





Y1878009

### 北京化工大学学位论文原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文， 是本人在导师的指导下， 独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体， 均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名: 张娟 日期: 2011.5.31

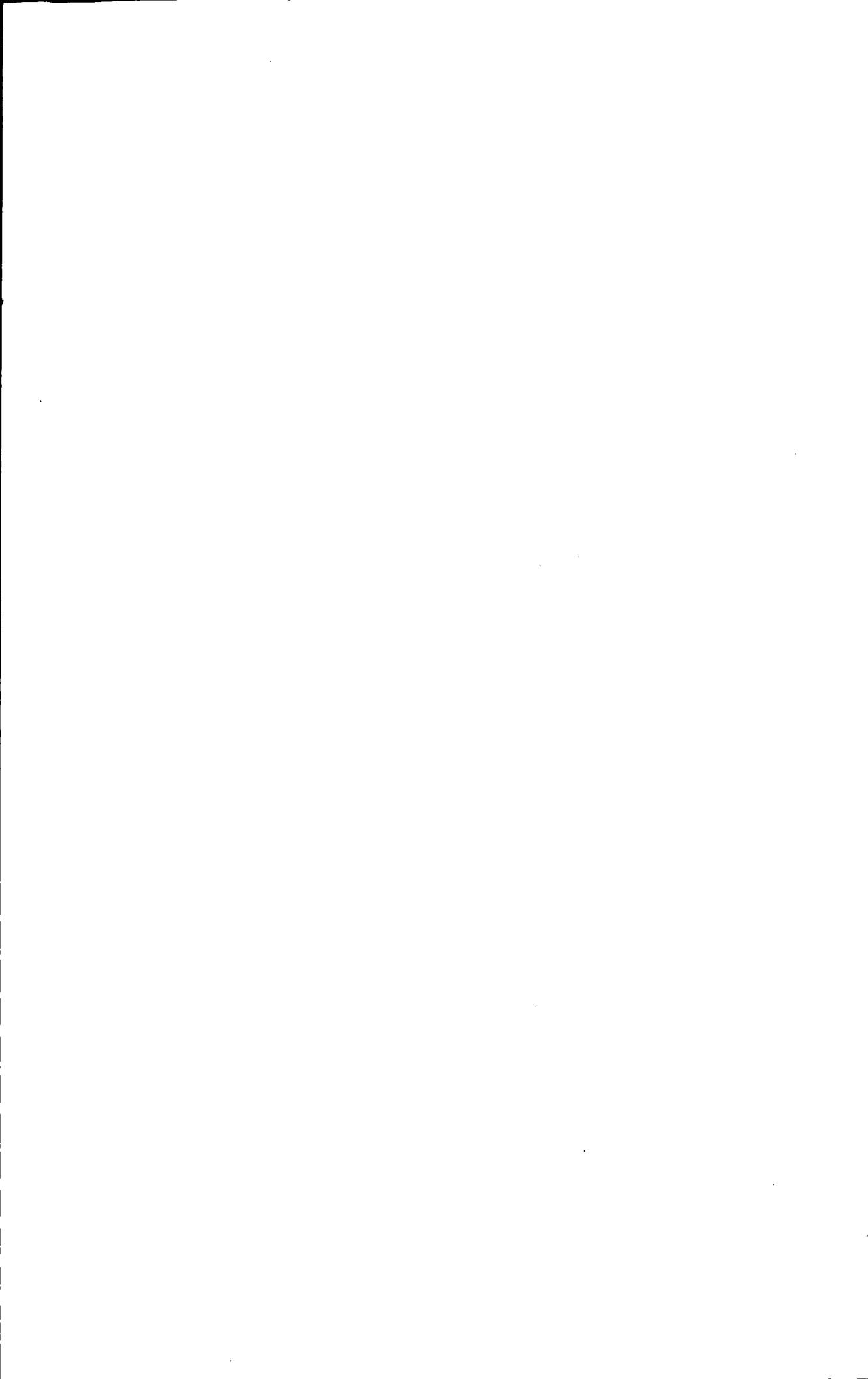
### 关于论文使用授权的说明

学位论文作者完全了解北京化工大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属北京化工大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。

保密论文注释：本学位论文属于保密范围，在2年解密后适用本授权书。非保密论文注释：本学位论文不属于保密范围，适用本授权书。

作者签名: 张娟 日期: 2011.5.31

导师签名: 张娟 日期: 2011.5.31



# 学位论文数据集

中图分类号	0157	学科分类号	110.3115
论文编号	1001020110951	密 级	非保密
学位授予单位代码	10010	学位授予单位名称	北京化工大学
作者姓名	张娟	学 号	2008000951
获学位专业名称	基础数学	获学位专业代码	070104
课题来源	国家自然科学基金项目	研究方向	超平面构形
论文题目	关于平面直线构形的 $\phi_3$ 不变量		
关 键 词	直线构形; OS 代数; $\phi_3$ 不变量		
论文答辩日期	2011.5.29	* 论文类型	基础研究

## 学位论文评阅及答辩委员会情况

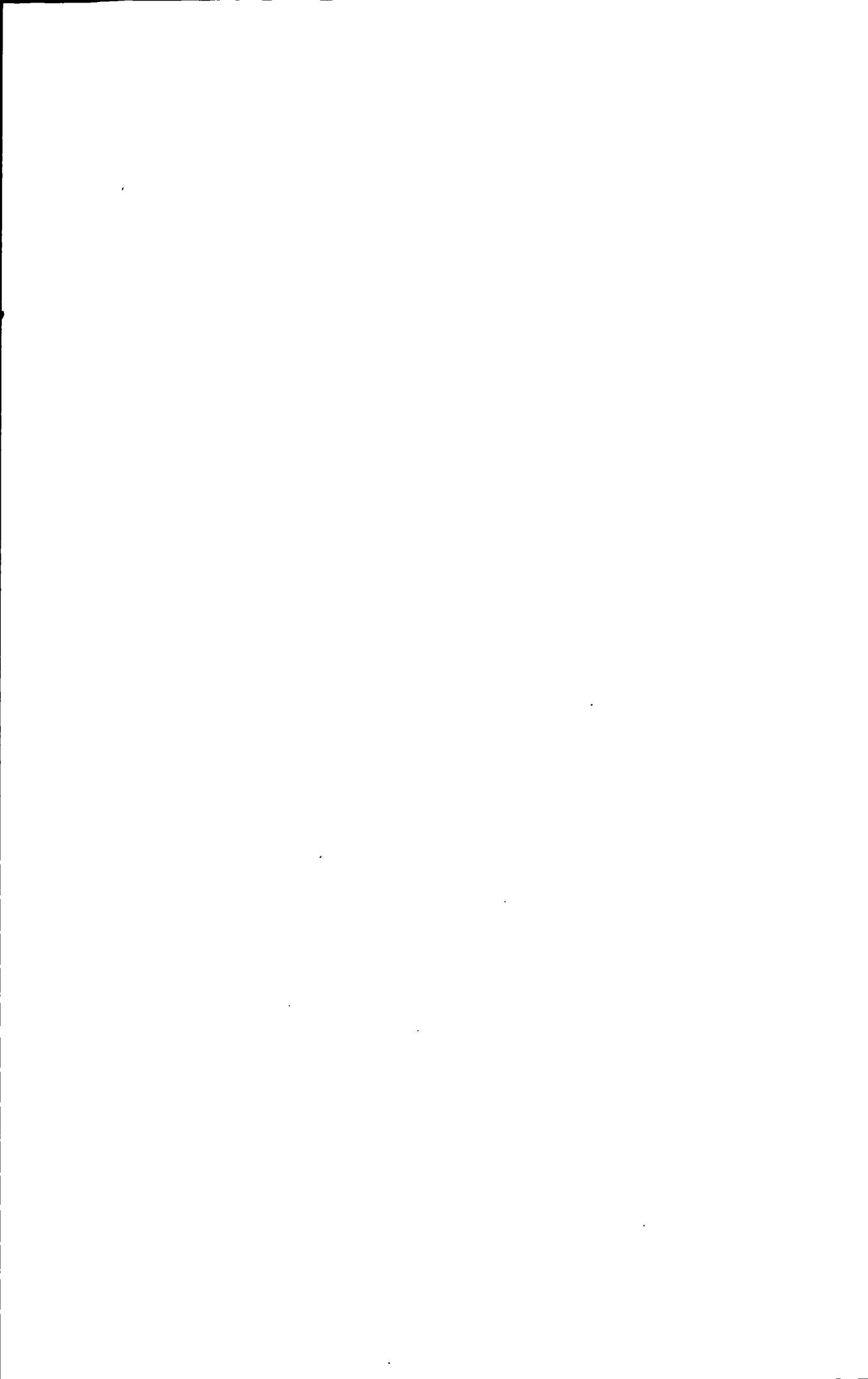
	姓名	职称	工作单位	学科专长
指导教师	姜广峰	教授	北京化工大学	几何学
评阅人 1	孙华飞	教授	北京理工大学	几何学
评阅人 2	牛兴文	副教授	北京化工大学	几何学
评阅人 3				
评阅人 4				
评阅人 5				
答辩委员会主席	孙华飞	教授	北京理工大学	
答辩委员 1	杨永愉	教授	北京化工大学	
答辩委员 2	杨丰梅	教授	北京化工大学	
答辩委员 3	崔丽鸿	教授	北京化工大学	
答辩委员 4	赵丽娜	副教授	北京化工大学	
答辩委员 5				

注: 一. 论文类型: 1. 基础研究 2. 应用研究 3. 开发研究 4. 其它

二. 中图分类号在《中国图书资料分类法》查询。

三. 学科分类号在中华人民共和国国家标准 (GB/T 13745-9)《学科分类与代码》中查询。

四. 论文编号由单位代码和年份及学号的后四位组成。



## 关于直线构形的 $\phi_3$ 不变量

### 摘要

本文研究了直线构形的  $\phi_3$  不变量，主要包括两部分内容：仿射平面上直线构形的  $\phi_3$  不变量的计算及直线分类和一类特殊平面直线构形的特征多项式的计算。

首先，文章研究了仿射平面上不多于6条直线的构形的  $\phi_3$  不变量。结合具体的理论知识，运用元素编号法和矩阵求秩法，得到了  $\phi_3$  不变量的通用算法。另外，通过算法分析、理论证明以及编程计算，将这些直线构形根据  $\phi_3$  不变量的值进行了分类。3条直线的平面构形分为3类；4条直线的平面构形分为5类；5条直线的平面构形分为8类；6条直线的平面构形分为13类。接着对于特殊的直线构形，包括平面完全图构形的  $\phi_3$  不变量进行证明推导，得到通用的计算公式。

其次，利用已有的Whitney定理，文章研究了三维空间平面构形的特征多项式。针对特殊的平面完全图构形的特征多项式，经过证明推导给出了其特征多项式的计算公式。

**关键字：** 直线构形，特征多项式，OS代数， $\phi_3$  不变量，完全图构形



## $\phi_3$ INVARIANT OF LINEAR ARRANGEMENTS

### ABSTRACT

In this paper, we mainly consider the invariant  $\phi_3$  of linear arrangements. This thesis consists of two parts: the computation for invariant  $\phi_3$  of the affine plane linear arrangements and the characteristic polynomials of a class of the linear arrangements.

In the first part, the invariant  $\phi_3$  of the linear arrangements with up to 6 lines in affine plane have been studied. Through the algorithm analysis, theoretical proof and programming calculation, we obtained the generic algorithms for the invariant  $\phi_3$  and a classification of these arrangements according to the value of  $\phi_3$ . Three lines planar configuration is divided into three categories, four lines planar configuration is divided into 5 categories, five lines planar configuration is divided into 8 categories, and six lines planar configuration is divided into 13 categories. Then we researched some nice examples with special properties, and provided a proof of the common formula for the invariant  $\phi_3$ .

In the second part, based on the Whitney Theorem, the paper studied the characteristic polynomials for the three-dimensional arrangements. Furthermore, we considered the computation of characteristic polynomials for a special planar complete graph arrangement and obtain the computing

formula.

**KEYWORDS:** linear arrangement, characteristic polynomial, Orlik-Solomon algebra, invariant  $\phi$ , complete graph arrangement

## 目 录

<b>第一章 概述</b>	1
1.1 研究的背景	1
1.2 本文主要内容	4
<b>第二章 直线构形 <math>\phi_3</math> 不变量的计算</b>	5
2.1 预备知识	5
2.2 直线构形	6
2.3 直线构形的不变量	7
2.3.1 $\phi_3$ 不变量的算法描述	8
2.3.2 平面条数不多于 6 的直线构形的 $\phi_3$ 分类	13
<b>第三章 几类特殊的直线构形的 <math>\phi_3</math> 不变量</b>	25
3.1 简单直线构形的 $\phi_3$ 不变量	25
3.2 计算 $k$ -完全图的 $\phi_3$ 不变量	27
3.2.1 $k$ -完全图的定义说明	27
3.2.2 计算 $k$ -完全图构形 $I_2^3$ 的维数	27
3.2.3 $k$ -完全图举例说明	28
<b>第四章 射影平面上特殊直线构形的特征多项式</b>	31
4.1 三维空间中特征多项式的算法	31
4.2 特殊直线构形的特征多项式	31
4.2.1 特殊平面直线构形	31
4.2.2 计算结果	32
<b>参考文献</b>	35

附录	43
致谢	43
研究成果及发表的学术论文	45

## Contents

<b>Chapter 1 Introduction .....</b>	1
1.1 Background .....	1
1.2 Research.....	4
<b>Chapter 2 Algorithms for Invariant <math>\phi_3</math> .....</b>	5
2.1 Prerequisite Knowledge.....	5
2.2 Linear Arrangements .....	6
2.3 $\phi_3$ for Linear Arrangements.....	7
2.3.1 Algorithms for Invariant $\phi_3$ .....	8
2.3.2 Classification of Linear Arrangements with up to 6 Lines .....	13
<b>Chapter 3 Invariant <math>\phi_3</math> for specific Linear Arrangements.....</b>	25
3.1 Simple Linear Arrangements.....	25
3.2 Invariant $\phi_3$ for K-complete graph .....	27
3.2.1 K-complete graph.....	27
3.2.2 $I_2^3$ for K-complete graph .....	27
3.2.3 Example of K-complete graph .....	28
<b>Chapter 4 Characteristic Polynomial for Linear Arrangements .....</b>	31
4.1 Algorithms in Three-dimensional Space.....	31
4.2 Particular Linear Arrangements.....	31
4.2.1 Definition .....	31
4.2.2 Conclusion .....	32

<b>References</b> .....	35
<b>Appendix</b> .....	37
<b>Thanks</b> .....	43

## 符号说明

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{K}$	实数域或复数域
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	超平面构形
$\chi(\mathcal{A}, t)$	构形 $\mathcal{A}$ 的特征多项式
$\pi(\mathcal{A}, t)$	构形 $\mathcal{A}$ 的 Poincare 多项式
$[2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$	直线构形的标识, 表示该构形有 $n_2$ 个 2 重 点, $n_3$ 个 3 重点…
NBC	无破圈
$I(\mathcal{A})$	构形 $\mathcal{A}$ 的理想
$OS(\mathcal{A})$	构形 $\mathcal{A}$ 的 Orlik-Solomon 代数
$\phi_3$	构形 $\mathcal{A}$ 的 $\phi_3$ 不变量



# 第一章 概述

## 1.1 研究的背景

超平面构形近的研究，兴起于 20 世纪 70 年代，最初起源于一个有趣的关于“切馅饼”的初等数学问题。该问题的具体描述如下：一刀把馅饼切为两块，两刀最多切成四块，那么切更多刀的话最多能将馅饼分为多少块？其后，超平面构形慢慢发展成为一门综合了代数、拓扑、组合、分析等学科的交叉学科。30 年来受到国际上的广泛关注，诸如特殊构形及其拓扑性质、特征多项式、庞卡莱多项式、超可解性、OS 代数等领域成为众多学者研究的热点。其中，R.P. Stanley、M. Falk、P. Orlik、L. Solomon、H. Terao、H.S. White 等在这些方面做出了重大贡献<sup>[1-6]</sup>。另外，近年来在国内也有一些关于特殊构形，包括混杂构形、类自由构形、直线构形、轮换图构形等方面的研究<sup>[9-13]</sup>。

回顾超平面构形的历史，早在 1943 年<sup>[14]</sup>，J.L. Woodbridge 就提出“切  $n$  刀后的馅饼最多有  $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$  块”，这个结论可以用数学归纳猜想的方法证明。对该结论做类似推广，可以得到这样的结果：平面上的  $n$  个点可以将 1 条直线最多分为  $n+1$  部分， $n$  条直线可以将一平面最多分为  $1+n+\binom{n}{2}$  个部分， $n$  个平面可以将一个空间最多分为  $1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$  个部分。另外，L.Schläfli 还得到了  $m$  维馅饼经过  $n$  个超平面的分割所得的最多块数为  $1+n+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{m}$ 。需要说明的是，为了使得分得的块数最多，需要对这  $n$  个超平面加以限制。即：这些超平面满足，任何两个平面交与一条公共直线，且这些直线是互异的；任何三个平面交与一个公共点，且这些交点是互异的<sup>[14]</sup>。由此开始，超平面构形受到了研究者们越来越多的关注。1975 年，Zaslavsky 通过定义超平面元素构形中平面的非空交集  $L$  上的偏序关系，利用莫比乌斯函数完成了  $L$  的特征多项式和庞卡莱多项式的定义。此后，更多的工具被用于超平面构形的研究，并为该领域的研究工作奠定了坚实的理论基础。

首先给出超平面构形的定义<sup>[1][14]</sup>。设域  $\mathbb{K}$  为实数域  $\mathbb{R}$  或复数域  $\mathbb{C}$ ， $V$  为  $\mathbb{K}$  上的  $n$

维向量，取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  后，则  $K^n$  中任一向量  $v$  可惟一表示为  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ 。我们将集合  $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = b\}$  称为  $V$  中的一个超平面，并且将  $V$  中有限个超平面的集合称为超平面构形，可以记为  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ 。另外，如果构形  $\mathcal{A}$  中的所有超平面的交非空，则称此构形是中心构形，否则称为非中心构形。

超平面构形由其定义多项式唯一确定，一些特殊的构形具有代表性的研究意义。主要包括以下几类：布尔构形（Boole Arrangement）、辫构形（Braid Arrangement）、时俭益构形（Shi Arrangement）、一般位置构形（General position Arrangement）等等，它们的定义多项式分别为：

$$\text{Boole 构形: } Q(\mathcal{A}) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

$$\text{Braid 构形: } Q(\mathcal{A}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

$$\text{Shi 构形: } Q(\mathcal{A}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(x_i - x_j - 1)$$

$$\text{一般位置构形: } Q(\mathcal{A}) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n)(x_n - x_1)$$

对于这些特殊的构形，其几何、拓扑性质都具有明显统一的特征<sup>[1][15]</sup>。

从具有特殊性质的构形入手研究，有助于发现构形的普遍性质，若加以深入推广研究，可以得到很好的结果。另外，由于超平面构形的理论研究极其复杂，没有统一成熟的方法和体系，这种由浅入深、由简到繁的方式为学者们提供了一个很好的研究途径。本文中的部分研究也借助了这样的方法。

下面介绍关于超平面构形的理论基础知识。

我们将构形  $\mathcal{A}$  中所有元素的非空交的集合记为  $L = L(\mathcal{A})$ ，并且利用反包含定义  $L$  上的偏序关系如下： $X \leq Y \Leftrightarrow X \supseteq Y$ ，其中  $X, Y \in L(\mathcal{A})$ 。显然，此偏序关系满足自反性、对称性和传递性。对于任意两个构形  $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{B}$ ，若存在保序双射  $\varphi: L(\mathcal{A}) \rightarrow L(\mathcal{B})$ ，则称构形  $\mathcal{A}$  和构形  $\mathcal{B}$  是  $L$ —等价的。

定义  $L(\mathcal{A})$  上的秩函数为相应元素的余维数，假设构形  $\mathcal{A}$  的维数为  $l$ ，则可以得到：

$r(X) = \text{codim}(X) = l - \dim X$ ，其中  $X \in L(\mathcal{A})$ 。也可以等价解释为： $r(X)$  表示使得  $X = H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \cdots \cap H_{i_m}$  成立的最少超平面的个数。显然， $r(V) = 0$ ， $r(H) = 1$ 。若元素

$H$  的秩为1, 则称该元素为原子。

接下来定义  $L(\mathcal{A})$  上的交为:  $X \wedge Y = \bigcap \{Z : Z \in L(\mathcal{A}), X \cup Y \subseteq Z\}$ ; 如果  $X \cap Y \neq \emptyset$ , 则定义并为:  $X \vee Y = X \cap Y$ 。设  $L \neq \emptyset$ , 对于  $\forall X, Y \in L$ , 均  $\exists X \vee Y, X \wedge Y \in L$ , 则称  $L$  是格。

为了定义构形的特征多项式和庞卡莱多项式, 我们先给出  $L(\mathcal{A})$  上 Möbius 函数如下:

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} \mu(X, X) = 1, & X \in L(\mathcal{A}) \\ \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = 0, & X, Y, Z \in L(\mathcal{A}) \text{ 且 } X < Y \\ \mu(X, Y) = 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义  $\mu(X) = \mu(\hat{0}, X)$ , 则  $\mu(\hat{0}) = 1$ 。

定义构形  $\mathcal{A}$  的特征多项式为  $\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)}$ 。例如: 对于特殊的 Boolean 构形的特征多项式为  $\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} (-1)^{r(X)} t^{\dim(X)}$ 。

特征多项式为研究超平面的拓扑性质提供了一个很好的工具, 通过它可以得出一个构形将其所在超平面分割出的区域数以及相对有界区域数。具体结果如下: 定义  $r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1)$ ,  $b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1)$ , 则  $r(\mathcal{A})$  表示构形  $\mathcal{A}$  将其所在空间分割出的区域数, 而  $b(\mathcal{A})$  表示其中相对有界的区域数目。

定义构形  $\mathcal{A}$  的 Poincare 多项式为  $\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) (-t)^{r(X)}$ 。

关于平面上直线构形的研究情况如下<sup>[16]</sup>。

在直线构形的研究领域中, 一个备受关注的重要问题是, 在给定仿射平面上及  $L$  等价的意义下, 究竟有多少种直线构形, 即如何给出一个  $L$  等价的分类。当然, 前人已经得到了一定的结果。在文献[16]中, D. Garber, D. Teicher, M. Vishne 给出了射影平面上不多于8条直线的构形, 由此我们可以作出射影平面上不多于8条直线的构形。在参考文献[8]中, 详细介绍了仿射与射影的区别与联系。根据相关理论, 我们可以将射影平面上的构形转化为仿射平面上的构形。具体方法为: 对射影平面内的某个  $n+1 (n \leq 7)$  条直线的构形, 取定其中一条直线作为无穷远直线, 去掉该直线, 并将其余的直线都看作有穷远直线, 这样就得到了仿射平面中  $n$  条直线的构形。

关于超平面构形  $\mathcal{A}$  的拓扑不变量  $\phi_3$  的定义如下: 根据有理同伦理论,  $\phi_3 = \text{rank}(G_2/G_3)$ , 其中  $G$  是构形  $\mathcal{A}$  的余集的基本群, 并且  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$  是  $G$  的下中心序列。

由参考文献[3]可知,  $\phi_3$  的计算公式为:

$$\phi_3 = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3)$$

手工计算平面直线构形的工作量大, 并且随着直线数目的增多, 人为计算几乎不可实现。因此, 本文中研究了针对平面直线构形的拓扑不变量  $\phi_3$  的具体算法, 并利用 matlab 进行了实现。其他的研究人员只需输入直线构形各条直线的方程系数, 即可方便得到其  $\phi_3$  不变量。在这个基础上可以进一步研究构形的拓扑性质, 最简单直接的应用之一便是根据此结果对平面直线构形进行分类。

另外, 关于  $\phi_3$  不变量的研究, 前人也得到了一定结果。张曦等人曾证明<sup>[10]</sup>: 在  $m+1$  个顶点的平面轮式图构形中, 计算  $\phi_3$  不变量时有  $\phi_3 = 2m$ 。

另外, 数学家 Whitney 曾给出了一个定理来求解构形的特征多项式<sup>[11]</sup>, 具体内容如下: 设  $A$  为  $n$  维向量空间中的构形, 则

$$\chi_A(t) = \sum_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ 为 中 心 构 形}}} (-1)^{\#B} t^{n-rank(B)}$$

在三维空间中, 该公式可以进一步的简化。因此, 我们想到从一些特殊的平面直线构形入手, 分析其特征多项式并给出推广证明。

## 1.2 本文主要内容

本文内容主要分为三部分。

在第二章里我们首先介绍了直线构形、Orlik-Solomon 代数和  $\phi_3$  不变量的基本知识, 接着通过详细的分析, 给出了  $\phi_3$  不变量的算法, 通过 matlab 编程实现, 主要包括元素编号法和矩阵求秩法。并在此基础上, 对不多于 6 条直线的平面构形计算了相应的  $\phi_3$  不变量, 进而进行了分类。

在第三章里我们分析了几类特殊的直线构形, 根据拓扑性质的特殊性, 对其  $\phi_3$  不变量进行了归纳计算。另外, 根据  $k$ -完全图直线构形的独特拓扑结构, 进一步计算了  $k$ -完全图的  $\phi_3$  不变量, 并给出了具体的例子说明。

在第四章里我们首先根据 Whitney 定理描述了三维空间中构形的特征多项式的算法, 接下来选取了一类特殊的平面直线构形, 即  $k$ -完全图直线构形, 计算了其特征多项式并进行了推广证明。

## 第二章 直线构形 $\phi_3$ 不变量的计算

### 2.1 预备知识

本论文的理论研究基础，除了在背景知识中提到的超平面构形、偏序集、Möbius 函数、特征多项式等基本概念，还包括以下的部分，主要包括：外代数、Orlik-Solomon 代数、圈、破圈、NBC 基以及  $\phi_3$  不变量等<sup>[1][6]</sup>。

首先介绍外代数的概念，设  $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$  是数域  $\mathbb{K}$  上的一个超平面构形，取  $H_1, H_2, \dots, H_p$  为其中的  $p$  个超平面，并且  $\mathcal{K}$  是一个交换环，则定义  $E_1 = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{K} e_H$ ，  
 $E = E(\mathcal{A}) = \wedge(E_1)$  是  $E_1$  的外代数。 $E_1$  的所有基由元素  $e_H$  生成，且有  $e_H^2 = 0$ ，  
 $e_H e_K = -e_K e_H$ ， $H, K \in \mathcal{A}$ 。由于代数  $E$  是分次的，若  $|\mathcal{A}| = n$ ，则  $E = \bigoplus_{p=0}^n E_p$ 。此处  $E_0 = \mathcal{K}$ ，  
且  $E_1 = \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{K} e_H$ 。若简记  $e_{H_i} = e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )，则可得到结果  $E_1 = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathcal{K} e_i$ ， $E_2 = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{K} e_i e_j$ ，  
 $\dots$ ， $E_n = \mathcal{K} e_1 e_2 \dots e_n$ ，由此可推得  $E = \bigoplus_{p=0}^n E_p = E_0 \oplus E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ 。

定义Orlik-Solomon代数，记线性映射为： $\partial_E = \partial : E^p \rightarrow E^{p-1}$ ，其中  $\partial 1 = 0$ ， $\partial e_H = 1$ ，  
且对于  $p \geq 2$ ， $\partial(e_{H_1} \dots e_{H_p}) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} e_{H_1} \dots \hat{e}_{H_k} \dots e_{H_p}$ 。给定超平面的  $p$  元组，  
 $S = (H_1, H_2, \dots, H_p)$ ， $|S| = p$ ， $e_S = e_{H_1} e_{H_2} \dots e_{H_p} \in E$ 。如果  $r(\cap S) = |S| = p$ ，则称  $S$  是无关的。如果  $\cap S \neq \emptyset$  且  $r(\cap S) < p$ ，则称  $S$  是相关的。如果对于任意  $1 \leq k \leq p$ ，超平面  $p-1$  元组  $(H_1, \dots, \hat{H}_k, \dots, H_p)$  是无关的，则称  $S$  是极小相关的。令  $I = I(E)$  表示  $E$  的理想，且  $I$  由  $\{e_S \mid \cap S = \emptyset\} \cup \{\partial e_S \mid S \text{ 是相关的超平面组}\}$  生成。由于  $I$  是由齐次元素生成的，若令  $I_p = I \cap E_p$ ，则可得  $I = \bigoplus_{p=0}^n (I \cap E_p)$ 。从而我们称商  $E/I$  为Orlik-Solomon代数，一般简记为  $OS(\mathcal{A})$  或者  $OS$ 。

接下来定义线性序关系“ $\prec$ ”： $H_i \prec H_j \Leftrightarrow i < j$ 。对于  $p$  元组  $S = (H_1, H_2, \dots, H_p)$ ，如果满足  $H_1 \prec H_2 \prec \dots \prec H_p$ ，则称该  $p$  元组是标准型，并且记  $MaxS$  为该线性序下的最大元。

如果  $p$  元组  $S = (H_1, H_2, \dots, H_n)$  是极小相关的, 则称  $S$  是一个圈。如果  $\exists H \in \mathcal{A}$  使得  $\text{Max}S \prec H$  且  $(S, H)$  是一个圈, 则称  $S$  是一个破圈。因此, 每个破圈都可以通过删去某个圈  $S$  的最大元  $\text{Max}S$  得到。

定义  $\mathcal{K}$  一模  $C = \bigoplus_{p \geq 0} C_p$ , 其中  $C_0 = \mathcal{K}$ ,  $C_p = \{e_s \in E \mid S \text{ 是标准 } p \text{ 元组且不包含任何破圈}\}$  为自由  $\mathcal{K}$  一模 ( $p \geq 1$ )。从而可以得到集合  $\{e_s \in E \mid S \text{ 是标准 } p \text{ 元组且不包含任何破圈}\}$  是  $OS$  作为一个分次  $\mathcal{K}$  一模的基, 称为 NBC 基, 也称为无破圈基。

最后给出  $\phi_3$  不变量的定义, 根据前面的相关介绍, 对于超平面构形  $\mathcal{A}$ , 称  $OS(\mathcal{A}) = E/I$  为  $\mathcal{A}$  的 Orlik-Solomon 代数。若考虑映射  $f: E^1 \otimes I^2 \rightarrow E^3$ , 定义  $\phi_3(\mathcal{A}) = \dim(\ker(f))$ , 它是构形  $\mathcal{A}$  的拓扑不变量, 并且也是代数  $OS(\mathcal{A})$  的不变量。由文献[3]可知, 其计算公式如下:

$$\phi_3 = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3)$$

其中  $OS_2^3 = E^3 / I_2^3$ ,  $w_2 = \dim OS^2(\mathcal{A})$  为  $\mathcal{A}$  的第二个 Whitney 数, 即所有秩为 2 的 NBC 基的个数。另外, 关于  $I_2^3$  的详细解释参见 2.3 节。

## 2.2 直线构形

首先给出仿射平面上直线构形的定义。对于仿射平面上有限条直线的集合构成的直线构形  $\mathcal{A}$ , 将其标记为  $[2^n 3^m \dots]$ , 其中的  $n_k$  表示  $k$  条直线相交的点的个数。举例说明: 构形  $\mathcal{A}$  由 5 条直线构成, 其中的 2 条直线相交于一点的有四种情况, 4 条相交于一点有一种情况, 则该构形的标识可记作  $[2^4 4^1]$ 。另外, 如果经过某点的直线仅有两条, 则称该点为简单点, 其他的点称为重点, 如果经过某重点的直线有  $k$  条, 则称该点为  $k$  重点。因此,  $n_2$  是直线构形中简单点的个数,  $n_k$  是  $k$  重点个数。

为了得到给定仿射平面上直线构形的  $\phi_3$  不变量的计算, 我们首先应该对这些直线构形进行  $L$  等价的分类。根据文献[16]中的内容, 可以作出射影平面上不多于 8 条直线的构形图形。另外, 根据将射影平面上的构形转化为仿射平面中的构形的方法, 我们得到了仿射平面上不多于 7 条直线的构形。具体情形如下: 在仿射平面上, 2 条直线有 2 种构形, 3 条直线有 4 种构形, 4 条直线有 8 种构形, 5 条直线有 17 种构形, 6

条直线有 56 种构形, 7 条直线有 185 种构形。考虑到 7 条直线的构形比较多, 不便于展示, 我们只展示了仿射平面上 3 到 6 条直线的构形。

## 2.3 直线构形的 $\phi_3$ 不变量

如果要计算  $\phi_3$  不变量, 需要对公式中的各分项进行详细分析。

$$\phi_3 = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3)$$

首先对  $OS_2^3$  进行分析说明。

由相关的定义可知:  $OS_2^3 = E^3 / I_2^3$ , 从而得到:

$$\dim OS_2^3 = \dim(E / I_2)^3 = \dim E^3 - \dim I_2^3$$

其中  $\dim E^3 = \binom{n}{3}$  可以直接计算, 为了讨论  $\dim I_2^3$  的计算, 先给出  $I_2^3$  的定义。

在非中心直线构形中, 根据定义有:

$$I^2 = \{e_{i_1 i_2} \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \phi\} \cup \{\partial e_{j_1 j_2 j_3} \mid \{H_{j_1}, H_{j_2}, H_{j_3}\} \text{ 相关}\}$$

也可以记为如下的形式:

$$I^2 = \langle \{e_s \mid S = \{i_1, i_2\} \subset [n], H_{i_1} \cap H_{i_2} = \phi\} \rangle \cup \{\partial e_s \mid S = \{j_1, j_2, j_3\} \subset [n], H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \phi\}$$

另外,  $I_2 = I^2 \cdot E = \{\sum e_s \wedge e_{ij} \mid e_s \in E, e_{ij} \in I^2\}$ , 且  $I_2^3 = (I^2 \cdot E)^3$  是  $I_2$  的三次分支。从而得

到,  $\dim I_2^3 = \dim(I^2 \cdot E)$ , 该维数等于向量组  $\{e_s \cdot e_{i_1 i_2} \mid e_s \in E^1, H_{i_1} \cap H_{i_2} = \phi\}$

$\cup \{e_s \cdot \partial e_{j_1 j_2 j_3} \mid e_s \in E^1, H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \phi\}$  作为  $E^3$  中极大线性无关组的基数。

根据具体的情形,  $I_2^3$  的生成元分为了三部分:

$$(1) \quad B_3 = \{e_s (e_{i_1} e_{i_2}) \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \phi, s \in [n]\}$$

$$(2) \quad C_3 = \{e_s \partial (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \phi, s \in \{j_1, j_2, j_3\}\}$$

不妨设:  $s = j_1$ , 则有  $e_s \partial e_{j_1 j_2 j_3} = e_s \partial (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) = e_s e_{j_1} e_{j_3} - e_s e_{j_1} e_{j_2} + e_s e_{j_2} e_{j_3} = e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}$

从而可得:  $C_3 = \{e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3} \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \phi\}$

(3)  $D_3 = \left\{ e_s \partial (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\} \right\}$ , 其中外积的计算结果

$$\text{为: } e_s \partial e_{j_1 j_2 j_3} = e_s \partial (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) = e_s e_{j_2} e_{j_3} - e_s e_{j_1} e_{j_3} + e_s e_{j_1} e_{j_2}$$

记  $B, C, D$  分别是  $B_3, C_3, D_3$  生成的子空间  $B = \langle B_3 \rangle, C = \langle C_3 \rangle, D = \langle D_3 \rangle$

则可以得到:  $\dim I_2^3 = \dim (B + C + D)$ 。

上述推导为后续的算法提供了理论基础。

本节的内容分为两部分: 首先给出了的  $\phi_3$  不变量的具体算法, 接下来计算了仿射平面上 3 到 6 条直线的构形的  $\phi_3$  不变量, 并给出了相应的分类结果。

### 2.3.1 $\phi_3$ 不变量的算法描述

对于  $IR^4$  中的非中心构形, 计算  $\phi_3$  的算法说明如下。

设  $A$  为非中心超平面构形, 其中超平面的个数为  $n$ 。为了计算  $\phi_3$  不变量, 首先我们对于  $I_2^3$  的生成元证明了一些结论。

#### 2.3.1.1 关于 $I_2^3$ 的一些说明

$I_2^3$  的生成元分为了三部分:  $B_3, C_3, D_3$ , 记  $B, C, D$  分别是  $B_3, C_3, D_3$  生成的子空间  $B = \langle B_3 \rangle, C = \langle C_3 \rangle, D = \langle D_3 \rangle$ 。以下证明对于平面直线构形, 当每条直线上仅包含一个 3 重点的时候, 有  $B \cap C = \{0\}, B \cap D = \{0\}$ , 但是  $C \cap D$  不一定是零子空间。

用反证法证明如下, 假定  $\dim(B) = m_1, \dim(C) = m_2$ 。另外, 为了加以区分, 我们将  $B, C$  的基元素分别记为:  $\{e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}\}$  和  $\{e_{j_i} e_{j_1} e_{j_2}\}$ 。若  $B \cap C \neq \{0\}$ , 则  $\exists \alpha \in B \cap C$ 。

则由于  $\alpha \in B$ , 所以  $\exists a_i, i = 1, \dots, m_1$ ,  $a_i$  不全为 0, 使得  $\alpha = \sum_{i=1}^{m_1} a_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2})$

又因为  $\alpha \in C$ , 所以  $\exists b_j, j = 1, \dots, m_2$ ,  $b_j$  不全为 0, 使得  $\alpha = \sum_{j=1}^{m_2} b_j (e_{j_i} e_{j_1} e_{j_2})$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_1} a_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}) = \sum_{j=1}^{m_2} b_j (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}), \text{ 从而有 } \sum_{i=1}^{m_1} a_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}) - \sum_{j=1}^{m_2} b_j (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) = 0$$

由  $B, C$  的生成元  $B_3, C_3$  的定义可知, 当每条直线上仅包含一个 3 重点时有  $B_3 \cap C_3 = \emptyset$ 。

因此可得:  $a_i = 0, i = 1, \dots, m_1; b_j = 0, j = 1, \dots, m_2 \Rightarrow \alpha = 0$ , 从而证明:  $B \cap C = \{0\}$

另外, 子空间  $D$  的生成元为

$$D_3 = \{e_s e_{j_2} e_{j_3} - e_s e_{j_1} e_{j_3} + e_s e_{j_1} e_{j_2} \mid s \in [n], \text{ 且 } H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset\}$$

假定  $\dim(B) = m_1, \dim(D) = m_3$ 。将  $B, D$  的基元素分别记为:  $\{e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}\}$  和  $\{e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}\}$ 。

若  $B \cap D \neq \{0\}$ , 则  $\exists \beta \in B \cap D$ 。

则由于  $\beta \in B$ , 所以  $\exists c_i, i = 1, \dots, m_1, c_i$  不全为 0, 使得  $\beta = \sum_{i=1}^{m_1} c_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2})$

又因为  $\beta \in D$ , 所以  $\exists d_j, j = 1, \dots, m_3, d_j$  不全为 0, 使得  $\beta = \sum_{j=1}^{m_3} d_j (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3})$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m_1} c_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}) = \sum_{j=1}^{m_3} d_j (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}), \text{ 从而有 } \sum_{i=1}^{m_1} c_i (e_{s_i} e_{i_1} e_{i_2}) - \sum_{j=1}^{m_3} d_j (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) = 0$$

由  $B, D$  的生成元  $B_3, D_3$  的定义可知, 当每条直线上仅包含一个 3 重点时有  $B_3 \cap D_3 = \emptyset$ 。

因此可得:  $c_i = 0, i = 1, \dots, m_1; d_j = 0, j = 1, \dots, m_3 \Rightarrow \beta = 0$ , 从而证明:  $B \cap D = \{0\}$

为了证明  $C \cap D$  不一定是零子空间, 我们只需找出一个元素  $\gamma$  满足  $\gamma \in C \cap D$  即可。

设二维平面上的直线构形如下图所示:

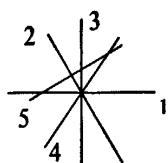


图 2-1 平面直线构形

Fig.2-1 plane line arrangement

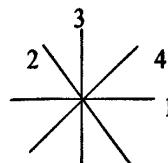


图 2-2 平面直线构形

Fig.2-2 plane line arrangement

在图 2-1 的 5 直线非中心构形中, 则由相关定义可得, 此时:

$$B_3 = \emptyset, C_3 = \{e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_3 e_4, e_2 e_3 e_4\}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \{e_4 \partial(e_1 e_2 e_3), e_5 \partial(e_1 e_2 e_3), e_3 \partial(e_1 e_2 e_4), e_5 \partial(e_1 e_2 e_4), e_2 \partial(e_1 e_3 e_4), e_5 \partial(e_1 e_3 e_4), e_3 \partial(e_2 e_3 e_4), e_5 \partial(e_2 e_3 e_4)\} \\
&= \{e_{412} - e_{413} + e_{423}, e_{512} - e_{523} + e_{523}, e_{312} - e_{314} + e_{324}, e_{512} - e_{514} + e_{524}, e_{213} - e_{214} + e_{234}, \\
&\quad e_{513} - e_{514} + e_{534}, e_{123} - e_{124} + e_{134}, e_{523} - e_{524} + e_{534}\}
\end{aligned}$$

$e_{124} + e_{234} \in C \cap D$ , 所以可得:  $C \cap D$  不一定是零子空间

再看图 2-2 的 4 直线中心构形中, 由相关定义可得, 此时:

$$\begin{aligned}
B_3 &= \emptyset, C_3 = \{e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_3 e_4, e_2 e_3 e_4\} \\
D_3 &= \{e_4 \partial(e_1 e_2 e_3), e_5 \partial(e_1 e_2 e_4), e_2 \partial(e_1 e_3 e_4), e_1 \partial(e_2 e_3 e_4)\} \\
&= \{e_{412} - e_{413} + e_{423}, e_{312} - e_{314} + e_{324}, e_{213} - e_{214} + e_{234}, e_{123} - e_{124} + e_{134}\}
\end{aligned}$$

$D$  的生成元均可由  $C$  的生成元线性表示, 故此时有:  $C \cap D = D, C \cup D = C$

从而原结论得以证明。

### 2.3.1.2 $\phi_3$ 不变量的程序算法说明

根据文献[3],  $\phi_3$  不变量的公式为:

$$\phi_3 = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3)$$

其算法说明分为以下几部分。

#### (1) 平行的两平面的计算

设  $H_i \in \mathcal{A}$  的定义多项式为  $\alpha_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{i\ell}x_\ell$ , 从而得到一般构形  $\mathcal{A}$  的定义矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ a_{21} & \dots & a_{2\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ell} \end{bmatrix}$$

从  $A$  中取出两行, 如  $i_1, i_2$  行, 比较相应的系数矩阵和增广矩阵的秩, 若  $i_1, i_2$  线性相关即为平行元素, 记下此时的序号  $(i_1, i_2)$ 。遍历所有二元组, 得到构形  $\mathcal{A}$  的所有平行元素, 存储在  $LB$  中:

$$LB = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

并且记  $LB$  有  $|LB| = m_1$  行, 两列。

### (2) 步长为 3 的极小圈

从  $A$  中取出三行, 如  $j_1, j_2, j_3$  行, 若线性相关则为极小圈, 记下此时的序号  $(j_1, j_2, j_3)$ , 遍历所有三元组, 得到构形  $A$  的所有步长为 3 的极小圈, 存储在  $LC$  中:

$$LC = \begin{bmatrix} e_{j_1} & e_{j_2} & e_{j_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

并且记  $LC$  有  $|LC| = m_2$  行, 三列。

### (3) NBC 基的个数的计算

根据上面计算得到的  $LC$ , 取出  $LC$  的前两列, 并与  $LB$  合并后作为  $BC$ , 将其与  $E^2$  中的基比较后, 即可得到 NBC 基。具体步骤如下:  $e_{ij}$  代表了  $E^2$  中的所有元, 其中  $1 \leq i \leq j \leq n$ 。将每一个  $e_{ij}$  都与  $BC$  中所有元比较, 若不相同, 则说明此元为 NBC 基, 且 NBC 基的个数加一。遍历完成所得 NBC 基个数即为  $w_2$ 。

### (4) 关于 $\phi_3$ 的计算

由相关证明可得:  $\dim I_2^3 = \dim(B+C+D)$ 。为了计算各个子空间的维数, 需要求解  $B_3 \cup C_3 \cup D_3$  作为  $E^3$  中极大线性无关组的基数。这里采用的方法是以  $E^3$  的顺序基为标准基底, 分别求出  $I_2^3$  的生成元对应的坐标向量, 并计算这些向量所组成的矩阵  $M$  的秩, 从而得到  $\dim I_2^3 = \text{rank}(M)$ 。

首先给出矩阵求秩法的一些说明:

根据  $\dim E^3 = C_n^3$ , 定义  $E^3$  的顺序标准基底为:

$$e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, \dots, e_1e_2e_n, e_1e_3e_4, \dots, e_1e_3e_n, \dots, e_2e_3e_4, \dots, e_2e_3e_n, e_2e_4e_5, \dots, e_{n-2}e_{n-1}e_n,$$

将生成元  $e_{ijk}$  转换为  $1 \times C_n^3$  的向量写入矩阵  $M$ , 映射方法为:

$$e_{ijk} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\text{num}(ijk)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(ijk)},$$

其中  $\text{loca}(ijk)$  和  $\text{num}(ijk)$  的计算方法如下：

由于上述的标准基底的下标是从小到大顺序排列的，所以需要将  $e_{ijk}$  ( $i \neq j \neq k$ ) 经过一定次数的轮换使得  $ijk \rightarrow i_0 j_0 k_0$  ( $i_0 < j_0 < k_0$ )，此时  $\text{num}(ijk)$  表示经过的轮换的次数，则对应分量为  $(-1)^{\text{num}(ijk)}$ ， $e_{ijk}$  在该行向量中的位置即为  $e_{i_0 j_0 k_0}$  对应的位置。另外，若出现下标重复的情况，即不满足  $i \neq j \neq k$ ，此时对应分量为 0。举例说明：当  $n=5, C_5^3=10$ ，基元素的标准排列为：

$$e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_2 e_5, e_1 e_3 e_4, e_1 e_3 e_5, e_1 e_4 e_5, e_2 e_3 e_4, e_2 e_3 e_5, e_2 e_4 e_5, e_3 e_4 e_5$$

对于基元素  $e_4 e_5 e_1$ ， $\text{num}(e_{451})=2$ ， $\text{loca}(e_{451})=\text{loca}(e_{145})=6$ ，从而对应的行向量为：  
 $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ 。

接下来计算  $\dim(B+C+D)$ 。  
子空间  $B$  的基元组为： $B_3 = \left\{ e_s (e_{i_1} e_{i_2}) \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \emptyset, s \in [n] \right\}$ ， $e_s$  与  $(e_{i_1}, e_{i_2})$  作外积在  $E^3$  中的分量为  $(-1)^{\text{num}(s i_1 i_2)}$ ，对应位置为  $\text{loca}(s i_1 i_2)$ ，其余位置上的对应分量均为 0。这样就完成了一个向量的写入。如下所示：

$$e_s (e_{i_1} e_{i_2}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{\text{num}(s i_1 i_2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(s i_1 i_2)}$$

对每一对互相平行的平面都遍历所有的  $e_s \in E^1$  作外积得到一系列的行向量，共  $n \times m_1$  个。把这些向量的坐标作为行向量得一矩阵  $M_B$ ， $n \times m_1$  行， $\dim E^3$  列。

子空间  $C+D$  的生成元集合如下所示：

$$C_3 \cup D_3 = \left\{ e_s \partial(e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, j_1, j_2, j_3, s \in [n] \right\}$$

取  $e_s \in E^1$  与  $\partial e_{j_1 j_2 j_3} \in I^2$ ， $\partial e_{j_1 j_2 j_3}$  中一共有三项  $(e_{j_2}, e_{j_3})$ 、 $(e_{j_1}, e_{j_3})$  和  $(e_{j_1}, e_{j_2})$ ， $e_s$  分别与

其作外积。其中  $e_s$  与  $(e_{j_2}, e_{j_3})$  作外积所得分量为  $(-1)^{num(sj_2j_3)}$ ，位置为  $loca(sj_2j_3)$ ；和  $e_s$  与  $(e_{j_1}, e_{j_2})$  作外积所得分量为  $(-1)^{num(sj_1j_2)}$ ，位置为  $loca(sj_1j_2)$ ；, 和  $(e_{j_1}, e_{j_3})$  作外积所得分量为  $(-1)^{1+num(sj_1j_3)}$ ，位置为  $loca(sj_1j_3)$ ；其余位置上的对应分量均为 0。这样就完成了

一个向量的写入。如下所示：

$$\begin{array}{ccc} loca(sj_2j_3) & loca(sj_1j_3) & loca(sj_1j_2) \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (-1)^{num(sj_2j_3)} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{num(sj_1j_3)+1} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{num(sj_1j_2)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ (sj_2j_3) & (sj_1j_3) & (sj_1j_2) \end{array}$$

对每一个长度为 3 的极小圈都遍历所有的  $e_s \in E^1$  作外积得到一系列向量，共  $n \times m_2$  个。

把这些向量的坐标作为行向量得一矩阵  $M_{C+D}$ ， $n \times m_2$  行， $\dim E^3$  列。将两个矩阵  $M_B$   $M_{C+D}$  合并后记为  $M_{B+C+D}$ ，计算矩阵  $M_{B+C+D}$  的秩，即得：

$$\dim I_2^3 = \dim(B+C+D) = \text{rank}(M_{B+C+D})。$$

另外，根据前面推导的公式可得：

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3) = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim E^3 - \dim I_2^3 \\ &= 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \binom{n}{3} - \text{rank}(M_{B+C+D}) \end{aligned}$$

### 2.3.2 平面条数不多于 6 的直线构形的 $\phi_3$ 分类

根据已有的相关理论和方法，我们得到了仿射平面上不多于 6 条直线的构形。构形的分布情况如下：2 条直线的情形有 2 种，3 条直线的情形有 4 种，4 条直线的情形有 8 种，5 条直线的情形有 17 种，6 条直线的情形有 56 种。

另外，我们依据上述的算法描述，通过 matlab 编程计算，得到了仿射平面上不多于 6 条直线的构形的  $I_2^3$  的维数以及  $\phi_3$  不变量，并根据计算结果进行了进一步分类，得到了如下的结论：3 条直线的平面构形分为 3 类；4 条直线的平面构形分为 5 类；5 条直线的平面构形分为 8 类；6 条直线的平面构形分为 13 类。

具体的计算结果说明如下：每个图下面的第一行表示图的标识，第二行表示图的编号，第三行表示图的  $I_2^3$  的维数，第四行表示  $\omega_2$  的值，最后一行表示  $\phi_3$  不变量的值。后面的两个表则表示各直线构形的分类情况。

## 仿射平面上 3 条直线的构形: (4)

$[2^2]$		$[2^3]$	$[3^1]$
$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
$\dim(I_2^3) = 1$	$\dim(I_2^3) = 1$	$\dim(I_2^3) = 0$	$\dim(I_2^3) = 1$
$\omega_2 = 0$	$\omega_2 = 2$	$\omega_2 = 3$	$\omega_2 = 2$
$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 2$	$\phi_3 = 0$	$\phi_3 = 2$

图形	维数
$u_3$	$\text{Dim}(I_2^3) = 0$
$u_1 \ u_2 \ u_4$	$\text{Dim}(I_2^3) = 1$

图形	$\phi_3$ 不变量
$u_3$	0
$u_2 \ u_4$	2
$u_1$	8

## 仿射平面上 4 条直线的构形: (8)

$[2^3]$		$[2^4]$	$[2^5]$
$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
$\dim(I_2^3) = 4$	$\dim(I_2^3) = 4$	$\dim(I_2^3) = 4$	$\dim(I_2^3) = 2$
$\omega_2 = 0$	$\omega_2 = 3$	$\omega_2 = 4$	$\omega_2 = 5$
$\phi_3 = 20$	$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 4$	$\phi_3 = 2$

$[2^2 3^1]$	$[2^3 3^1]$	$[4^1]$	$[2^6]$
$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$
$\dim(I_2^3) = 4$	$\dim(I_2^3) = 2$	$\dim(I_2^3) = 4$	$\dim(I_2^3) = 0$

$$\omega_2 = 4$$

$$\phi_3 = 4$$

$$\omega_2 = 5$$

$$\phi_3 = 2$$

$$\omega_2 = 3$$

$$\phi_3 = 8$$

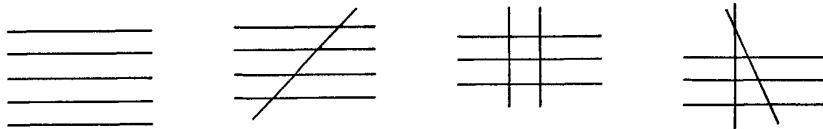
$$\omega_2 = 6$$

$$\phi_3 = 0$$

图形	维数
$u_8$	$\text{Dim}(I_2^3) = 0$
$u_4 \ u_6$	$\text{Dim}(I_2^3) = 2$
$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_5 \ u_7$	$\text{Dim}(I_2^3) = 4$

图形	$\phi_3$ 不变量
$u_8$	0
$u_4 \ u_6$	2
$u_3 \ u_5$	4
$u_2 \ u_7$	8
$u_1$	20

仿射平面上 5 条直线的构形: (17)



$$[2^4]$$

$$u_1 \quad \dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\phi_3 = 40$$

$$u_2 \quad \dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 4$$

$$\phi_3 = 20$$

$$[2^6]$$

$$u_3 \quad \dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 6$$

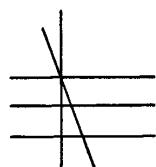
$$\phi_3 = 10$$

$$[2^7]$$

$$u_4 \quad \dim(I_2^3) = 7$$

$$\omega_2 = 7$$

$$\phi_3 = 8$$

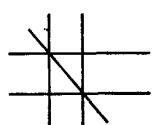


$$[2^4 3^1]$$

$$u_5 \quad \dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 6$$

$$\phi_3 = 10$$

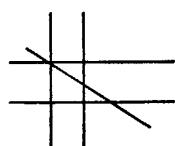


$$[2^2 3^2]$$

$$u_6 \quad \dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 6$$

$$\phi_3 = 10$$

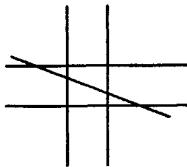


$$[2^5 3^1]$$

$$u_7 \quad \dim(I_2^3) = 9$$

$$\omega_2 = 7$$

$$\phi_3 = 6$$

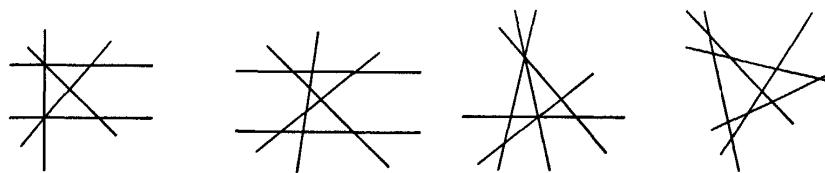


$$[2^8]$$

$$u_8 \quad \dim(I_2^3) = 6$$

$$\omega_2 = 8$$

$$\phi_3 = 4$$



$[2^3 3^2]$

$u_9$

$$\dim(I_2^3) = 9$$

$$\omega_2 = 7$$

$$\phi_3 = 6$$

$[2^9]$

$u_{10}$

$$\dim(I_2^3) = 3$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\phi_3 = 2$$

$[2^4 3^2]$

$u_{11}$

$$\dim(I_2^3) = 6$$

$$\omega_2 = 8$$

$$\phi_3 = 4$$

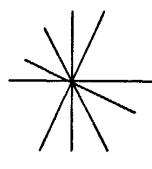
$[2^{10}]$

$u_{12}$

$$\dim(I_2^3) = 0$$

$$\omega_2 = 10$$

$$\phi_3 = 0$$



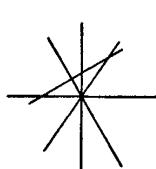
$[5^1]$

$u_{13}$

$$\dim(I_2^3) = 10$$

$$\omega_2 = 4$$

$$\phi_3 = 20$$



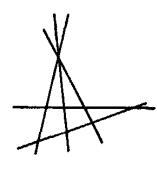
$[2^4 4^1]$

$u_{14}$

$$\dim(I_2^3) = 7$$

$$\omega_2 = 7$$

$$\phi_3 = 8$$



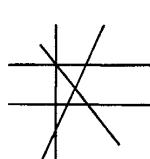
$[2^7 3^1]$

$u_{15}$

$$\dim(I_2^3) = 3$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\phi_3 = 2$$



$[2^6 3^1]$

$u_{16-1}$

$$\dim(I_2^3) = 6$$

$$\omega_2 = 8$$

$$\phi_3 = 4$$

$u_{16-2}$

$$\dim(I_2^3) = 6$$

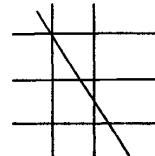
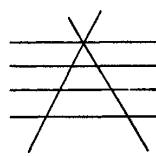
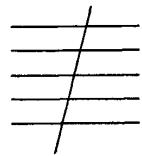
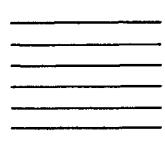
$$\omega_2 = 8$$

$$\phi_3 = 4$$

图形	维数
$u_{12}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 0$
$u_{10} \ u_{15}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 3$
$u_8 \ u_{11} \ u_{16-1} \ u_{16-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 6$
$u_4 \ u_{14}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 7$
$u_7 \ u_9$	$\text{Dim}(I_2^3) = 9$
$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_5 \ u_6 \ u_{13}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 10$

图形	$\phi_3$ 不变量
$u_{12}$	0
$u_{10} \ u_{15}$	2
$u_8 \ u_{11} \ u_{16-1} \ u_{16-2}$	4
$u_7 \ u_9$	6
$u_4 \ u_{14}$	8
$u_3 \ u_5 \ u_6$	10
$u_2 \ u_{13}$	20
$u_1$	40

仿射平面上 6 条直线的构形: (56)


 $[2^5]$ 
 $[2^6 3^1]$ 
 $[2^8 3^1]$ 
 $u_1$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\phi_3 = 70$$

 $u_2$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 5$$

$$\phi_3 = 40$$

 $u_3$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 8$$

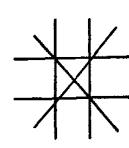
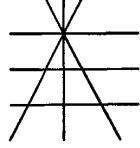
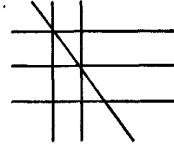
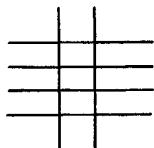
$$\phi_3 = 22$$

 $u_4$ 

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$$\omega_2 = 10$$

$$\phi_3 = 12$$


 $[2^8]$ 
 $[2^5 3^2]$ 
 $[2^6 4^1]$ 
 $[2^1 3^4]$ 
 $u_5$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 8$$

$$\phi_3 = 22$$

 $u_6$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\phi_3 = 16$$

 $u_7$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 9$$

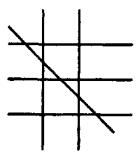
$$\phi_3 = 16$$

 $u_8$ 

$$\dim(I_2^3) = 6$$

$$\omega_2 = 9$$

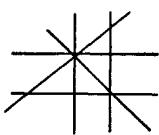
$$\phi_3 = 14$$


 $[2^{11}]$ 
 $u_9$ 

$$\dim(I_2^3) = 14$$

$\omega_2 = 11$

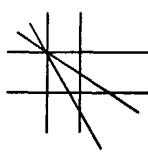
$\phi_3 = 10$


 $[2^4 3^1 4^1]$ 
 $u_{10}$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$\omega_2 = 9$

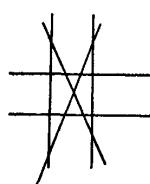
$\phi_3 = 16$


 $[2^7 4^1]$ 
 $u_{11}$ 

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$\omega_2 = 10$

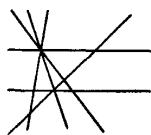
$\phi_3 = 12$


 $[2^{13}]$ 
 $u_{12}$ 

$$\dim(I_2^3) = 8$$

$\omega_2 = 13$

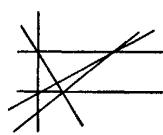
$\phi_3 = 4$


 $[2^5 3^1 4^1]$ 
 $u_{13}$ 

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$\omega_2 = 10$

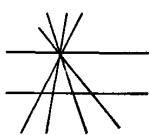
$\phi_3 = 12$


 $[2^2 3^4]$ 
 $u_{14}$ 

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$\omega_2 = 10$

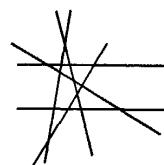
$\phi_3 = 12$


 $[2^4 5^1]$ 
 $u_{15}$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$\omega_2 = 8$

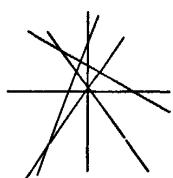
$\phi_3 = 22$


 $[2^{14}]$ 
 $u_{16}$ 

$$\dim(I_2^3) = 4$$

$\omega_2 = 14$

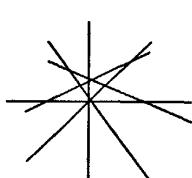
$\phi_3 = 2$


 $[2^9 4^1]$ 
 $u_{17}$ 

$$\dim(I_2^3) = 10$$

$\omega_2 = 12$

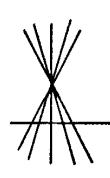
$\phi_3 = 8$


 $[2^6 3^1 4^1]$ 
 $u_{18}$ 

$$\dim(I_2^3) = 14$$

$\omega_2 = 11$

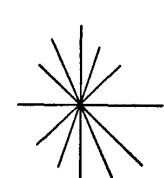
$\phi_3 = 10$


 $[2^5 5^1]$ 
 $u_{19}$ 

$$\dim(I_2^3) = 16$$

$\omega_2 = 9$

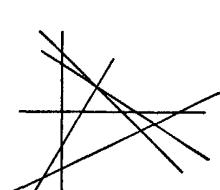
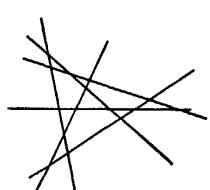
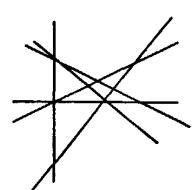
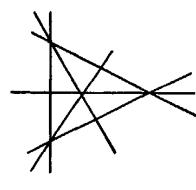
$\phi_3 = 20$


 $[6^1]$ 
 $u_{20}$ 

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$\omega_2 = 5$

$\phi_3 = 40$



$[2^3 3^4]$

$[2^6 3^3]$

$[2^{15}]$

$[2^{12} 3^1]$

$u_{21}$

$u_{22}$

$u_{23}$

$u_{24}$

$$\dim(I_2^3) = 14$$

$$\dim(I_2^3) = 12$$

$$\dim(I_2^3) = 0$$

$$\dim(I_2^3) = 4$$

$$\omega_2 = 11$$

$$\omega_2 = 12$$

$$\omega_2 = 15$$

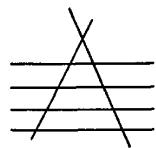
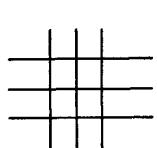
$$\omega_2 = 14$$

$$\phi_3 = 10$$

$$\phi_3 = 6$$

$$\phi_3 = 0$$

$$\phi_3 = 2$$



$[2^9]$

$u_{25-1}$

$u_{25-2}$

$$\dim(I_2^3) = 20$$

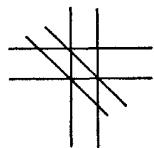
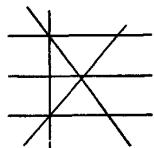
$$\dim(I_2^3) = 16$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\phi_3 = 16$$

$$\phi_3 = 20$$



$[2^3 3^3]$

$u_{26-1}$

$u_{26-2}$

$$\dim(I_2^3) = 20$$

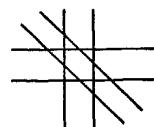
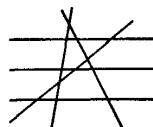
$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\omega_2 = 9$$

$$\phi_3 = 16$$

$$\phi_3 = 16$$



$[2^{12}]$

$u_{27-1}$

$u_{27-2}$

$$\dim(I_2^3) = 10$$

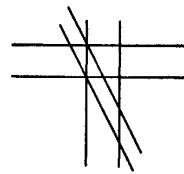
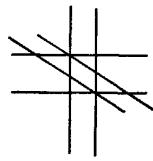
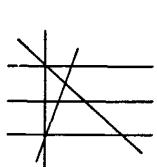
$$\dim(I_2^3) = 12$$

$$\omega_2 = 12$$

$$\phi_3 = 8$$

$$\omega_2 = 12$$

$$\phi_3 = 6$$



$$[2^6 3^2]$$

$$u_{28-1}$$

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$$\omega_2 = 10$$

$$\phi_3 = 12$$

$$u_{28-2}$$

$$\dim(I_2^3) = 20$$

$$\omega_2 = 10$$

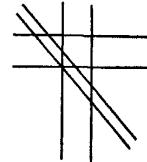
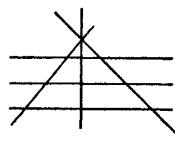
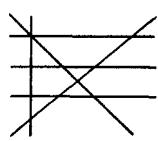
$$\phi_3 = 10$$

$$u_{28-3}$$

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$$\omega_2 = 10$$

$$\phi_3 = 12$$



$$[2^9 3^1]$$

$$u_{29-1}$$

$$\dim(I_2^3) = 14$$

$$\omega_2 = 11$$

$$\phi_3 = 10$$

$$u_{29-2}$$

$$\dim(I_2^3) = 14$$

$$\omega_2 = 11$$

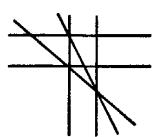
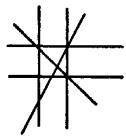
$$\phi_3 = 10$$

$$u_{29-3}$$

$$\dim(I_2^3) = 16$$

$$\omega_2 = 11$$

$$\phi_3 = 8$$



$$[2^4 3^3]$$

$$u_{30-1}$$

$$\dim(I_2^3) = 18$$

$$\omega_2 = 10$$

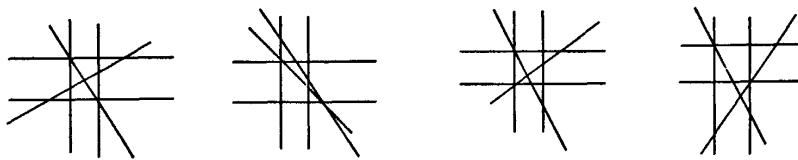
$$\phi_3 = 12$$

$$u_{30-2}$$

$$\dim(I_2^3) = 18$$

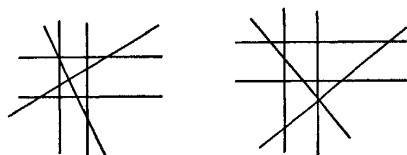
$$\omega_2 = 10$$

$$\phi_3 = 12$$



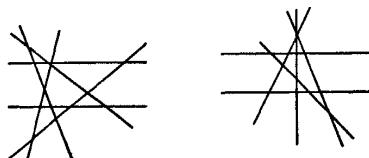
$[2^7 3^2]$

$u_{31-1}$	$u_{31-2}$	$u_{31-3}$	$u_{31-4}$
$\dim(I_2^3) = 16$	$\dim(I_2^3) = 16$	$\dim(I_2^3) = 16$	$\dim(I_2^3) = 16$
$\omega_2 = 11$	$\omega_2 = 11$	$\omega_2 = 11$	$\omega_2 = 11$
$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 8$



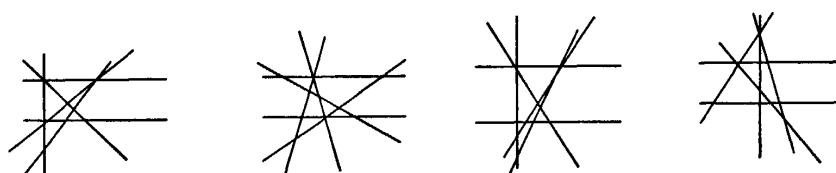
$[2^{10} 3^1]$

$u_{32-1}$	$u_{32-2}$
$\dim(I_2^3) = 12$	$\dim(I_2^3) = 12$
$\omega_2 = 12$	$\omega_2 = 12$
$\phi_3 = 6$	$\phi_3 = 6$



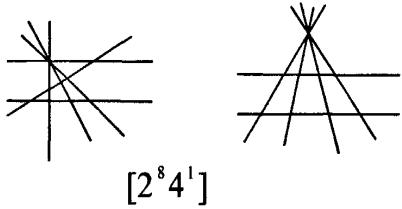
$[2^{11} 3^1]$

$u_{33-1}$	$u_{33-2}$
$\dim(I_2^3) = 8$	$\dim(I_2^3) = 8$
$\omega_2 = 13$	$\omega_2 = 13$
$\phi_3 = 4$	$\phi_3 = 4$



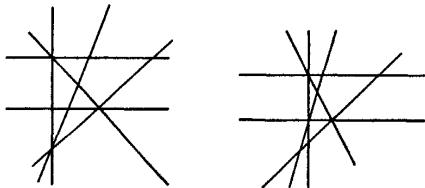
$[2^8 3^2]$

$u_{34-1}$	$u_{34-2}$	$u_{34-3}$	$u_{34-4}$
$\dim(I_2^3) = 12$	$\dim(I_2^3) = 12$	$\dim(I_2^3) = 12$	$\dim(I_2^3) = 12$
$\omega_2 = 12$	$\omega_2 = 12$	$\omega_2 = 12$	$\omega_2 = 12$
$\phi_3 = 6$	$\phi_3 = 6$	$\phi_3 = 6$	$\phi_3 = 6$



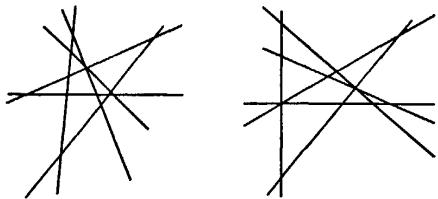
$[2^8 4^1]$

$u_{35-1}$	$u_{35-2}$
$\dim(I_2^3) = 14$	$\dim(I_2^3) = 14$
$\omega_2 = 11$	$\omega_2 = 11$
$\phi_3 = 10$	$\phi_3 = 10$



$[2^5 3^3]$

$u_{36-1}$	$u_{36-2}$
$\dim(I_2^3) = 16$	$\dim(I_2^3) = 16$
$\omega_2 = 11$	$\omega_2 = 11$
$\phi_3 = 8$	$\phi_3 = 8$



$[2^9 3^2]$

$u_{37-1}$	$u_{37-2}$
------------	------------

$$\dim(I_2^3) = 8 \quad \dim(I_2^3) = 8$$

$$\omega_2 = 13 \quad \omega_2 = 13$$

$$\phi_3 = 4 \quad \phi_3 = 4$$

图形	维数
$u_{23}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 0$
$u_{16} \ u_{24}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 4$
$u_8$	$\text{Dim}(I_2^3) = 6$
$u_{12} \ u_{33-1} \ u_{33-2} \ u_{37-1} \ u_{37-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 8$
$u_{17} \ u_{27-1}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 10$
$u_{22} \ u_{27-2} \ u_{32-1} \ u_{32-2} \ u_{34-1} \ u_{34-2} \ u_{34-3} \ u_{34-4}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 12$
$u_9 \ u_{18} \ u_{21} \ u_{29-1} \ u_{29-2} \ u_{35-1} \ u_{35-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 14$
$u_{19} \ u_{25-2} \ u_{29-3} \ u_{31-1} \ u_{31-2} \ u_{31-3} \ u_{31-4} \ u_{36-1} \ u_{36-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 16$
$u_4 \ u_{11} \ u_{13} \ u_{14} \ u_{28-1} \ u_{28-3} \ u_{30-1} \ u_{30-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 18$
$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_{10} \ u_{15} \ u_{20} \ u_{25-1} \ u_{26-1} \ u_{26-2} \ u_{28-2}$	$\text{Dim}(I_2^3) = 20$

图形	$\phi_3$ 不变量
$u_{23}$	0
$u_{16} \ u_{24}$	2
$u_{12} \ u_{33-1} \ u_{33-2} \ u_{37-1} \ u_{37-2}$	4
$u_{22} \ u_{27-2} \ u_{32-1} \ u_{32-2} \ u_{34-1} \ u_{34-2} \ u_{34-3} \ u_{34-4}$	6
$u_{17} \ u_{27-1} \ u_{29-3} \ u_{31-1} \ u_{31-2} \ u_{31-3} \ u_{31-4} \ u_{36-1} \ u_{36-2}$	8
$u_9 \ u_{18} \ u_{21} \ u_{28-2} \ u_{29-1} \ u_{29-2} \ u_{35-1} \ u_{35-2}$	10
$u_4 \ u_{11} \ u_{13} \ u_{14} \ u_{28-1} \ u_{28-3} \ u_{30-1} \ u_{30-2}$	12
$u_8$	14
$u_6 \ u_7 \ u_{10} \ u_{25-1} \ u_{26-1} \ u_{26-2}$	16
$u_{25-2} \ u_{19}$	20
$u_3 \ u_5 \ u_{15}$	22
$u_2 \ u_{20}$	40
$u_1$	70



### 第三章 几类特殊的直线构形的 $\phi_3$ 不变量

对于平面上几类特殊的直线构形，我们可以根据其拓扑性质的特殊性证明  $\phi_3$  不变量的计算公式。另外，我们考虑了特殊的完全图构形的情形。具体的分析过程如下。

#### 3.1 简单直线构形的 $\phi_3$ 不变量

(1) 所有的直线都平行

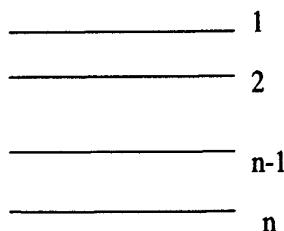


图 3-1 平面直线构形

Fig.3-1 plane line arrangement

在这种情形下，容易得到：

$B \cap C = \{0\}$ ,  $B \cap D = \{0\}$ ,  $|B_3| = C_n^3$ ,  $C_3 = \emptyset$ ,  $D_3 = \emptyset$ ,  $w_2 = 0$ ,  $\dim(I_2^3) = C_n^3$ , 可以得到结果为：

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3) = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim E^3 - \dim I_2^3 \\ &= 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n}{3} - \binom{n}{3} = 2 \binom{n+1}{3}\end{aligned}$$

(2) 所有的直线相交于一点

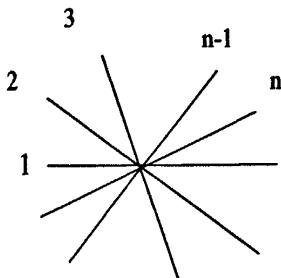


图 3-2 平面直线构形

Fig.3-2 plane line arrangement

在这种情形下， $B_3 = \emptyset$ ,  $w_2 = n-1$ ,  $\dim(I_2^3) = C_n^3$

可以得到结果为：

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2\binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3) = 2\binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim E^3 - \dim I_2^3 \\ &= 2\binom{n+1}{3} - n \cdot (n-1) + \binom{n}{3} - \binom{n}{3} = 2\binom{n}{3}\end{aligned}$$

(3)  $n-1$  条直线平行，第  $n$  条直线与前  $n-1$  条直线均相交

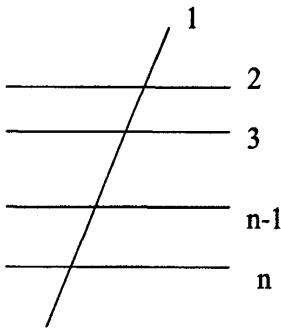


图 3-3 平面直线构形

Fig.3-3 plane line arrangement

在这种情形下， $B \cap C = \{0\}, B \cap D = \{0\}, |B_3| = C_n^3, C_3 = \phi, D_3 = \phi$ ，

$w_2 = n-1, \dim(I_2^3) = C_n^3$ ，可以得到结果为：

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2\binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3) = 2\binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim E^3 - \dim I_2^3 \\ &= 2\binom{n+1}{3} - n \cdot (n-1) + \binom{n}{3} - \binom{n}{3} = 2\binom{n}{3}\end{aligned}$$

(4)  $n-1$  条直线相交于一点，第  $n$  条直线与前  $n-1$  条直线均相交

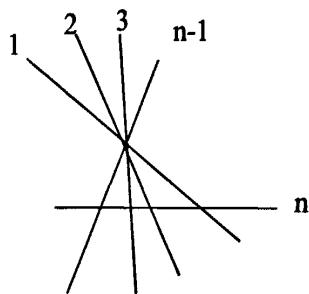


图 3-4 平面直线构形

Fig.3-4 plane line arrangement

在这种情形下,  $D_3 \subset C_3$ ,  $B_3 = \emptyset$ ,  $w_2 = 2n - 3$ ,  $\dim(I_2^3) = C_n^3 - (n-2)$

可以得到结果为:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim E^3 - \dim I_2^3 \\ &= 2 \binom{n+1}{3} - n(2n-3) + \binom{n}{3} - \left( \binom{n}{3} - (n-2) \right) = 2 \binom{n+1}{3} - 2(n-1)^2\end{aligned}$$

## 3.2 计算 $k$ -完全图的 $\phi_3$ 不变量

### 3.2.1 $k$ -完全图的定义说明

对于仿射平面上的直线构形,如果有  $k$  个  $k-1$  重点,除此外任意两直线均有交点,且都是二重简单点,则我们称该构形为  $k$ -完全图构形。根据定义可得该构形的直线条数  $n$  为:  $n = C_k^2$ 。并且该构形中 2 重点的个数  $m$  计算公式为:

$$m = C_n^2 - kC_{k-1}^2 = C_{\frac{k(k-1)}{2}}^2 - kC_{k-1}^2$$

例如: 当  $k=4$  时,  $n = C_4^2 = 6$ ,  $m = C_{\frac{4(4-1)}{2}}^2 - kC_{k-1}^2 = 15 - 4 \times 3 = 3$

### 3.2.2 计算 $k$ -完全图构形 $I_2^3$ 的维数

根据前面的相关结论,  $I_2^3$  的生成元分为了三部分:

$$B_3 = \left\{ e_s (e_{i_1} e_{i_2}) \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \emptyset, s \in [n] \right\}$$

$$C_3 = \left\{ e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3} \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset \right\}$$

$$D_3 = \left\{ e_s \partial(e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\} \right\}$$

记  $B, C, D$  分别是  $B_3, C_3, D_3$  生成的子空间  $B = \langle B_3 \rangle, C = \langle C_3 \rangle, D = \langle D_3 \rangle$

则  $I_2^3$  维数计算过程分为三部分,说明如下:

(1) 由于该完全图中任意两条直线均有交点,无平行线,从而可以得到:

$$B_3 = \left\{ e_s (e_{i_1} e_{i_2}) \mid H_{i_1} \cap H_{i_2} = \emptyset, s \in [n] \right\} = \emptyset \Rightarrow B = \{0\}$$

(2) 根据定义有:  $C = \langle C_3 \rangle$ ,  $C_3 = \{e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3} \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, j_1, j_2, j_3 \in [n]\}$

下面说明  $C$  中生成元的个数为  $k \times C_{k-1}^3$ 。

由于每个  $k-1$  重点包括  $k-1$  条直线, 从中选出 3 条直线即得到了  $C$  的一个生成元, 共有  $C_{k-1}^3$  个生成元  $e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3}$ , 且它们是两两互异的。又因为该完全图中有  $k$  个  $k-1$  重点, 则可以得到:  $C$  的生成元共有  $k \times C_{k-1}^3$  个。

(3)  $D_3 = \{e_s \partial(e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\}\}$ , 其中外积的计算结果为:

$$e_s \partial e_{j_1j_2j_3} = e_s \partial(e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3}) = e_s e_{j_2}e_{j_3} - e_s e_{j_1}e_{j_3} + e_s e_{j_1}e_{j_2}$$

对于  $C$  中的每个生成元,  $D$  中增加了生成元  $n-3$  个。例如, 对于  $e_{j_1}e_{j_2}e_{j_3} \in C_3$ ,  $D$  中对应的生成元组成的集合为:  $D_{j_1j_2j_3} = \{e_s e_{j_2}e_{j_3} - e_s e_{j_1}e_{j_3} + e_s e_{j_1}e_{j_2}, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\}\}$ 。并且, 该对应的生成元集合  $D_{j_1j_2j_3}$  的元素可以分为 2 部分:

$$(i) \quad D_{j_1j_2j_3}^1 = \{e_s e_{j_2}e_{j_3} - e_s e_{j_1}e_{j_3} + e_s e_{j_1}e_{j_2}, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\} \text{ 且 } H_s \cap H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset\}$$

因为  $H_s \cap H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset$ , 则可推得  $e_s e_{j_2}e_{j_3}, e_s e_{j_1}e_{j_3}, e_s e_{j_1}e_{j_2} \in C_3$ , 此时

$$\langle D_{j_1j_2j_3}^1 \rangle + \langle C_{j_1j_2j_3} \rangle = \langle C_{j_1j_2j_3} \rangle$$

$$(ii) \quad D_{j_1j_2j_3}^2 = \{e_s e_{j_2}e_{j_3} - e_s e_{j_1}e_{j_3} + e_s e_{j_1}e_{j_2}, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\} \text{ 且 } H_s \cap H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} = \emptyset\}$$

因此可以得到:  $C + D = \langle C_3 \rangle + \langle D_3 \rangle = \langle C_3 \rangle + (\langle D_{j_1j_2j_3}^1 \rangle \oplus \langle D_{j_1j_2j_3}^2 \rangle) = \langle C_3 \rangle + \langle D_{j_1j_2j_3}^2 \rangle$

并且有  $\dim(C + D) = \dim(\langle C_3 \rangle + \langle D_{j_1j_2j_3}^2 \rangle)$

综上所述:  $\dim(I_2^3) = \dim(B + C + D) = \dim(\langle C_3 \rangle + \langle D_3 \rangle)$

### 3.2.3 $k$ -完全图举例说明

下面对于射影平面 6 直线组成的 4-完全图举例说明。

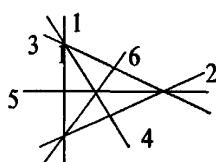


图 3-5 平面直线构形

Fig.3-5 plane line arrangement

将上述图中的直线分别取为：

$$l_1: x=0 \quad l_3: 4x+3y=12 \quad l_5: x+3y=3$$

$$l_2: y=0 \quad l_4: 4x-3y=-12 \quad l_6: x-3y=-3$$

则根据子空间 B, C, D 的定义分别计算其相应的维数可得：

$$B_3 = \left\{ e_s (e_{j_1} e_{j_2}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} = \emptyset, s \in [n] \right\} = \emptyset$$

$$C_3 = \left\{ e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3} \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset \right\} = \{e_1 e_3 e_4, e_1 e_5 e_6, e_2 e_3 e_5, e_2 e_4 e_6\}$$

记相应的矩阵表示如下：

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \left\{ e_s \partial (e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3}) \mid H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap H_{j_3} \neq \emptyset, s \in [n] \setminus \{j_1, j_2, j_3\} \right\} \\ &= \{e_2 \partial (e_1 e_3 e_4), e_5 \partial (e_1 e_3 e_4), e_6 \partial (e_1 e_3 e_4), e_2 \partial (e_1 e_5 e_6), e_3 \partial (e_1 e_5 e_6), e_4 \partial (e_1 e_5 e_6), \\ &\quad e_1 \partial (e_2 e_3 e_5), e_4 \partial (e_2 e_3 e_5), e_6 \partial (e_2 e_3 e_5), e_1 \partial (e_2 e_4 e_6), e_3 \partial (e_2 e_4 e_6), e_5 \partial (e_2 e_4 e_6) \} \\ &= \{e_{234} - e_{214} + e_{213}, e_{534} - e_{514} + e_{513}, e_{634} - e_{614} + e_{613}, e_{256} - e_{216} + e_{215}, e_{356} - e_{316} + e_{315}, \\ &\quad e_{456} - e_{416} + e_{415}, e_{135} - e_{125} + e_{123}, e_{435} - e_{425} + e_{423}, e_{635} - e_{625} + e_{623}, e_{146} - e_{126} + e_{124}, \\ &\quad e_{346} - e_{326} + e_{324}, e_{546} - e_{526} + e_{524}\} \\ &= \{-e_{123} + e_{124} + e_{234}, e_{135} - e_{145} + e_{345}, e_{136} - e_{146} + e_{346}, -e_{125} + e_{126} + e_{256}, -e_{135} + e_{136} + e_{356}, \\ &\quad -e_{145} + e_{146} + e_{456}, e_{123} - e_{125} + e_{135}, e_{234} + e_{245} - e_{345}, e_{236} - e_{256} + e_{356}, e_{124} - e_{126} + e_{146}, \\ &\quad -e_{234} + e_{236} + e_{346}, e_{245} + e_{256} - e_{456}\} \end{aligned}$$

记相应的矩阵表示如下：

$$A_D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

经过计算可得:  $\text{rank}(A_{BCD})=14$

从而可以得到:  $\dim(B+C+D)=14$

则有:  $\dim I_2^3=14$

另外, 根据相关的算法计算可得:

$$\omega_2 = \binom{6}{2} - 4 = 15 - 4 = 11$$

从而可以得到最终的计算结果为:

$$\phi_3 = 2 \binom{n+1}{3} - n \cdot w_2 + \dim(OS_2^3) = 2 \binom{7}{3} - 6 \times 11 + \left( \binom{6}{3} - 14 \right) = 10$$

## 第四章 射影平面上特殊直线构形的特征多项式

由于三维空间的中心构形可以射影化为射影平面上的直线构形，再根据这两种构形的特征多项式的关系，可以直接计算三维空间中的中心构形的特征多项式。

### 4.1 三维空间中特征多项式的算法

根据 Whitney 定理，构形的特征多项式的计算方法如下。

设  $\mathcal{A}$  为  $n$  维向量空间中的构形，则

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ 为 中 心 构 形}}} (-1)^{\# \mathcal{B}} t^{n - \text{rank}(\mathcal{B})}$$

在三维向量空间中，子构形  $\mathcal{B}$  依次取为  $\mathcal{A}$  中所有的中心子构形，从而可以得到：

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - nt^2 + m_1 t - m_0,$$

其中  $m_1 = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \text{rank}(\mathcal{B})=2} (-1)^{\# \mathcal{B}}$ ， $m_0 = - \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \text{rank}(\mathcal{B})=3} (-1)^{\# \mathcal{B}}$ 。特殊情形下，若构形  $\mathcal{A}$  是中心

构形，则可以得到公式： $1 - n + m_1 - m_0 = 0$ 。

对于三维空间中的中心构形，根据其特殊的性质，其特征多项式的计算会进一步简化。具体如下：首先可以根据射影图形中交点（或者重线）的数目，来计算  $m_1$ ，接着利用公式  $1 - n + m_1 - m_0 = 0$  可求解得到  $m_0$ ，从而得到最终结果。另外，我们对于有一定规律的构形的特征多项式进行了归纳证明，进而得到了通用的计算公式。

### 4.2 特殊直线构形的特征多项式

#### 4.2.1 特殊平面直线构形

此处选取的研究对象为这样一类特殊的平面中心构形，即该构形在二维平面上的射影图是完全  $K_n$  点图，满足：

- (1) 图形中含有  $k$  个  $k-1$  重点，分别记号为  $A_1, A_2 \dots, A_k$
- (2)  $k$  个点  $A_1, A_2 \dots, A_k$  中的任意两点之间均有连线，并且所有的交点中除  $A_1, A_2 \dots, A_k$ （即  $k-1$  重点）外都是 2 重点

$k=3, 4$  时的完全图如下所示:

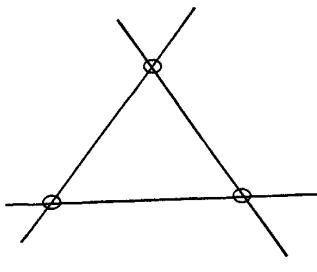


图 4-1  $k_3$  完全图

Fig.4-1  $k_3$  complete graph arrangement

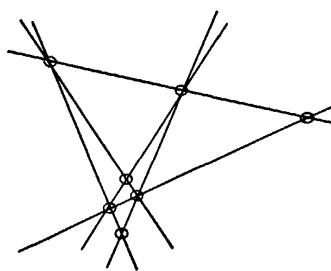


图 4-2  $k_4$  完全图

Fig.4-2  $k_4$  complete graph arrangement

#### 4.2.2 计算结果

根据已有的结论, 在三维向量空间中, 记  $L(\mathcal{A})$  为平面构形  $\mathcal{A}$  的相交格。设  $X \in L(\mathcal{A})$  且  $rk(X)=2$ 。若  $|\mathcal{B}_X|=i$ , 则称  $X$  为  $i$  重线。设  $X \in L(\mathcal{A})$  且  $rk(X)=3$ 。若  $|\mathcal{B}_X|=i$ , 则称  $X$  为  $i$  重点。显然有  $m_1=1 \times 2$  重线个数 +  $2 \times 3$  重线个数 +  $\cdots + (k-1) \times k$  重线个数 +  $\cdots$ 。若  $m$  重点个数为  $n$ , 记为  $m^n$ 。因此假设该类构形中直线的总数为  $n_k$ ,  $2$  重点的个数为  $a_k$ , 则由上述结论可得:

$$n_k = C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1)$$

$$m_1 = 1 \times a_k + (k-2) \times k = a_k + k(k-2)$$

$$m_0 = 1 - n_k + m_1 = 1 - \frac{1}{2}k(k-1) + a_k + k(k-2)$$

并且经过归纳证明可得:

$$a_k = \binom{n_k}{2} - k \binom{k-1}{2}$$

因此可得, 该类构形的特征多项式为:

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= t^3 - nt^2 + m_1 t - m_0 \\
&= t^3 - nt^2 + (a_k + k(k-2))t - \left(1 - \frac{1}{2}k(k-1) + a_k + k(k-2)\right) \\
&= t^3 - nt^2 + \left(\left(\binom{n_k}{2} - k\binom{k-1}{2}\right) + k(k-2)\right)t - \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{2}k(k-1) + \left(\binom{n_k}{2} - k\binom{k-1}{2}\right) + k(k-2)\right)
\end{aligned}$$

举例说明, 当  $k=4$  时, 完全图的特征多项式的计算如下:

$$n_k = \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$a_k = \binom{n_k}{2} - k\binom{k-1}{2} = \frac{6 \times 5}{2} - 4 \times \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$m_1 = a_k + k(k-2) = 3 + 4 \times 2 = 11$$

$$m_0 = 1 - n_k + m_1 = 1 - 6 + 11 = 6$$

$$\chi_A(t) = t^3 - nt^2 + m_1 t - m_0 = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$$



## 参 考 文 献

- [1] Stanley R P. An introduction of hyperplane arrangements [M]. Washington: IAS/Park City Mathematics Series, 2004
- [2] Falk M. Combinatorial and Algebraic Structure in Orlik-Solomon Algebras[J]. Europ Combi-natorics, 2001, 22: 687-698
- [3] Falk M. On the algebra associated with a geometric lattice[J]. Adv Math, 1989, 80: 152-163.
- [4] Falk M. Arrangements and cohomology[J]. Ann Comb, 1997, 1: 135-157
- [5] Falk M. Homotopy types of line arrangements[J]. Invent.Math.111(1993)139-150
- [6] Orlik P, Solomon L. Topology and combinatorics of complements of hyperplanes[J]. Invent.Math.56(1980)167-189
- [7] White H. S. The plane figure of seven real lines. Bull. Amer. Math. Soc., Volume 38, Number 2 (1932), 59--65
- [8] 梅向明, 刘增贤, 林向岩. 高等几何[M]. 高等教育出版社, 1983年
- [9] 董芸, 姜广峰. 一类混杂构形的特征多项式[J]. 北京化工大学学报, 2007, 34 (2) , 207-210
- [10] 张曦, 姜广峰. 超平面构形的  $\phi_3$  不变量的一个算法[J]. 北京化工大学学报, 2007, 34 (4) , 446-448
- [11] 张爽, 裴东河, 高瑞梅. 广义p-通有中心平行构形[J]. 山东大学学报, 2010, 45 (8) , 32-35
- [12] 章江华, 姜广峰. Orlik-Solomon代数的NBC基的一个算法[J]. 北京化工大学学报, 2005, 32 (1) , 85-89
- [13] 徐建强, 姜广峰. 二重自由构形导子基的一个算法[J]. 北京化工大学学报, 2006, 33 (6) , 82-85
- [14] Orlik P, Terao H. Arrangements of hyperplanes [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992:1-167
- [15] 孙克宽, 郭驼英, 梁肇军. 拓扑学[M]. 华中师范大学出版社, 2002
- [16] David Garber, Mina Teicher, Uzi Vishne.  $\pi_1$ -classification of real Arrangements with up to eight lines[J]. Topology , 2003, 42: 265-289
- [17] Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras [M].Cambridge Univ.Press,1990
- [18] Yuzvinsky S. Orlik-Solomon algebra in algebra and topology [J]. Russian Math Surveys, 2001,56(2):293-364
- [19] Zaslavsky T. Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes[J]. Memoirs Amer. Math. Soc.154(1975)
- [20] Falk M. On the algebra associated with a geometric lattice [J]. Adv.Math.80(1989)152-163
- [21] K.-M.Fan. Position of singularities and fundamental group of the complement of a union of lines [J]. Proc.Amer.Math.Soc.124 No.11 (1996) 3299-3303
- [22] 杨子胥. 近世代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000
- [23] 莫宗监. 代数学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1986
- [24] Jambu M, Terao H. Arrangements of hyperplanes and broken circuits [J]. Contemporary Math, 1990, 900: 147-162

- [25] Stanley R. Hyperplane arrangements, interval orders, and trees [J]. Proc. Nat. Acad. Sci, 1996, 93: 2620-2625
- [26] Brylawski T. The broken circuit complex[J]. Tram. Amer. Math. Soc. 1997. 234(2): 417-433

## 附录

计算  $\phi$  不变量的算法程序包含以下三个函数：

```

function [e] = order(i, j, k)
%将 i, j, k 经过数次置换, 由小到大排序, 并
返回置换的次数 e

e = 0;
a = 0;
A = [i, j, k];
if A(1)>A(2)
    a = A(1); A(1) = A(2); A(2) = a;
    e = e+1;
end
if A(2)>A(3)
    a = A(2); A(2) = A(3); A(3) = a;
    e = e+1;
end
if A(1)>A(2)
    a = A(1); A(1) = A(2); A(2) = a;
    e = e+1;
end
end

function [loca] = Loca(i, j, k)
%计算[i, j, k]数组在整个大矩阵中的列位置,
填充 1 或者-1, 剩下的未填充的是 0

n = 6;
e = 0;
A = [i, j, k];
if A(1)>A(2)
    a = A(1); A(1) = A(2); A(2) = a;
    e = e+1;
end
if A(2)>A(3)
    a = A(2); A(2) = A(3); A(3) = a;
    e = e+1;
end
if A(1)>A(2)
    a = A(1); A(1) = A(2); A(2) = a;
    e = e+1;
end
end

i = A(1); j = A(2); k = A(3);
loca = 0;
for m = 1:(i-1)
    loca = loca+(n-m)*(n-m-1)/2;
end
if j-i>=2
    for m = (i+1):(j-1)
        loca = loca+(n-m);
    end
end
if k-j>=1
    loca = loca+(k-1-j);
end
loca = loca+1;

```

```

function dimI232()
%
%===== n=5 =====
%
A = [0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1]
b = [4; 3; 2; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 1 0]
b = [4; 3; 2; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0]
b = [2; 1; 0; 0; 1]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1]
b = [2; 1; 0; 0; 3]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1]
b = [1; 0; -1; 0; 1]

A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1]
b = [1; -1; 1; -1; 0]

A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 2]
b = [1; -1; 1; -1; 1]

A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 3]
b = [1; -1; 1; -1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 -1; 1 1]
b = [0; 0; -1; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 2 2; 4 -4]
b = [0; 0; -1; -1; 3]

A = [0 1; 0 1; 1 -1; 1 1; 1 -2]
b = [0; -1; 0; 0; 2]

A = [0 1; 0 1; 2 -2; 2 1; 1 2]
b = [0; 0; 1; 2; 3]

%
%===== n=6 =====
%
A = [0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 1 0]
b = [5; 4; 3; 2; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 1 1; 1 -1]
b = [0; -1; -2; -3; 0; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1]
b = [0; -1; -3; 1; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 0]
b = [5; 4; 3; 2; 1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1]
b = [1; -1; -3; 1; -1; 0]

A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 1 -1]
b = [0; -1; -2; 0; 0; 0]

A = [0 1; 1 0; 0 1; 0 1; 1 1; 1 -1]
b = [-1; 1; -1; 1; 0; 0]

```

%9

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1]$$

$$b = [1; -1; -3; 1; -1; -1]$$

$$A = [1 0; 0 1; 1 1; 1 -1; 1 -2; 1 2]$$

$$b = [-2; 0; 0; -2; 2]$$

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 -1]$$

$$b = [1; -1; -1; 1; 0; -2]$$

$$A = [0 1; 1 0; 1 1; 3 8; 3 -2; 1 -3]$$

$$b = [0; 0; 2; 12; 1; 3]$$

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1; 1 2]$$

$$b = [1; -2; -1; 1; -1; 1]$$

$$A = [1 0; 0 1; 1 1; 2 -1; 1 2; 1 -2]$$

$$b = [0; 0; 2; 1; 3; 4]$$

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 -1; 2 1]$$

$$b = [1; -1; 1; -1; 0; 0]$$

%—————

%25-1

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 0]$$

$$b = [3; 2; 1; 3; 2; 1]$$

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1; 2 -5]$$

$$b = [0; -1; 0; 0; 0; 6]$$

%—————

%25-2

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 0 1; 1 1; 1 -1]$$

$$A = [0 1; 0 1; 1 1; 1 -1; 1 0; 1 -2]$$

$$b = [0; -1; 0; 2; 0; 2]$$

$$b = [-1; -2; -3; -4; 0; 0]$$

%26-1

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 1 -1]$$

$$b = [1; 0; -1; -1; 0; 0]$$

%26-2

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 1]$$

$$b = [-1; 1; -1; 1; 0; -2]$$

%27-1

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 2 -2]$$

$$b = [1; 0; -1; 0; 2; 1]$$

%27-2

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 1]$$

$$b = [2; -1; -2; 1; -2; 2]$$

%28-1

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 4 -1]$$

$$b = [0; -1; -2; 0; 0; 2]$$

%28-2

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 1]$$

$$b = [1; -3; -1; 1; 0; -2]$$

%28-3

$$A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 1]$$

$$b = [1; 0; 1; -1; 0; -1]$$

%—————

%29-1

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 1 -1]$$

$$b = [0; -1; -2; 0; 0; 3]$$

%29-2

$$A = [0 1; 0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 1 -1]$$

$$b = [0; 0; 12; -12; 3; -3]$$

```

b = [-1; -2; -3; 0; 0; 0] %34-3
%29-3
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 2 2]
b = [1; -1; 1; -1; -2; -1] %34-4
%30-1
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 2 -1]
b = [1; -1; 1; -1; 0; 1] %35-1
%30-2
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1; 1 1]
b = [-1; 1; -1; 0; -1; -2] %35-2
%31-1
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 -2] %36-1
b = [1; -1; 1; -1; 0; 0] %36-1
%31-2
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 2; 3 4] %36-2
b = [1; -1; 1; -1; 1; 5] %36-2
%31-3
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 -2; 3 2] %37-1
b = [1; -1; 1; -1; 1; -1] %37-1
%31-4
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1; 1 -1] %37-2
b = [1; -1; 1; -1; -1; 2] %37-2
%32-1
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 2 1; 1 -2] %37-2
b = [1; -1; 1; -1; -1; 2] %37-2
%32-2
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 0; 1 1; 1 -1] %37-2
b = [1; -1; 1; -1; -1; 3] %37-2
n = length(A); %33-1
%33-1
A = [0 1; 0 1; 1 1; 1 -1; 1 2; 1 -2] %LL[] 表示平行的两直线的数组对
LL = [];
b = [1; -1; 0; 0; 3; 4] A2 = [];%系数矩阵
%33-2 A2b = [];%增广矩阵
A = [0 1; 0 1; 1 0; 1 1; 1 -1; 1 3] m = 0;
b = [-1; -3; 0; 0; 0; -8] for i = 1:n
for j = i+1:n
A2 = [A(i,:); A(j,:)];
A2b = [A(i,:)*b(i,1); A(j,:)*b(j,1)];
if rank(A2b) == 2 && rank(A2) == 1 %两直线平行的条件
m = m+1;
LL(m,1) = i;
end
end

```

```

LL(m,2) = j;
end
end
end
LL
%B3 的生成元组成的矩阵
B3 = [];
m1 = 0;
for i = 1:m
    for j = 1:n
        if j~=LL(i,1) && j~=LL(i,2)
            m1 = m1+1;
            B3(m1,:) = [LL(i,1), LL(i,2), j];
        end
    end
end
B3
Cn3 = n*(n-1)*(n-2)/6;
%计算 AB3 矩阵
AB3 = [];
for i = 1:m1
    for j = 1:Cn3;
        AB3(i, j) = 0;
    end
end
for i = 1:m1
    e = order(B3(i,1), B3(i,2), B3(i,3));
    loca = Loca(B3(i,1), B3(i,2), B3(i,3));
    AB3(i, loca) = (-1)^e;
end
dimB3 = rank(AB3);
dimB3
CCC = [] %存储三直线相交于一点的数组矩阵
A2 = []; A2b = [];
m2 = 0;
PPRO = 0;
for i = 1:n
    for j = i+1:n
        for k = j+1:n
            A2 = [A(i,:); A(j,:); A(k,:)];
            A2b = [A(i,:)*b(i,1); A(j,:)*b(j,1);
                    A(k,:)*b(k,1)];
            A21 = [A(i,:); A(j,:)];
            A2b1 = [A(i,:)*b(i,1); A(j,:)*b(j,1)];
            A22 = [A(i,:); A(k,:)];
            A2b2 = [A(i,:)*b(i,1); A(k,:)];
            A23 = [A(j,:); A(k,:)];
            A2b3 = [A(j,:)*b(j,1); A(k,:)];
            b(k,1)];
            if (rank(A2b1)==2) &&
                rank(A21)==1|| (rank(A2b2)==2) &&
                rank(A22)==1|| (rank(A2b3)==2) &&
                rank(A23)==1)%两直线平行的条件
                PPRO = 1;
            end
            [i j k PPRO]
            if rank(A2)==2 && rank(A2b)==2
                && PPRO==0
                m2 = m2+1;
                CCC(m2, 1) = i;
                CCC(m2, 2) = j;
                CCC(m2, 3) = k;
            end
            PPRO = 0;
        end
    end
    CCC
    %计算 AC3 矩阵
    AC3 = [];
    for i = 1:m2
        for j = 1:Cn3
            AC3(i, j) = 0;
        end
    end
    for i = 1:m2
        e = order(CCC(i,1), CCC(i,2), CCC(i,3));
        loca = Loca(CCC(i,1), CCC(i,2), CCC(i,3));
        AC3(i, loca) = (-1)^e;
    end
    %计算 AD3 矩阵
    m3 = 0;
    Ad3 = [];
    AD3 = zeros(1, Cn3);

```

```

for i = 1:m2
    for j = 1:n
        if j==CCC(i,1) && j==CCC(i,2) &&
j==CCC(i,3)
            m3 = m3+1;
            j;
            loca = Loca(j, CCC(i,2),
CCC(i,3));
            e = order(j, CCC(i,2), CCC(i,3));
            AD3(m3, Loca(j, CCC(i,2),
CCC(i,3))) = (-1)^order(j, CCC(i,2), CCC(i,3));
            AD3(m3, Loca(j, CCC(i,1),
CCC(i,3))) = (-1)^order(j, CCC(i,1),
CCC(i,3))+1;
            AD3(m3, Loca(j, CCC(i,1),
CCC(i,2))) = (-1)^order(j, CCC(i,1), CCC(i,2));
        end
    end
end
ACD = [AC3; AD3];
dimCD = rank(ACD); % (C+D) 的维数的计算
dimE1I2 = dimB3+dimCD;
ABCD = [AB3; AC3; AD3];
dimE1I2 = rank(ABCD)
%-----BrC = [];
for i = 1:m+m2
    if i<=m
        BrC(i, 1) = LL(i, 1);
        BrC(i, 2) = LL(i, 2);
    else
        BrC(i, 1) = CCC(i-m, 1);
        BrC(i, 2) = CCC(i-m, 2);
    end
end
k=1;
%BrC2 = BrC(1,:);
%-----
k=0;
K2 = [];
Cn2 = n*(n-1)/2;
for i = 1:(n-1)
    for j = i+1:n
        k = k+1;
        E2(k, 1) = i; E2(k, 2) = j;
    end
end
E2;
w2 = Cn2;
PRO = 0;
for i = 1:k
    for j = 1:m+m2
        if E2(i,1)==BrC(j,1) &&
E2(i,2)==BrC(j,2)
            %E2(i,:)
            %w2 = w2-1
            PRO=1;
            continue;
            BrC(j,:);
        end
    end
    if PRO==1
        w2 = w2-1;
        PRO=0;
    end
    fe3 = n*(n-1)*(n+1)/3-n*w2+(Cn3-dimE1I2)
end

```

## 致 谢

经过三年研究生阶段的学习和研究，籍论文完成之际，我特向指导和帮助我的老师、同学、朋友及关心支持我的家人表达诚挚的谢意。

首先，我要感谢我的导师姜广峰教授。本文是在导师的精心指导下完成的，从论文的选题、设计方案直至完成论文的整个过程中，都得到了姜老师耐心细致的指导。另外，导师严谨的治学态度、认真工作作风、热情待人的品质，都使我受益终生。三年多来，姜老师不仅在科研、学业上对我提出了殷切的期望和严格的要求，而且在生活上给予了极大的关心和帮助。从导师身上，我不仅学到了丰富的专业知识，更学会了在以后的人生道路上如何思考，如何做人。

感谢北京化工大学理学院所有的领导和老师，本科四年以及研究生前两年的基础知识的学习对我非常重要。在学习期间，我得到了黄晋阳教授、牛兴文副教授、施小丁教授、吴开謨教授的帮助和指导，他们孜孜不倦、踏实严谨的科研精神以及诲人不倦、平易近人的优秀品质都深深感染了我，在此表示深深的感谢。

感谢曾共同学习的同学和朋友。他们和本人共同营造的良好的学习和生活环境，在各方面都曾给予我极大的帮助和支持。我向他们表示由衷的感谢和美好的祝愿！

最后，感谢我的家人，这么多年来，正是你们的支持和鼓励，才使我顺利地完成学业；正是你们的关心和默默的奉献，给我创造了优越的条件，使我在学习和生活的道路上乐观向上、勇往直前。



## 研究成果及发表的学术论文



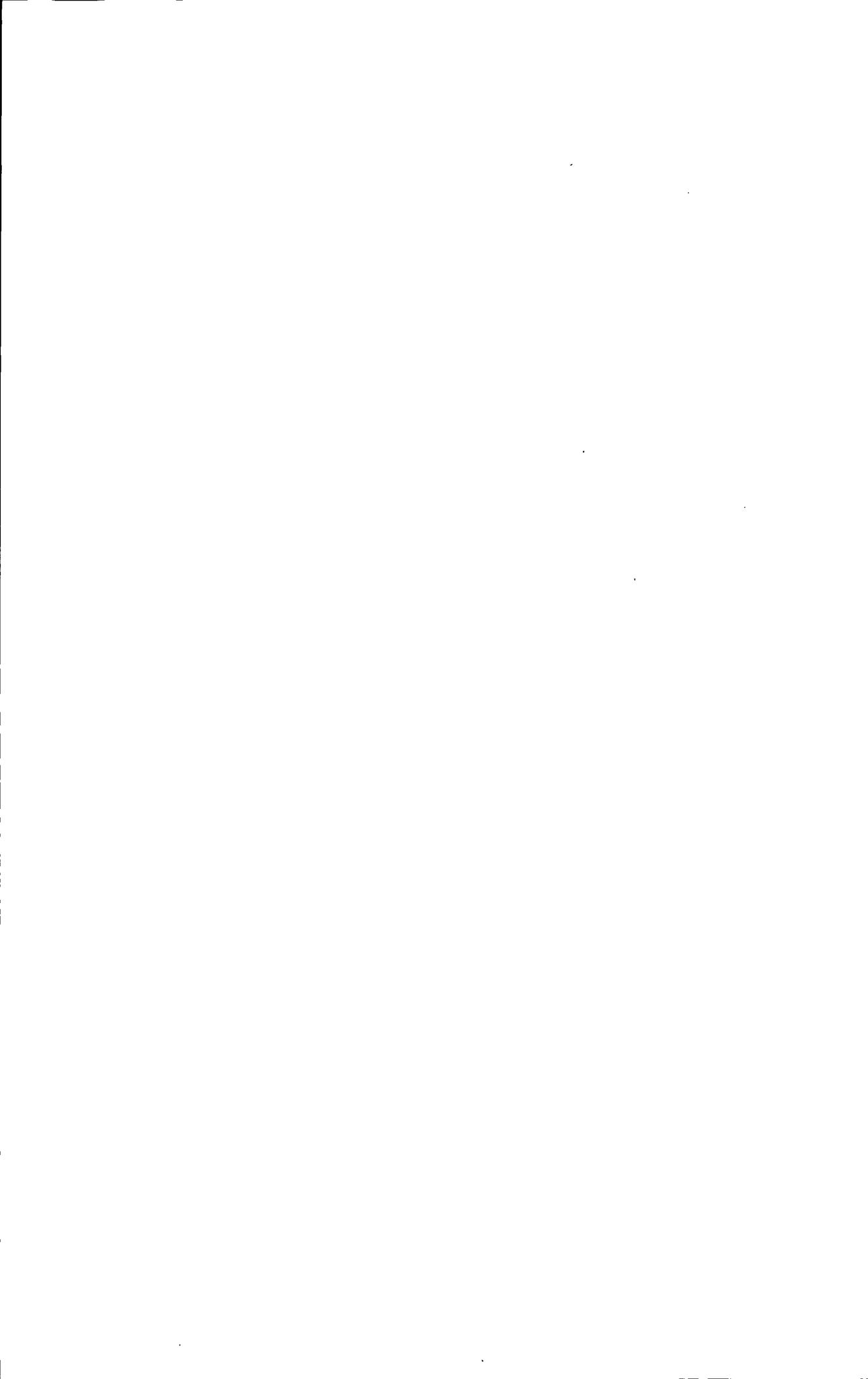
## 作者和导师简介

**作者：**张娟，女，1986年7月生，汉族，山西晋城，2008年毕业于北京化工大学信息与计算科学专业，获得理学学士学位。同年保送本校就读基础数学专业，攻读硕士学位，师从姜广峰教授，硕士期间顺利完成了课题的研究内容。

联系方式：[zhjuanhappy@163.com](mailto:zhjuanhappy@163.com)

**导师：**姜广峰，男，1959年7月生，汉族，辽宁人，博士生导师，北京化工大学教授。1986年7月至2000年3月于锦州师范学院获得讲师、副教授、教授职称。期间1992年2月至1998年2月于荷兰Utrecht大学学习，获得硕士、博士学位。1998年4月至2000年3月在日本学术振兴会资助下在东京都立大学做博士后研究工作。2000年4月至今任北京化工大学教授。先后负责或参加国家自然科学基金委员会资助项目和省部级科研项目10余项，发表科研论文40余篇。

联系方式：[jianggf@mail.buct.edu.cn](mailto:jianggf@mail.buct.edu.cn)



# 北京化工大学

## 硕士研究生学位论文答辩委员会决议书

研究生姓名: 张娟 专业: 基础数学

论文题目: 关于直线构形的  $\phi_3$  不变量

指导教师姓名: 姜广峰 职称: 教授

论文答辩日期: 2011年5月29日 地点: 教学楼123

### 论文答辩委员会成员

姓名	职称	工作单位	本人签名
孙华飞	教授	北京理工大学	孙华飞
杨永愉	教授	北京化工大学	杨永愉
杨丰梅	教授	北京化工大学	杨丰梅
崔丽鸿	教授	北京化工大学	崔丽鸿
赵丽娜	副教授	北京化工大学	赵丽娜

注: 此表用于存档, 除本人签名务必用钢笔填写外, 其余处必须用计算机打印。



答辩委员会对论文的评语（选题意义、文献综述、论文所取得的成果及水平、学风和论文写作水平、论文的不足之处）：

张娟同学的硕士学位论文《关于直线构形的  $\phi_3$  不变量》首先对  $\phi_3$  不变量的算法进行了综合描述，进而选择了仿射平面上不多于六条直线的平面构形进行了分类研究，并依照  $\phi_3$  的值对直线构形进行了分类。期间利用软件编程完成了  $\phi_3$  不变量的通用计算程序。其研究工作具有一定的理论意义，为相关理论的进一步研究奠定了良好的基础。

论文内容涉及面广，工作量和难度大，研究比较深入，体现了作者具有一定的专业基础和强的科研能力。论文构思清晰，依据充分，论证科学合理，有创新性。

根据张娟同学论文质量和答辩中表现，经答辩委员会认真讨论，无记名投票，一致同意张娟通过论文答辩，并建议授予该生理学硕士学位。

对学位论文水平的总体评价	优秀	良好	一般	较差
	✓			

答辩委员会表决结果：

同意授予硕士学位伍票，不同意授予硕士学位 零 票，  
弃权 零 票。根据投票结果，答辩委员会做出建议授予该同学  
硕士学位的决议。

答辩委员会主席签字：

2011 年 5 月 29 日

孙华飞

