=1000$)

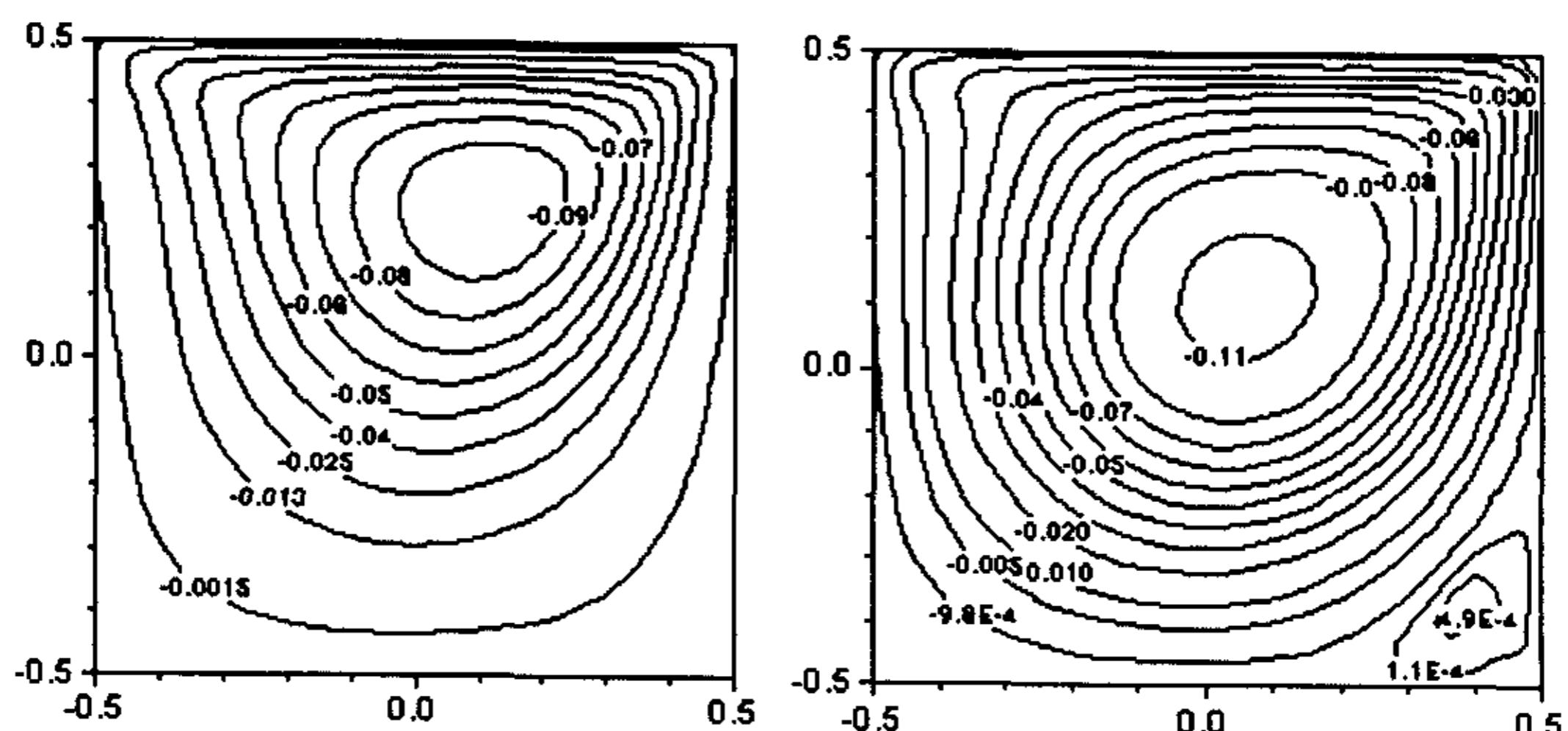


图 5.1.8 空腔内流动流函数图
($Re=100$)

图 5.1.9 空腔内流动流函数图
($Re=400$)

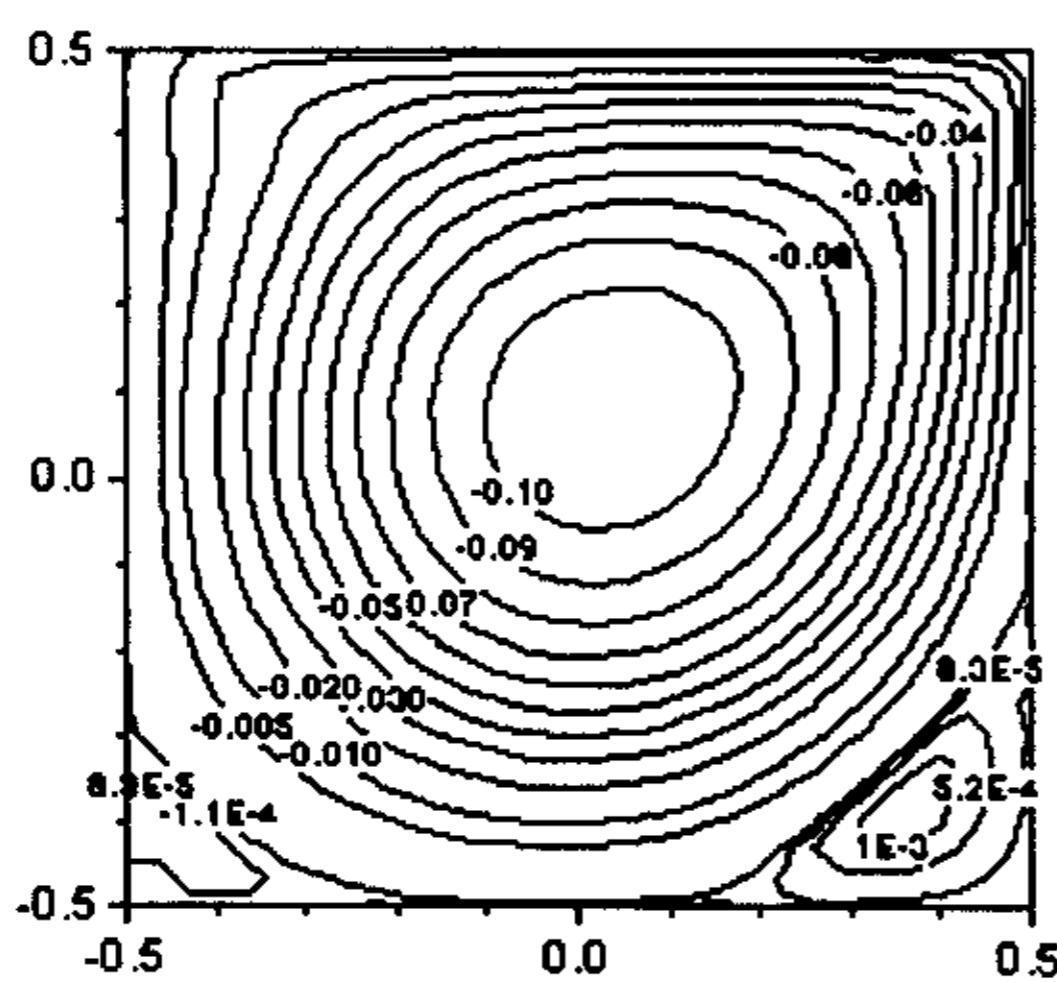


图 5.1.10 空腔内流动流函数图
($\text{Re}=1000$)

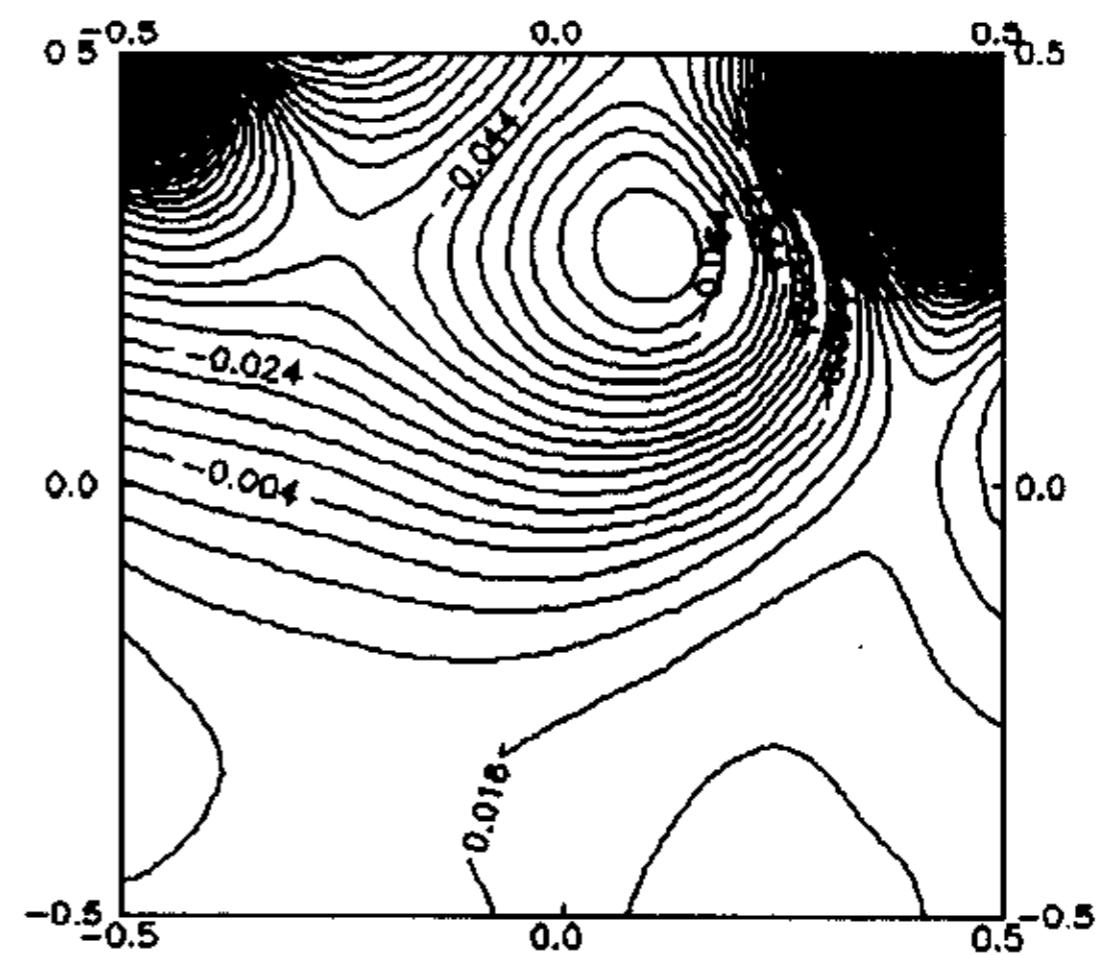


图 5.1.11 空腔内流动压力分布图
($\text{Re}=100$)

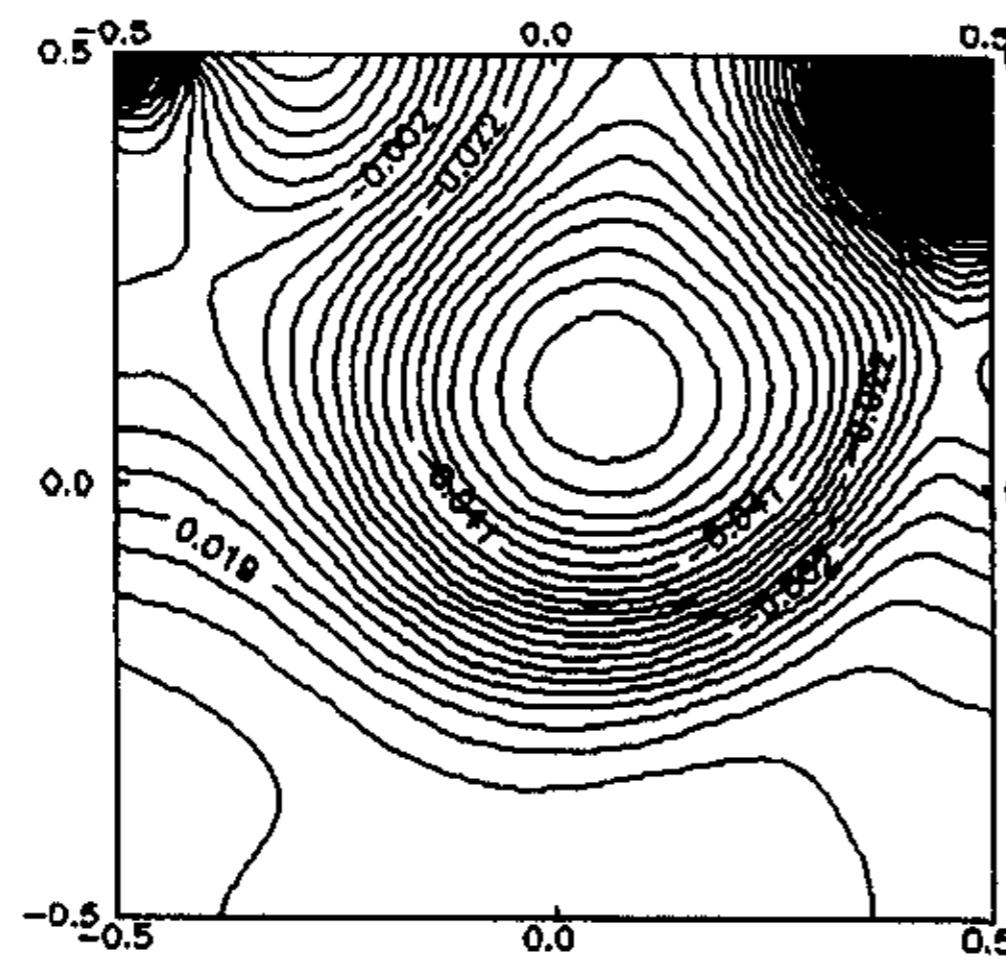


图 5.1.12 空腔内流动压力分布图
($\text{Re}=400$)

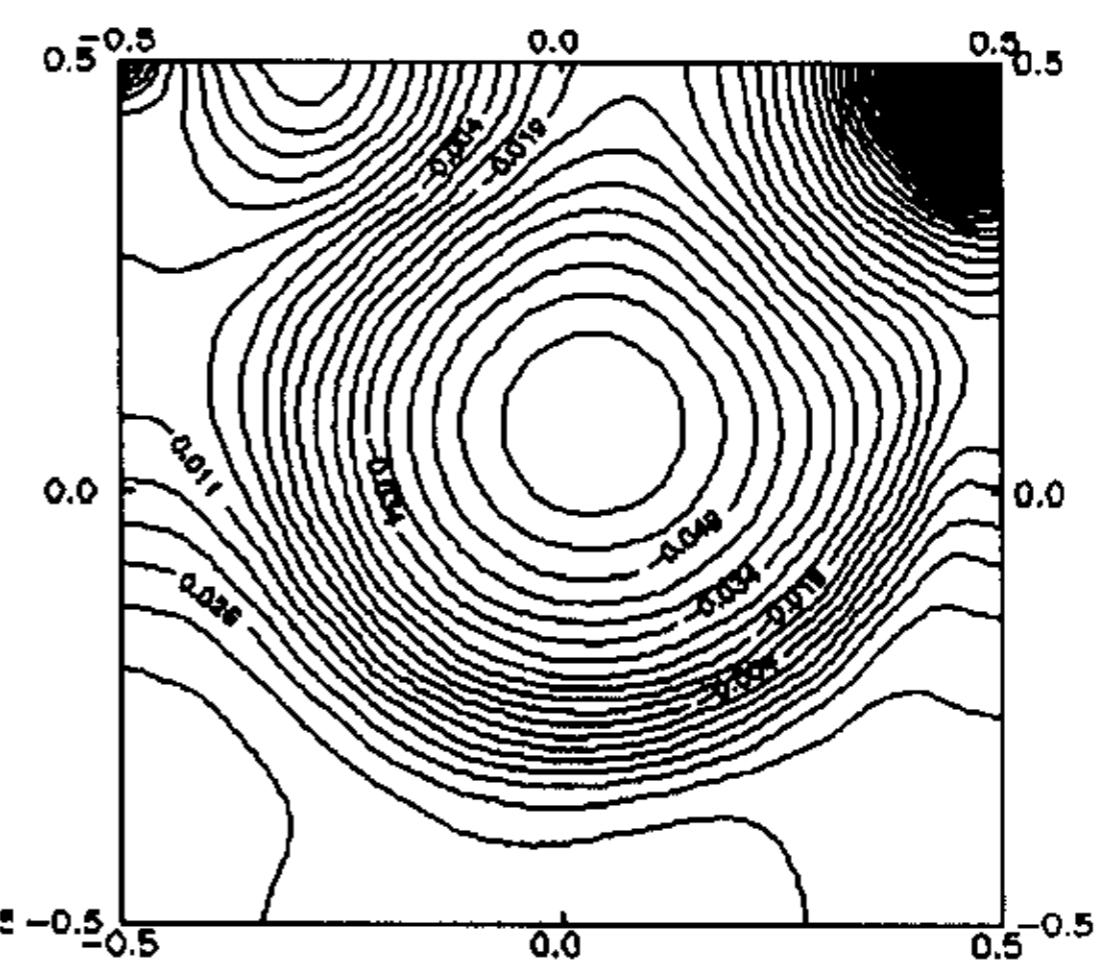


图 5.1.13 空腔内流动压力分布图
($\text{Re}=1000$)

5.2 计算斜置的空腔内流动

从上一节可以知道，对规则的边界，采用本文所叙的方法是合适的。如果把空腔旋转 30 度，制造一个复杂的几何边界，计算它内部流动问题就可以验证对角笛卡尔网格法处理不规则边界的方法。图 5.2.1 为斜置的空腔内流动问题的计算区域。采用 86×86 的网格，时间步长取 0.2、雷诺数分别取 100、400、1000，计算致定常。

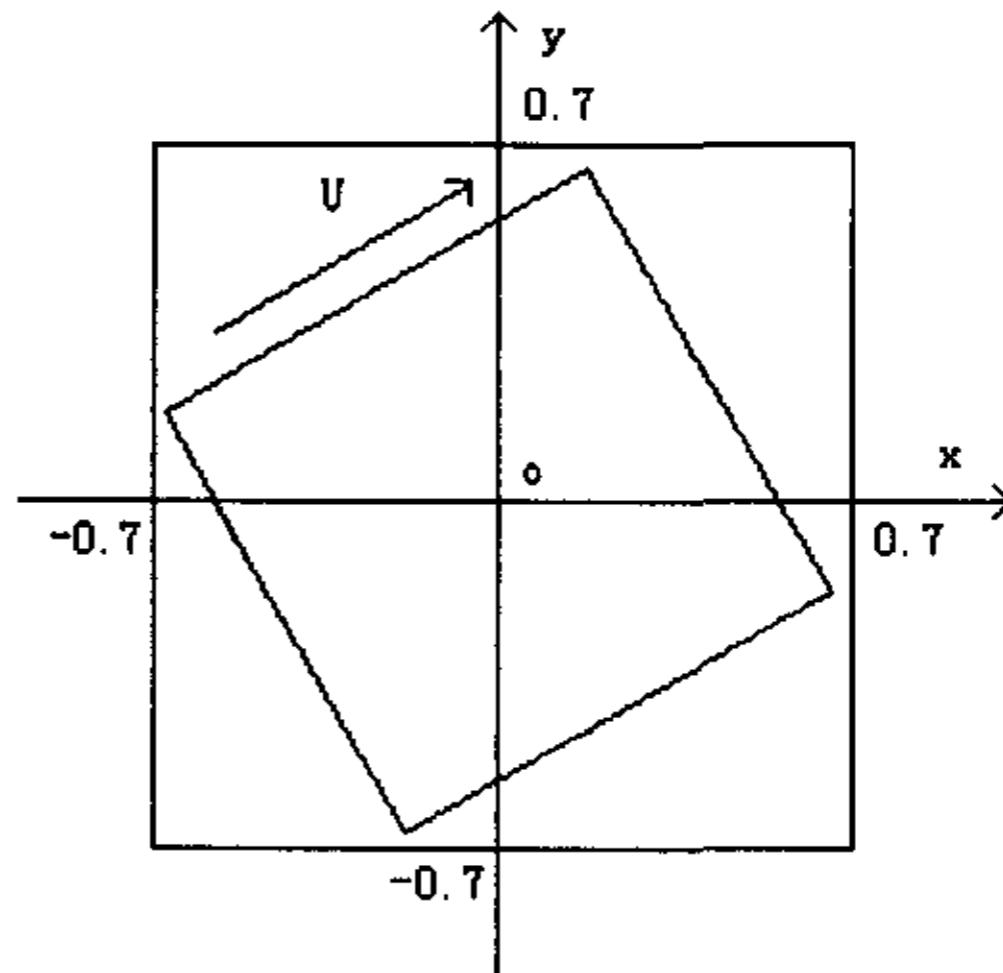


图 5.2.1 斜置的空腔内流动计算区域

图 5.2.2—5.2.7 分别为雷诺数取 100、400、1000 时斜置的空腔轴线上的速度分布。小方块所示为 U.GHIA 等在密度为 129×129 的多重网格上的计算结果。图 5.2.10—5.2.12 分别为计算所得流函数图。图 5.2.13—5.2.15 分别为计算所得压力图。

图 5.2.8—5.2.9 为雷诺数取 1000 时，在各种网格密度之下文献中采用锯齿笛卡尔网格法计算斜置的空腔所得轴线上的速度分布。从图 5.2.8—5.2.9 可以看出用锯齿笛卡尔网格法计算斜置的空腔内流动其结果与 U.GHIA 的计算结果存在较大差别。而从图 5.2.2—5.2.7 可以看出用对角笛卡尔网格法计算的结果与空腔平置时计算所得结果基本一致，与 U.GHIA 的计算结果也只有细微的差别。

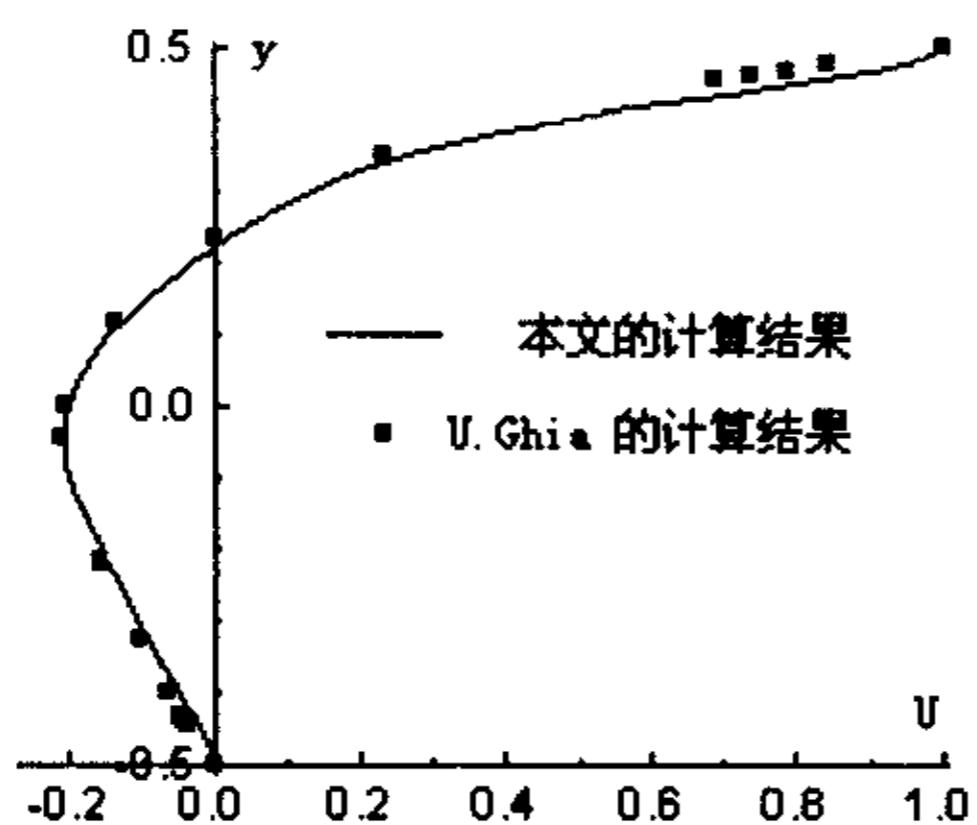


图 5.2.2 斜置的空腔纵向轴线上
x 方向速度 ($Re=100$)

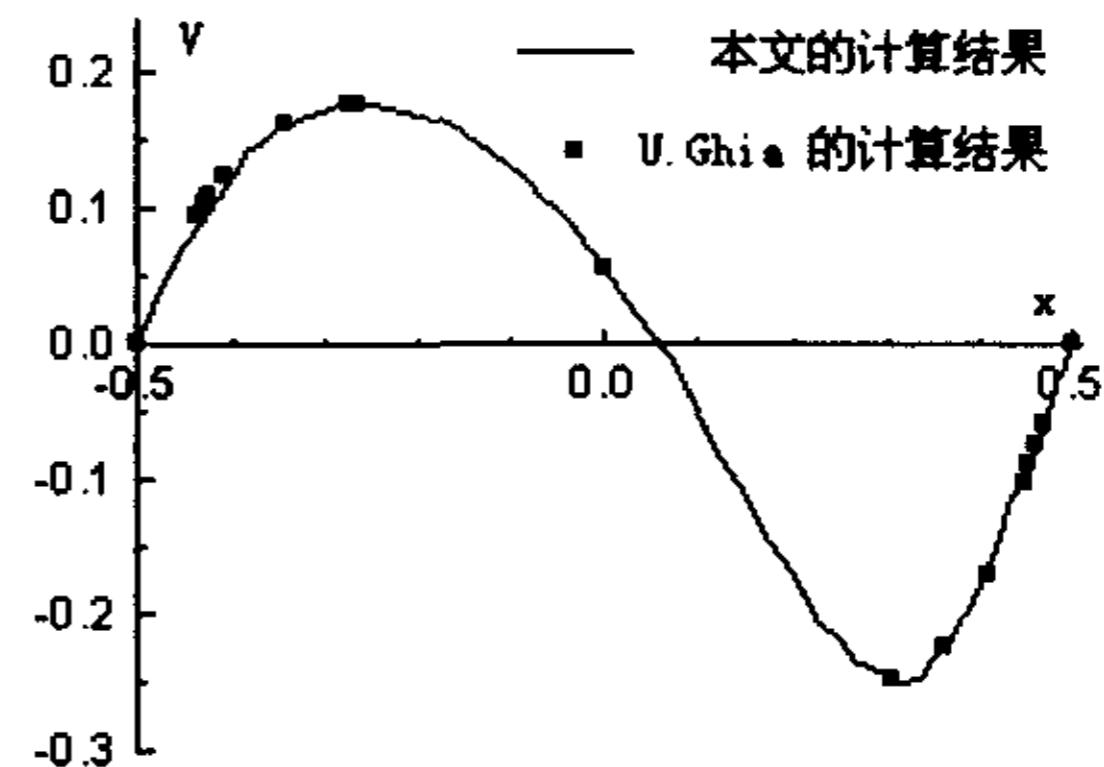


图 5.2.3 斜置的空腔横向轴线上
y 方向速度 ($Re=100$)

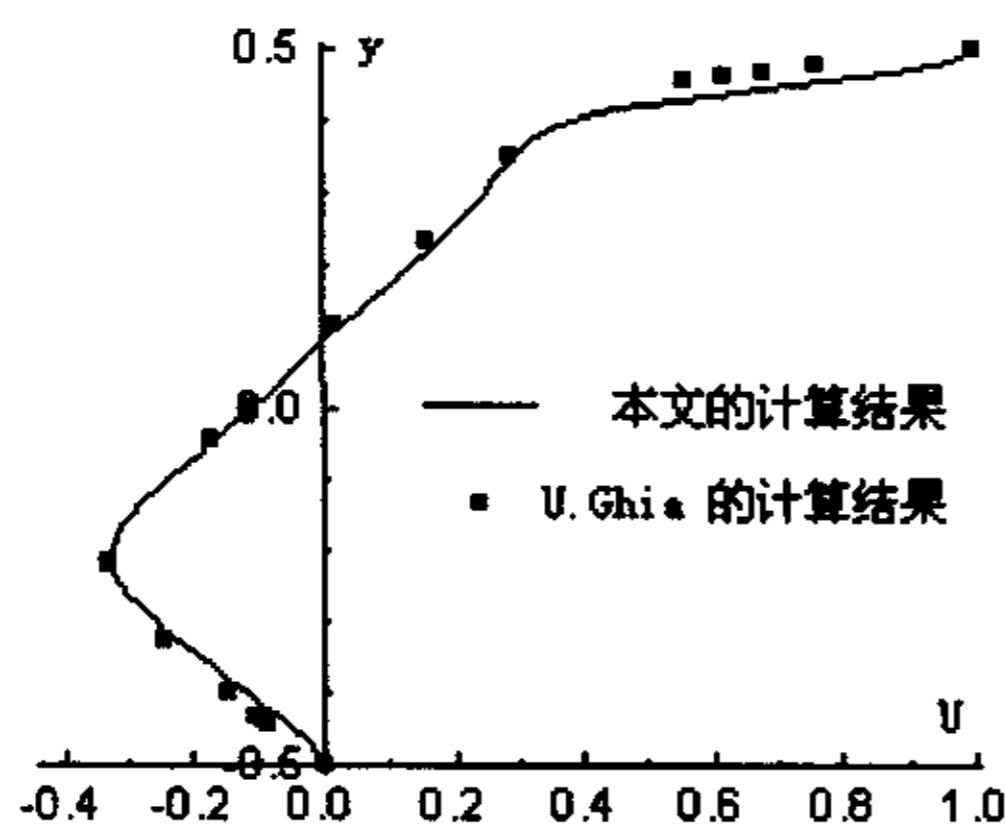


图 5.2.4 斜置的空腔纵向轴线上 x
方向速度 ($Re=400$)

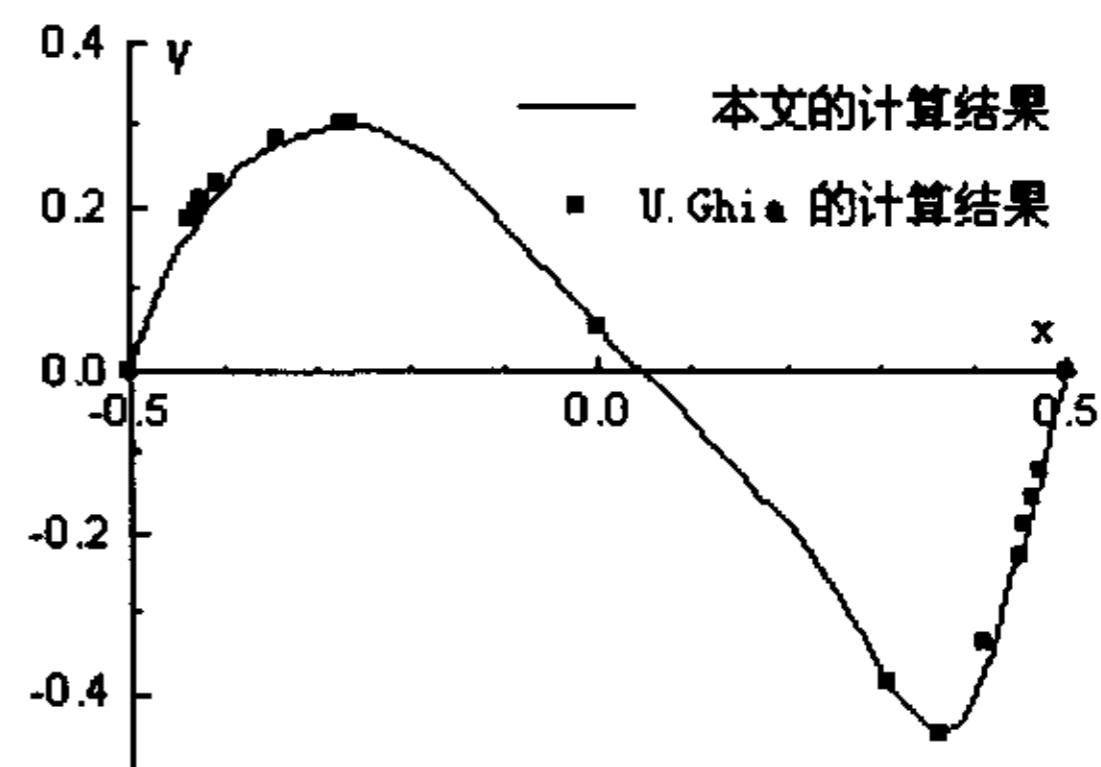


图 5.2.5 斜置的空腔横向轴线上 y
方向速度 ($Re=400$)

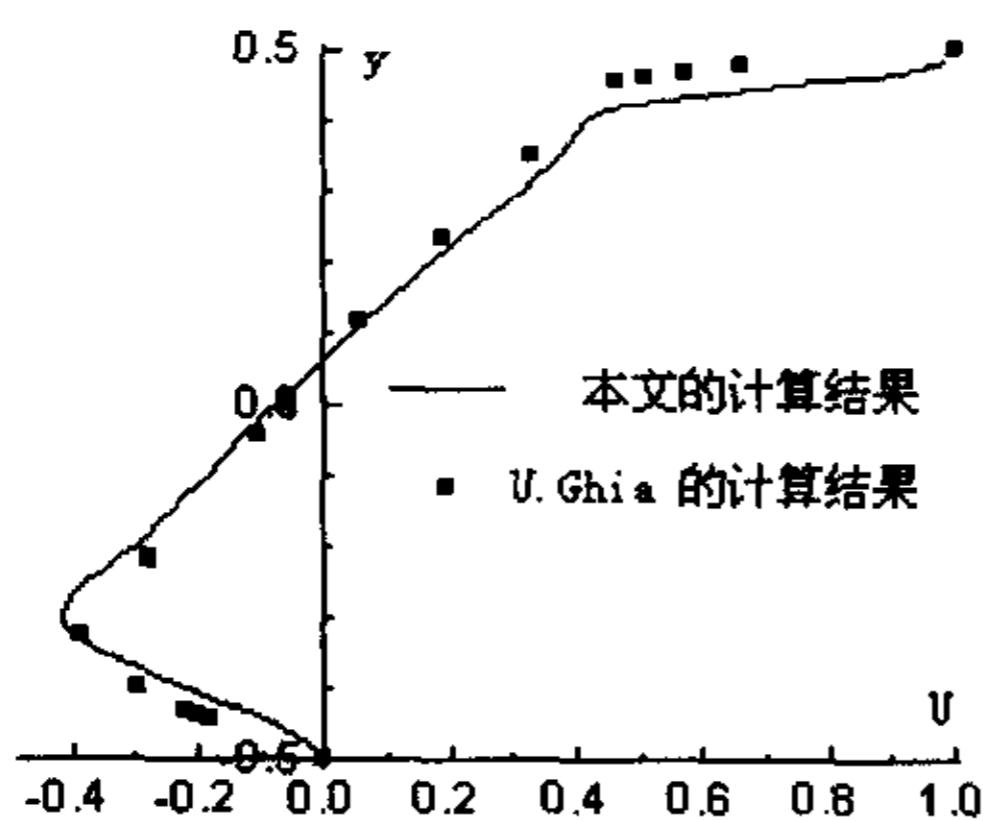


图 5.2.6 斜置的空腔纵向轴线上
x 方向速度 ($Re=1000$)

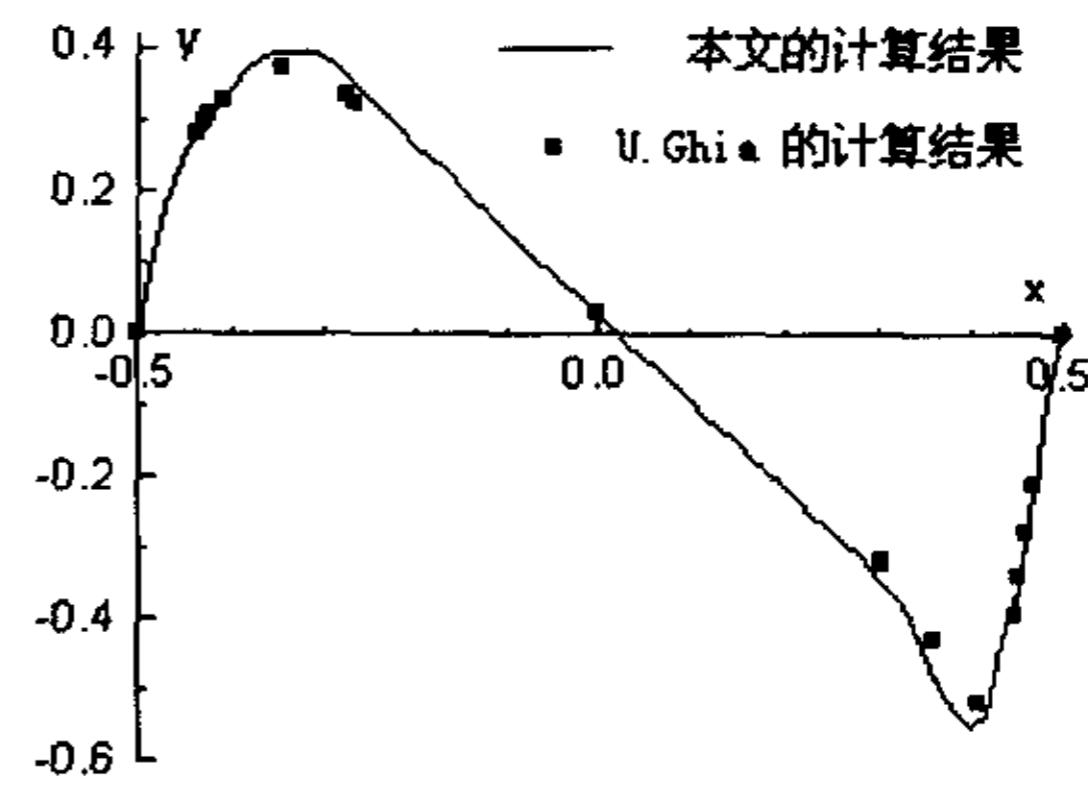


图 5.2.7 斜置的空腔横向轴线上
y 方向速度 ($Re=1000$)

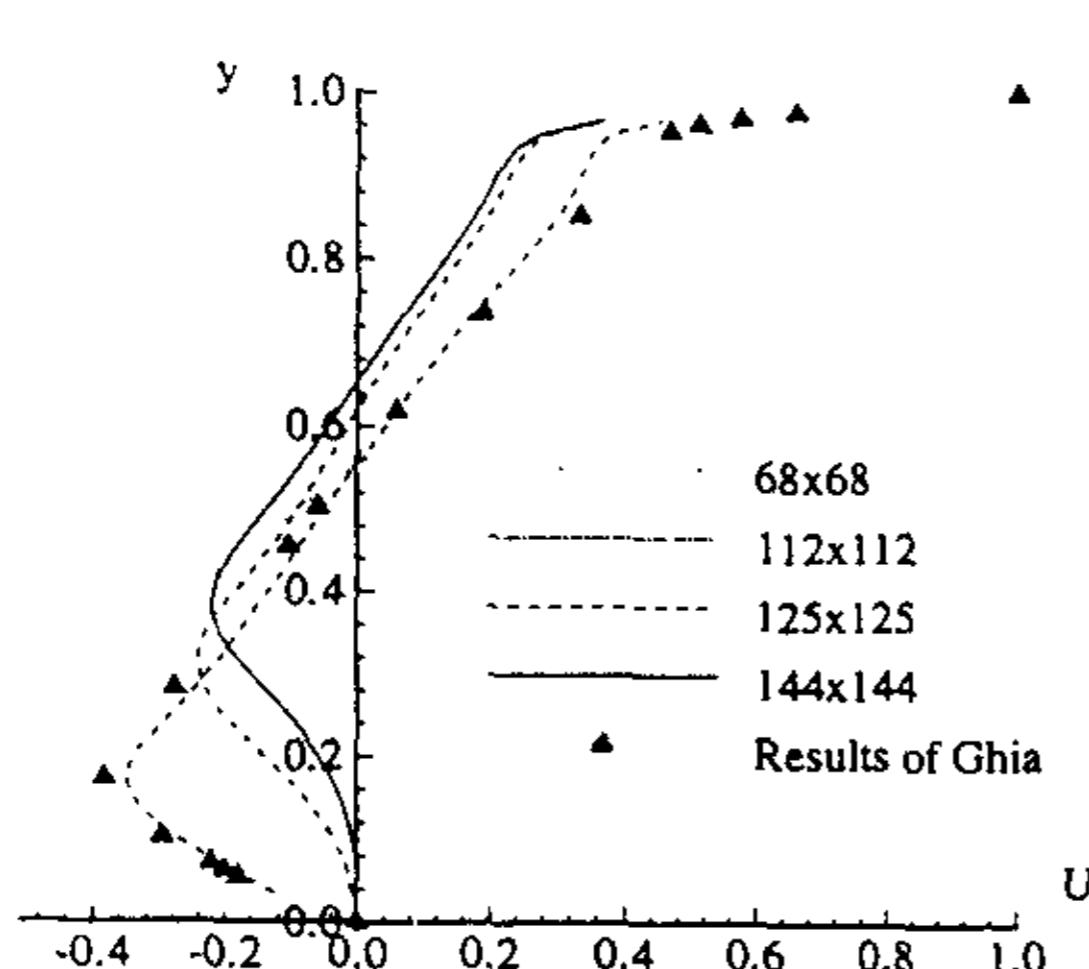


图 5.2.8 斜置的空腔纵向轴线上
x 方向速度 (锯齿法, $Re=1000$)

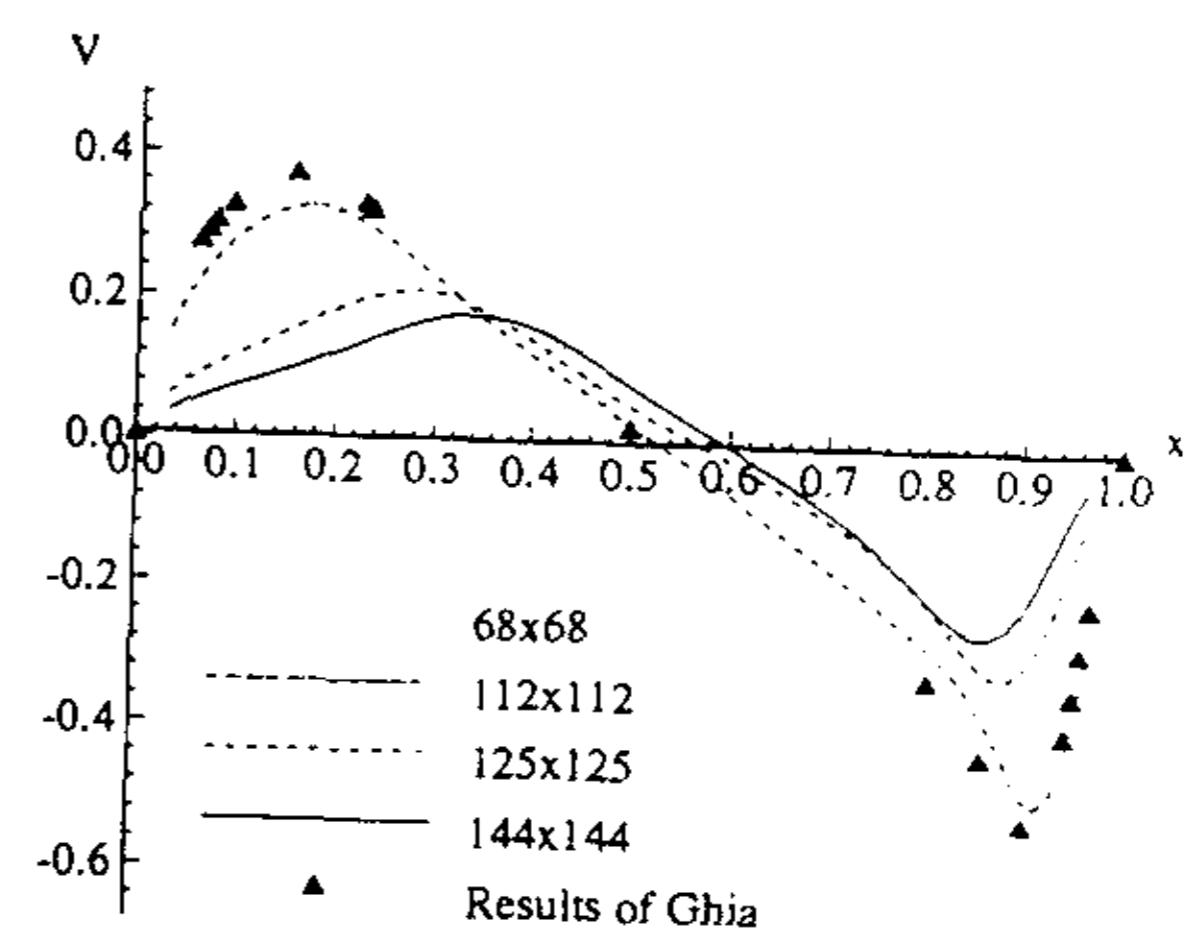


图 5.2.9 斜置的空腔横向轴线上
y 方向速度 (锯齿法, $Re=1000$)

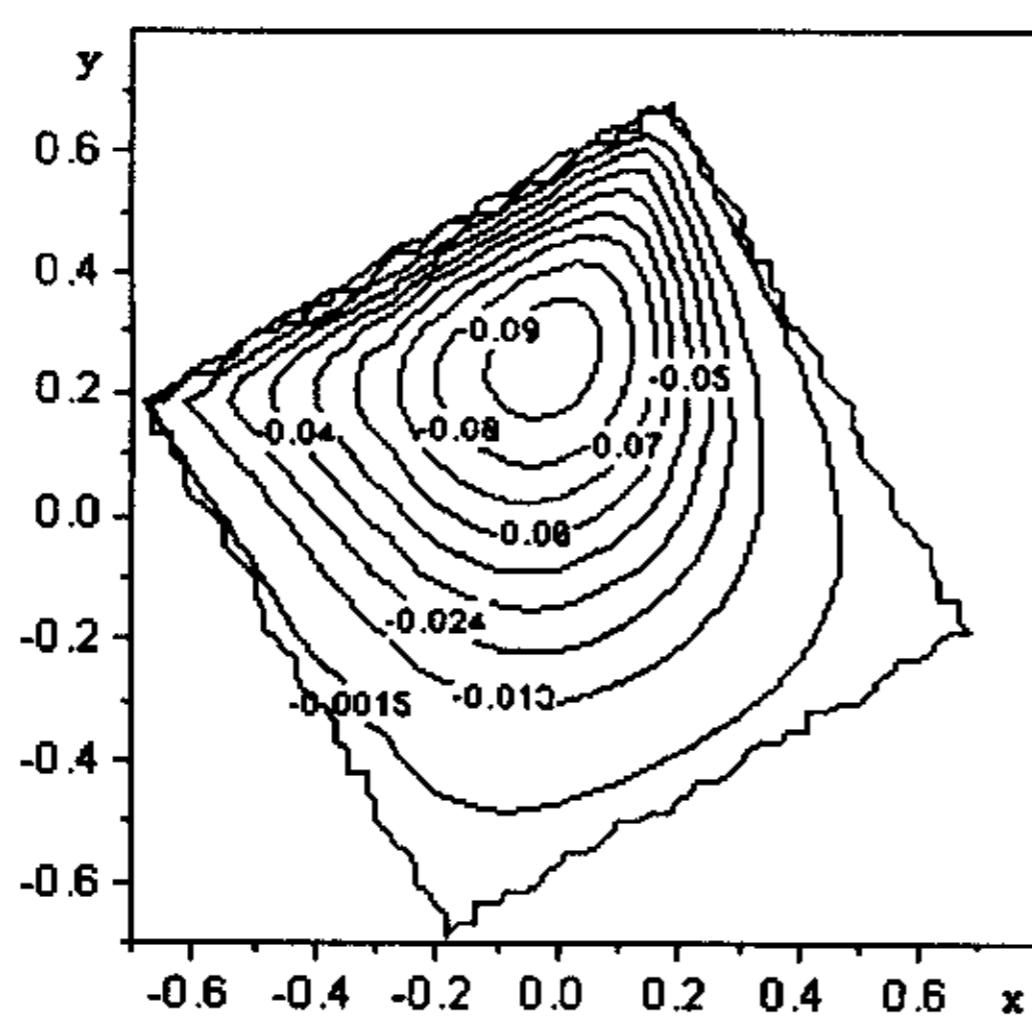


图 5.2.10 斜置的空腔内流动流
函数图($Re=100$)

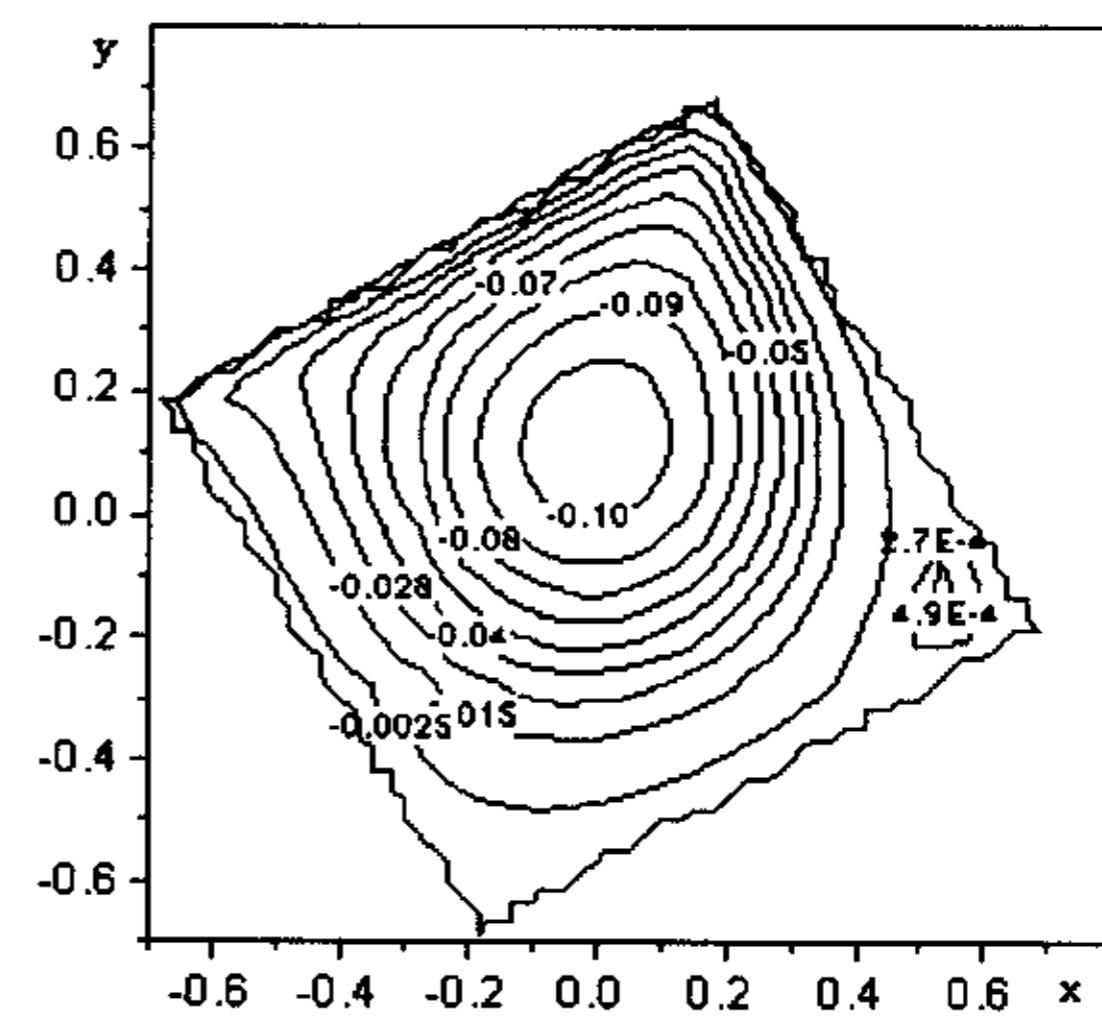


图 5.2.11 斜置的空腔内流动流
函数图($Re=400$)

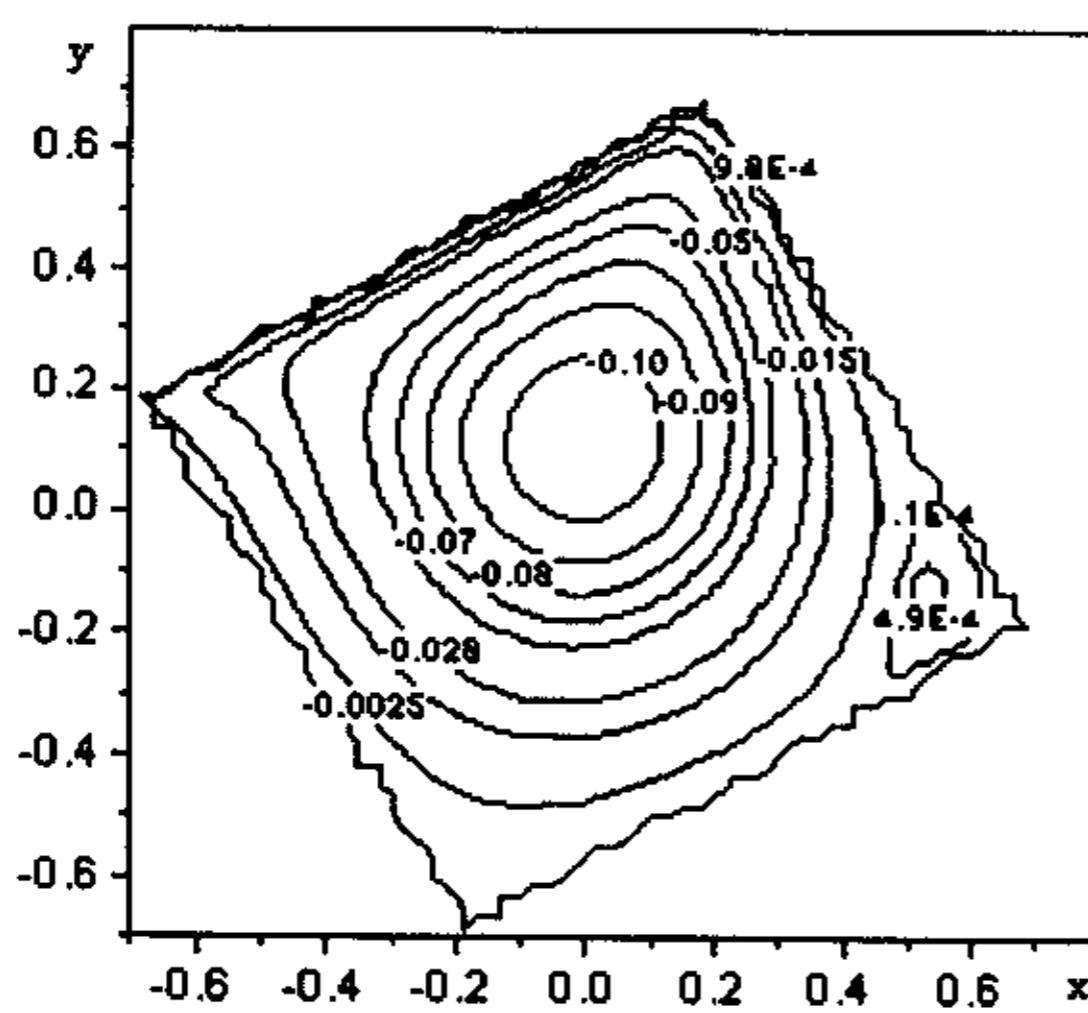


图 5.2.12 斜置的空腔内流动流函数
图($Re=1000$)

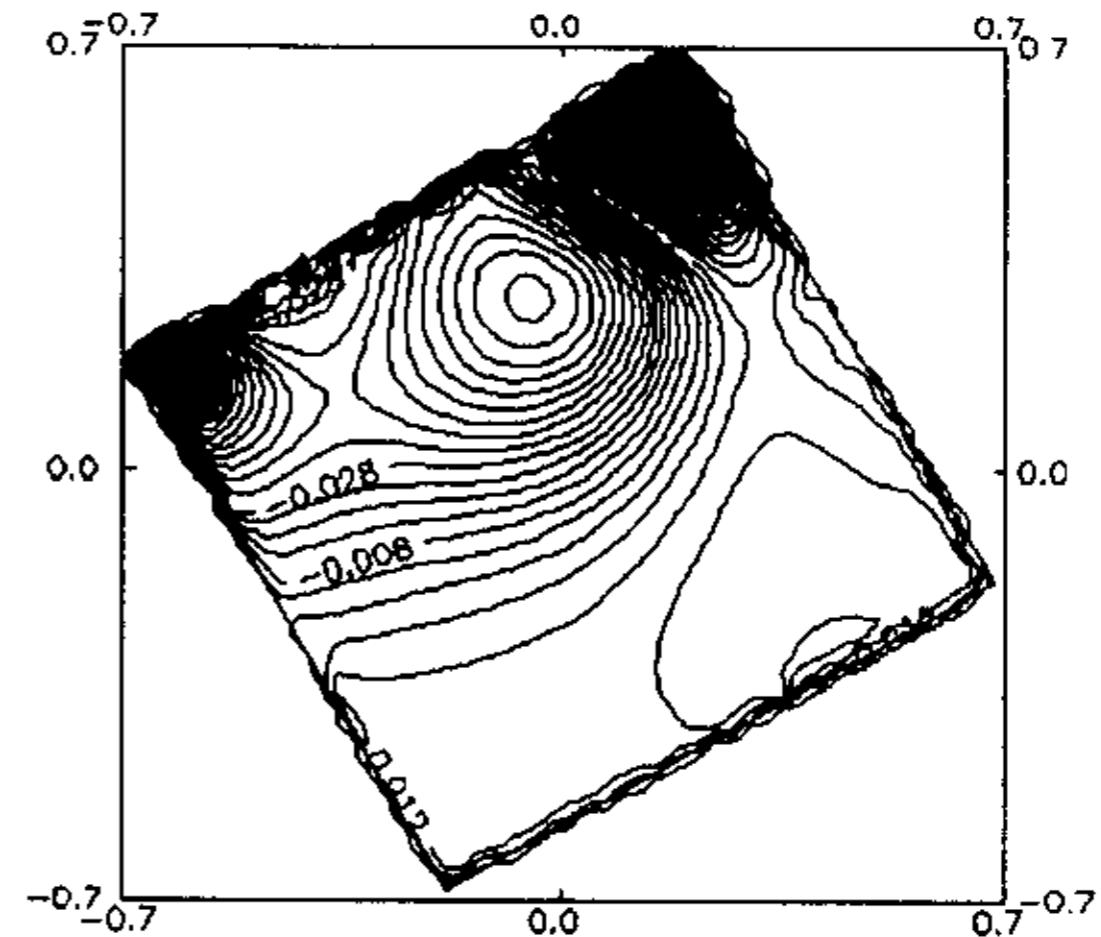


图 5.2.13 斜置的空腔内流动压力
分布图($Re=100$)

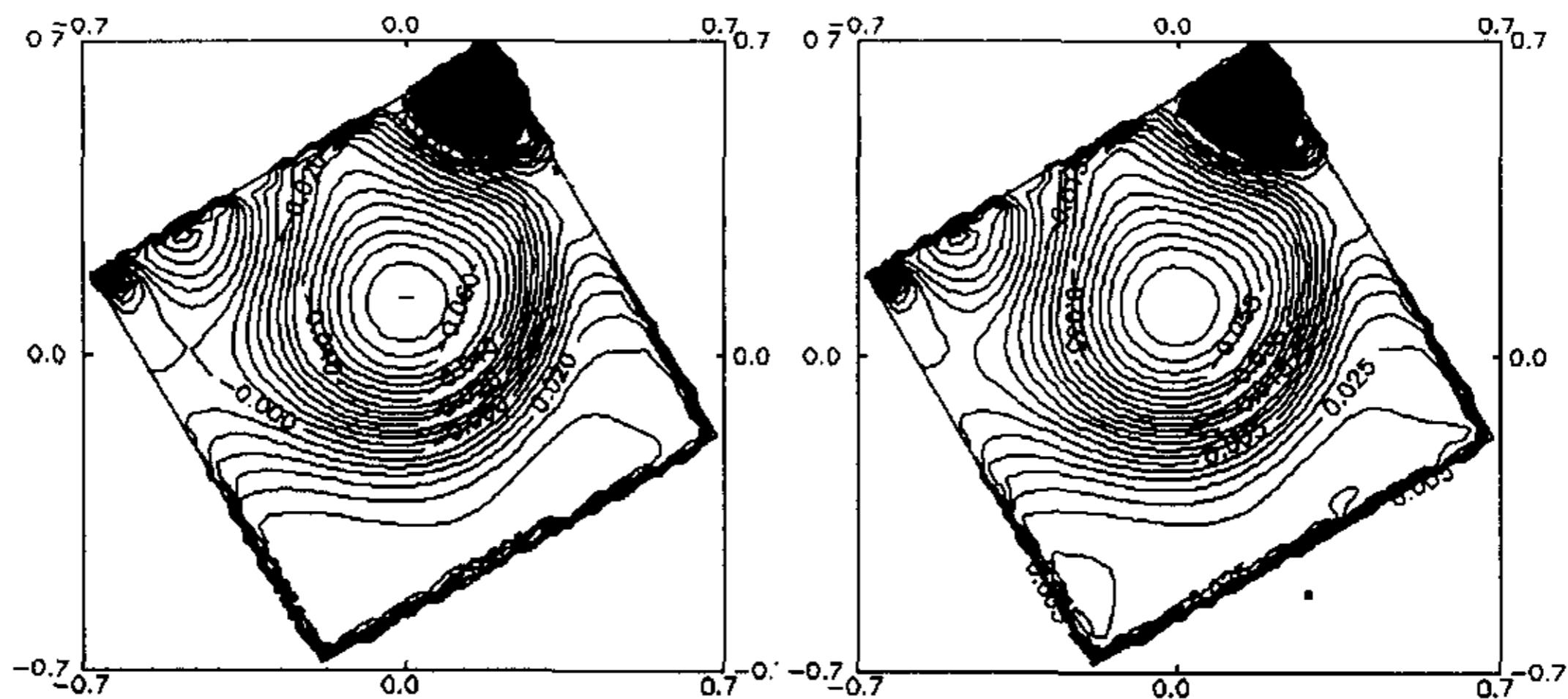


图 5.2.14 斜置的空腔内流动压力分布图($Re=400$)

图 5.2.15 斜置的空腔内流动压力分布图($Re=1000$)

5.3 小结

这一章，我们首先计算平置的空腔内流动问题，采用基于单元中心的非交错网格，使用第四章介绍的处理压力条件的方法，得出了很好得结果。为了验证对角笛卡尔网格法处理复杂边界的能力，我们把空腔旋转了 30 度，人为地制造不规则的边界。由于不考虑重力的影响，在理论情况下，二者的结果应该完全一致。把用对角笛卡尔网格法计算所得的结果与用锯齿笛卡尔网格法计算所得的结果相比较，可以看出，对角笛卡尔网格法比锯齿笛卡尔网格法更加适合处理包括复杂几何边界的问题。

第六章：结束语

6.1 本文所做工作小结

为复杂的几何边界自动生成网格是计算流体力学的难题之一，本文讨论了了解决这一难题的一种可行方法一对角笛卡尔网格法。可以验证，用对角笛卡尔网格法生成的模拟边界较用锯齿笛卡尔网格法生成的模拟边界的精度高。同时，在基于单元中心的非交错网格中采用有限分析法离散动量方程，将离散后的动量方程代入连续性方程所得到的压力方程在规则边界（边界为网格线）以及不规则边界处（边界为网格节点的对角线）都不需要压力边界条件，这就避免了确定压力边界条件的困难。最后计算空腔内的流动问题验证了对角笛卡尔网格法以及本文处理压力边界条件的正确性。

在研究使用对角笛卡尔网格法计算有复杂几何边界的不可压粘性流动的过程中编制了两个程序，第一个程序为复杂的几何边界自动生成模拟边界，同时计算模拟边界与原始边界的误差；第二个程序使用第一个程序生成的模拟边界计算不可压缩流动问题。第一个程序原则上可以为任意复杂边界自动生成模拟边界，第二个程序主要用来计算空腔内的流动问题，有一定的通用性，修改边界条件后，也可以用于计算其他问题。这两个程序都采用 Fortran90 的标准编制，在 Fortran PowerStation 4.0 下编译运行。

由于时间仓促，加之学识水平有限，作者虽作了很多的努力，仍

难免存在不妥乃至错误之处，恳请各位不吝赐教，多提宝贵意见。

6.2 对后续工作的建议

在流体力学中，处理复杂的几何边界是一个难题。单就对角笛卡尔网格法来说，本文所做工作也是远远不够的。作者认为可以从以下几个方面继续研究这种方法：

- 1 如何从 CAD 等绘图工具生成的文件中读取原始边界信息以避免手工输入原始边界的离散点。
- 2 计算机技术的飞速发展为计算流体力学的可视化提供了必要的保障，如何在生成模拟边界、生成计算网格以及流动计算中采用可视化技术。
- 3 在流动计算中加入湍流模型，扩大应用范围。
- 4 在其它的控制方程中使用对角笛卡尔网格法。
- 5 将对角笛卡尔网格法扩展至三维，使对角笛卡尔网格法可以模拟包括不规则几何边界的三维流动。

致谢

首先，我要对我的导师，戴有为教授，致以真挚的谢意。戴老师在学习上对我的悉心指导、在生活上对我无微不至的关怀、在精神上对我的鼓励与这篇论文的顺利完成是无法分开的。从戴老师身上，我学到了严谨的治学态度、开明的工作作风以及面对困难时乐观的精神。我相信，上研究生的这一段经历将使我终生受益。

感谢 803 教研室的全体老师，他们都很关心我的论文进展情况，并提出了不少很好的建议。此外，他们还为我提供了方便的使用计算机的便利。

感谢我在硕士班的几个同学，他们为我提供了力所能及的帮助。

我还要感谢动力学院所有曾经关心和帮助过我的老师。

最后，我还要感谢我的母亲和我的父亲，由于我一直在外地求学，给家庭带来了经济上的困难和压力。我的母亲和父亲含辛茹苦，省吃俭用尽其所能资助我完成学业。

参考文献

- [1] 陈景仁. 湍流模型与有限分析法. 上海交通大学出版社. 1995 年
- [2] 苏铭德. 计算流体动力学基础. 清华大学出版社. 1997 年
- [3] 尤国钊. 计算流体力学. 南京理工大学. 1997 年
- [4] 陶文铨. 数值传热学. 西安交通大学出版社. 1988 年
- [5] 顾尔祚. 流体力学的有限差分法基础. 上海交通大学出版社. 1988 年
- [6] 马铁犹. 计算流体动力学. 北京航空学院出版社. 1986 年
- [7] 刘导治. 计算流体力学基础, 北京航空航天大学出版社. 1989 年
- [8] 程心一. 计算流体动力学—偏微分方程的数值解法. 科学出版社. 1984 年
- [9] 李德元等. 二维非定常流体力学数值方法. 科学出版社. 1987 年
- [10] C. J. Chen and H. C. Chen. Development of Finite Analytic Numerical Method for Unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes Equation. *Journal of Computational Physics.* 53:2:209-226. 1984
- [11] H. Aksoy and C. J. Chen. Numerical Solution of Navier-Stokes Equations with Non-staggered Grids Using Finite Analytic Method . *Numerical Heat Transfer . Part B .* 21:287:306. 1992
- [12] R. I. Issa. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting . *Journal of Computational Physics.* 62:40-65. 1986
- [13] R. I. Issa, A. D. Gosman and A. P. Watkins. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-Iterative Implicit Scheme. *Journal of Computational Physics.* 62:66-82. 1986
- [14] W. L. Lin. Diagonal Cartesian Method for modeling of Incompressible

Flows over Complex Boundaries . Doctor's thesis in Florida State University. 1997

- [15] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stocks Equations and a Multigrid Method. Journal of Computational Physics. 48:387-411. 1982

附录 A：九点有限分析系数计算公式

$$C_{NE} = Ee^{-Ah-Bk} \quad (\text{A.1})$$

$$C_{NW} = Ee^{Ah-Bk} \quad (\text{A.2})$$

$$C_{SE} = Ee^{-Ah+Bk} \quad (\text{A.3})$$

$$C_{SW} = Ee^{Ah+Bk} \quad (\text{A.4})$$

$$C_{EC} = EBe^{-Ah} \quad (\text{A.5})$$

$$C_{WC} = EBe^{Ah} \quad (\text{A.6})$$

$$C_{SC} = EAe^{Bk} \quad (\text{A.7})$$

$$C_{NC} = EAe^{-Bk} \quad (\text{A.8})$$

$$C_P = \frac{Ah}{2(A^2 + B^2)} [C_{NW} + C_{WC} + C_{SW} - C_{NE} - C_{EC} - C_{SE}] + \frac{Bk}{2(A^2 + B^2)} [C_{SW} + C_{SC} + C_{SE} - C_{NE} - C_{NC} - C_{NE}] \quad (\text{A.9})$$

$$E = \frac{1}{4ch(Ah) \cdot ch(Bk)} - AhE_2 cth(Ah) - BkE'_2 cth(Bk) \quad (\text{A.10})$$

$$EA = 2AhE_2 \frac{ch^2(Ah)}{sh(Ah)} \quad (\text{A.11})$$

$$EB = 2BkE'_2 \frac{ch^2(Bk)}{sh(Bk)} \quad (\text{A.12})$$

$$E_2 = \frac{K^2}{h^2} E'_2 + \frac{Bh \cdot th(Ah) - Ak \cdot th(Bk)}{4h^2 AB \cdot ch(Ah) \cdot ch(Bk)} \quad (\text{A.13})$$

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} -(-1)^m (\lambda'_m k) / [(Bk)^2 + (\lambda'_m k)^2]^2 \cdot ch(\mu'_m h) \quad (\text{A.14})$$

$$\mu'_m = \sqrt{(A^2 + B^2 + \lambda'_m)^2} \quad \lambda'_m = (2m-1)\pi/2k \quad (\text{A.15})$$

附录 B：五点有限分析系数计算公式

$$C_{EC} = e^{-A'h' - B'h'} E \quad (B.1)$$

$$C_{NC} = e^{A'h' - B'h'} E \quad (B.2)$$

$$C_{SC} = e^{-A'h' + B'h'} E \quad (B.3)$$

$$C_{WC} = e^{A'h' + B'h'} E \quad (B.4)$$

$$\begin{aligned} C_p = & -\frac{h'}{2(A'^2 + B'^2)} [C_{EC}(A' + B') + C_{NC}(-A' + B')] \\ & + C_{SC}(A' - B') + C_{WC}(-A' - B')] \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$E = \frac{1}{4ch(A'h') \cdot ch(B'h')} \quad (B.6)$$

$$A' = \frac{A - B}{\sqrt{2}}, \quad B' = \frac{A + B}{\sqrt{2}}, \quad h' = \frac{\sqrt{2}}{2} h \quad (B.7)$$