

ABSTRACT

With the low-DoF parallel being used for more and more industrial applications, the study of it has recently become a main focus among the robotics research community. A low-DoF parallel manipulator with identical serial limbs is usually an overconstrained mechanism. The traditional mobility analysis theory may leads to a wrong result for the mobility analysis of an overconstrained mechanism. On the other hand, the nonlinear and coupled equations related to the traditional mobility analysis are usually difficult to solved. In this paper, a systematic mobility analysis approach based on screw theory is proposed, and applied to a novel 4-DoF parallel manipulator with identical serial RRCR-limbs.

Firstly, an overview of the recent research about the 4-DoF manipulator is presented. The research achievement and methods of those scholars are then concluded, at last comes out my analysis idea.

Then the theory of screw used in the analysis is introduced, the emphases of which comprise of twist and wrench with their correlative characteristics.

Next an analysis approach based on screw theory is proposed. The DoF number of the platform and the correlative mobility information are provided. The inverse kinematics and forward(or direct)kinematics are presented and proved to be correct in numerical examples. The Jacobian matrix which provides a transformation from the velocity of the end-effector in the Cartesian space to the actuated joint velocities is described, so does the singularity analysis.

Finally, a virtual prototyping is builded in the software of ADAMS, accordingly the relevant measure results such as structural characteristics curves, displacement curves, velocity curves and dynamic curves are put forward.

Additionally, a conclusion is made and the further research directions are pointed out.

Key Word: 4-DoF parallel manipulator, screw theory, kinematics, virtual prototyping technology

第一章 绪论

1.1 课题的背景

机器人学是一门综合性的新兴学科，它涉及机械工程学、电气工程学、微电子工程学、计算机工程学、控制工程学、信息传感工程学、声学工程学、仿生学以及人工智能工程学等多门尖端学科。工业机器人是机器人学的一个分支，它代表了机电一体化的最高成就。随着科学技术的不断发展，工业机器人已成为柔性制造系统（FMS）、自动化工厂（FA）、计算机集成制造系统（CIMS）的自动化工具，广泛运用于点焊、弧焊、喷漆、搬运、装配等工作。广泛应用工业机器人，不仅可提高产品的质量与数量，而且能够充分保障人身安全，改善劳动环境，减轻劳动强度，提高劳动生产率，节约原材料消耗以及降低生产成本。机器人的运用情况，是一个国家工业自动化水平的重要标志。

传统的工业机器人又称为串联机器人，普遍运用于各种工业生产中。但在一些新兴的应用领域内（如飞行员三维空间训练的模拟器和驾驶模拟器），串联机器人刚度低、精度小、动力性能不好和实时反解困难的缺点使其无法适应相应的工作。并联机器人的出现弥补了这一缺陷，极大地扩展了机器人的运用范围。

目前并联机器人的研究领域主要包括 6 自由度并联机器人和少自由度并联机器人（自由度少于 6）。由于 6 自由度并联机器人机构受限于狭小的工作空间、复杂的机械设计以及运动学、动力学求解困难等原因，再加上工业应用中很多时候并不需要机构自由度为 6 的情况，所以少于 6 自由度的并联机器人机构的研究逐渐成为研究的主流，而介于 3 自由度和 6 自由度并联机器人之间的 4 自由度并联机器人也逐渐进入并联机器人的研究领域。在很多工业实际应用中，如机床制造业、激光对准、卫星天线的信号追踪，零件的搬运安装、数控机床换刀、光碟安放等等的场合，如果采用 6 自由度的并联机器人机构，会因铰约束、支链干涉、奇异位形等的影响，使其实现姿态的能力会随着其位置空间的增加而缩减，难以满足多坐标数控作业的实际要求，而且还会增加机器人结构和控制方面的复杂程度。而如果采用 3 自由度的并联机器人又不能满足操作的自由度要求，因此 4 个操作自由度可以弥补 6 自由度的过于臃肿以及 3 自由度的略显不足带来的缺点，在此列举两个例子：

运用之一是用 4 自由度并联机构取代传统的 5 轴联动机床。目前的一般切削过程只需要控制五个轴的进给运动，外加主轴本身的转动就可以达到 6

个自由度, 以加工其工作空间内的任意自由曲面。因此可以设想用四自由度并联平台机构, 给主轴提供四个自由度的进给运动, 同时由装夹工件的工作台实现一个方向的移动, 就可以很方便地做成结构简单、易于控制的五轴联动数控机床。

运用之二是设计 4 个自由度的飞行模拟器。在飞行运动模拟中, 转动自由度起着主要的作用, 而移动自由度则起着相对较小的作用, 但这并不是说移动自由度没有作用, 因为飞行运动中的起伏和平抛仍有不可或缺的显著意义。因此, 在设计飞行运动的模拟平台时, 可以选择使用三个转动自由度而只使用一个平动自由度, 以取代传统的 6 自由度飞行模拟器^[1]。

目前, 根据有关文献^[2], 现有公开的并联机构有 87 种, 其中 3、6 自由度的并联机构各占 40%, 4 自由度的占 6%, 5 自由度的占 3.5%, 2 自由度的并联机构占 10.5%。随着现代工业的不断发展, 4 自由度的应用场合将会越来越多, 对其的研究将变得越来越有必要。基于此, 本论文将以一种新型的 4 自由度并联机器人作为研究对象, 对其进行运动学的分析, 并对研究方法进行探讨, 以此作为该并联机器人应用和研究的基础。

1.2 研究现状

1.2.1 结构非对称的 4 自由度并联机器人的研究现状

从一般的角度来说, 可以把 4 自由度并联机器人分为两种: 结构非对称和结构对称。所谓的结构非对称指的是连接并联机构上下平台的各个支链不完全相同, 其中支链的结构包括了运动副组成和支链连杆的尺寸等要素。目前的 4 自由度并联机器人的研究主要集中在结构非对称这一领域。

Wang 和 Gosselin^[3]在 1988 年对一个具有 4 个 RUS 支链和一个 RS 辅助支链的 4 自由度并联机器人进行了运动学和奇异位形的研究;

Hesselbach et al^[4]在 1998 年设计了由两条非对称支链组成的一个 4 自由度并联机器人, 并以此来完成凸面玻璃面板的切割;

Rolland^[5]在 1999 年运用了类似于 Delta 机器人所采用的设计方法, 即平行四边形的方法设计了两个机器人 Kanuk 和 Manta, 它们都拥有一个转动和 3 个平动自由度;

Lenarcic, Stanisic 和 Parenti-Castelli^[6]在 2000 年设计了具有 1 个 PS 支链和 3 个 SPS 支链组成的一个 4 自由度并联机构, 以此对人类肩膀动作进行仿真;

我国中科院沈阳自动化研究赵明扬等人^[7]在 1999 年曾提出一种 4 自由

度并联机构，并进行了位置分析。2002 年又提出一种混合型 4 自由度并联平台机构^[8]，该机构的动平台能够实现两个方向的移动以及绕两个方向轴的转动，并基于此种机构成功研制出一台五坐标并联机床；

Chen et al^[9]在 2002 年提出了一个具有 2 个 PRS 支链和 2 个 PSS 支链的 4 自由度并联机器人的设想；

范守文、徐礼矩^[10]等人在 2002 年提出一种基于 4 自由度空间并联机构的混联型虚拟轴机床的新结构，该新型虚拟轴机床具有工作空间大、可实现姿态角大、位置与姿态解耦等优点。

总之，目前国内外对于这一领域的研究仍没有形成普遍适用的理论和方法，主要是通过给 6 自由度的并联 Stewart 平台添加约束支链以限制一些不需要的自由度，从而获得 4 自由度的并联机构，也就是说这些并联机构主要还是基于设计者本身的研究经验而得出的。同时这样的设计方法往往带来不对称的工作空间，并且使得整个机构变得复杂，从而给设计、制造等等都带来了负面影响。因而，采用对称的结构将是一个有效的解决方案。

1.2.2 对称结构的 4 自由度并联机器人的研究现状

结构对称指的是机器人具有 4 个完全相同结构的支链，一般情况下每个支链都对应一个驱动。但是，由于其特殊的支链分布，并联机构将成为过约束机构，也就是说这种并联机构将无法用传统的机构分析方法进行研究，这也正是 4 自由度并联机器人所占的比例较小的原因之一。

目前国内外对于这类机器人的研究同样也只是处于理论和实验阶段，同时更多的注意力集中在如何采用更有效的研究理论和方法来解决对称结构带来的过约束等传统分析方法所不能解决的问题。目前的研究成果举例如下：

Company 和 Pierrot^[11]在 1999 年提出了一个种新型的具有 3 个平动和 1 个转动的 4 自由度对称并联机器人，以此为基础，通过对支链的运动副进行各种组合和更替而衍生出一系列名为 H4 的并联机器人。这种并联机器人的 4 个支链均是由两根相同的 PUU 支链组合而成的一个平行四边形机构，然后 4 个这样的平行四边形机构通过一个共同的转轴与动平台相连接，从而实现动平台的 3 个平动和 1 个转动自由度。

Zlatanov 和 Gosselin^[12]在 2001 年设计了一种采用 4 个完全相同的 RRRRR 支链组成一个 4 自由度并联机器人，每一个支链的 5 个转动副中，其中 3 个转动副的轴线在运动过程中始终相交于同一点（即其他每个支链中 3 个转动副轴线也相交在这一点），支链中的其余 2 个转动副的轴线则始终彼

此平行。这样组成的并联机构将成为过约束机构，并具有 1 个平动自由度和 3 个转动自由度。

方跃法教授和 Lung-Wen Tsai 教授^[13]在 2002 年对结构对称的 4 和 5 自由度的并联机器人进行了机构的综合。通过运用螺旋理论和线几何理论等对仅含有纯力或者纯力偶的支链进行运动副的综合，从而推导出一系列符合对称结构 4 或者 5 自由度并联机器人要求的支链。本论文也将对其中所推导出的一种对称结构的 4 自由度并联机构进行运动学的综合分析。

由于 4 自由度并联机器人只是在最近几年才出现在并联机器人的研究领域内，因此国内外的研究现状只是在探索，只有少量成果运用于实际生产领域。并且 4 自由度并联机器人大部分属于过约束机构，无法用传统的理论进行分析。同时如何进行并联机构的数学模型化，以及机构本身的运动学正反解等等都是有待解决的难题。本论文将在运动学的分析过程中，对上述各种问题的解决方法进行综合研究。

1.3 课题研究的基本思想和内容

串联机器人经过将近半个世纪的发展，已经在运动学、动力学和静力学等方面形成了一套系统而成熟的研究理论，比如用 Denavit-Hartenberg 参数进行运动学分析，用牛顿-欧拉方程或者拉格朗日方程进行动力学分析等等。但对于尚处于探索阶段的 4 自由度并联机器人而言，不能简单套用上述研究理论，在其运动学的分析过程中，仍将有下列尚待解决的问题：

并联机构的过约束问题。过约束的并联机构不符合传统机构的结构理论，而这一点在机构的自由度计算上体现得尤为明显。

并联机构的正反解问题。并联机构的反解比较简单，而正解则非常复杂，一般情况下无法得到解析解，而且对应数值解的个数不唯一，如 6-SPS 并联机器人的正解最多有 40 种形位^[14]。

并联机构的奇异位形问题。奇异位形主要发生在机构的运动副轴线出现线性相关的情况下。并联机构至少带有 2 个以上的支链，每个支链又有相当数量的运动副，因此，机构总的运动副数目远多于串联机器人。并联机构的运动副轴线发生线性相关的情况不仅会出现在各个支链上，而且会出现在运动平台上，有时对于支链的驱动选取不当也能产生机构的奇异。总之，并联机构的奇异位形比串联机器人的种类更多，情况更复杂。

由于缺乏统一的理论基础，4 自由度并联机器人运动学的研究方法也处于不断探索和改进阶段。对于一些结构比较简单或者比较特殊的并联机构，可以采用几何直观或者综合推导得到，但是，对于结构对称的 4 自由度并联机器人而言，几何推导远远不能满足其复杂的运动学分析的要求。而螺旋理

论在解决空间机构运动学问题上,尤其是自由度计算和奇异性分析上有其独特的优势,因此,本论文将以螺旋理论作为并联机构运动学的分析工具,辅以机构空间矢量的几何综合推导以及线几何等等理论,从而完成新型 4 自由度并联机器人的运动学分析。

并联机构的运动学分析主要包括以下几个方面:机构自由度分析、运动学正反解、雅可比矩阵分析、奇异位形分析以及工作空间分析等。因此本论文将完成以下工作:

运用螺旋理论进行机构的自由度分析。建立机构的支链和动平台的螺旋表达式,即把机构中的力、运动和约束等物理量转化为对应的螺旋和反螺旋表达式,然后对这些螺旋表达式进行分析运算,从而得出机构动平台的自由度数目以及自由度的运动性质。

建立机构的数学运算模型,求解运动学正反解。对机构的空间几何模型进行矢量化,根据机构支链的运动副之间的结构和运动关系,进而求解机构矢量方程,从而得到代表机构运动学正反解的数学表达式。

运用螺旋理论进行雅可比分析。建立机构动平台和各个支链的运动螺旋系,并以此把动平台的速度参数与支链的驱动参数联系起来,进而计算得到机构的雅可比矩阵。

对机构的所有可能的奇异位形进行分析。分析并联机构所有可能出现的奇异位形情况,包括支链奇异、平台奇异以及驱动选择奇异,进而确定出现奇异位形时机构位形所要求的几何条件。

运用计算机仿真软件进行运动仿真。采用 ADAMS 软件对所研究的 4 自由度并联机器人进行虚拟样机设计,定性地验证机构的自由度性质以及运动轨迹的正确性,并对动力学进行初步探讨。

1.4 课题的学术及工程意义

本课题进行的是新型 4 自由度并联机器人的运动学分析,是一种新的尝试和探索,也是继续进行动力学和其他控制研究的理论基础。课题研究过程中所涉及的各种问题的解决方法不仅针对于该新型 4 自由度并联机器人,而且对其他 4 自由度并联机器人的研究同样具有很好的参考价值。可以说,本课题的学术意义不仅在于课题本身,更重要在于丰富了少自由度并联机器人的研究,并为此提供了详实的研究范例。

理论的研究只有运用于实践才能创造出价值,这也是课题研究的最终目的。通过对该 4 自由度并联机器人的运动学分析,然后制造出其样机模型,以此为操作平台开发一种协作式并联机床。这就是课题研究的设想,也正是课题在实际工程中的意义。着十分重要的实际意义。

1.5 论文的组织结构

基于上述思想,作者进行了研究工作,分别体现在论文的各章节中。整篇论文共分九章,各章主要内容如下所述:

第一章为绪论,首先简要介绍了目前国内外对 4 自由度并联机器人的研究现状,指出了课题研究的必要性,然后阐明了全文的基本思想、研究内容、研究意义内容安排及组织结构。

第二章介绍了课题研究的理论基础。对螺旋理论的基础知识进行了介绍,解释了后续所用到的相关概念。

第三章描述了该新型 4 自由度并联机构的结构特性,并进行机构的自由度性质分析。

第四章对并联机构进行数学模型化,建立运动学正反解方程,并以数值实例验证方程的正确性。

第五章分析机构的雅可比和奇异位形情况。

第六章运用仿真软件建立并联机器人的计算机运动学和动力学仿真曲线,定性的描述了机构的各项指标。

第七章为结束语,总结全文的研究工作,阐明经验教训,并就今后的研究方向进行了展望。

第二章 螺旋理论

刚体在三维空间的一般运动是平动和转动的组合,而螺旋表达式则可以把这种组合表示为绕同一根轴线的转动和移动,并且在表达式中指明了该轴线的空间方位。因此,对空间并联机构而言,螺旋理论很适合用于进行运动学的分析。本章将介绍螺旋理论的基础知识^{[14]、[15]},以及与后续自由度分析等研究内容相关的理论。

螺旋理论形成于 19 世纪。首先 L. Poinsot 在 19 世纪初通过对刚体上力系的简化,得到具有旋量的力矢与共线的力偶矢,这是一组对偶矢量。J. Plücker 确定了空间直线方向、位置的六个坐标,这被称为 Plücker 线坐标。1900 年, R. S. Ball 完成了其经典著作《螺旋理论》,并在书中讨论了复合约束下刚体的运动学和动力学。但在整个 20 世纪前半叶,该理论几乎无人问。1948 年, F. M. Dimentberg 在分析空间机构时,应用了该理论。而 1978 年 K. H. Hunt 所著的《运动几何学》则是螺旋理论的现代发展。此后,螺旋理论逐渐为机构学所重视,得到迅速发展,螺旋理论成为空间机构分析的重要理论^[16]。

2.1 线矢量 (Line Vector)

如果空间一个矢量被约束在一条空间位置确定的直线上,这个被直线约束的矢量就称线矢量,用对偶矢量表示为 (s, s^0) ,其中 s 称为对偶矢量的原部, s_0 为对偶矢量的对偶部。 s 为上述空间矢量, $s_0 = r \times s$ 称为线矩,具有长度单位, r 是由原点至该空间直线上任一点的矢径,当 $s \cdot s = 1$ 时为单位线矢, s_0 表示该线矢量在空间的位置。不难看出, $s \cdot s_0 = 0$,而这正是线矢量的特点。

2.2 螺旋或旋量 (Screw)

在一般情况下,对偶矢量的原部与对偶部不是正交的,这不正交的对偶矢量称为螺旋,也叫作旋量,记为 (s, s^0) , $s \cdot s_0 \neq 0$ 。当 $s \cdot s = 1$ 为单位螺旋,比值: $(s \cdot s^0) / (s \cdot s)$ 是原点不变量,称为螺旋的节距,具有长度单位。当 $h = 0$,为线矢量;当 $h = \infty$,为偶量,记为 $(0; s)$ 。螺旋可以经由变换 $(s; s^0) = (s; s^0 - hs + hs) = (s; s_0 + hs)$ 得到一个作用线位置 $r \times s = s^0 - hs$,即表示该螺旋的轴线位置,或写为线矢量是 $(s; s^0 - hs)$ 。若螺旋的两矢量表示为标量,称 Plücker 坐标。记为 $(L, M, N; P, Q, R)$ 。螺旋的两部分也可以以对偶标记 \in 结合起来,记为 $s = s + \in s^0$ 。

2.3 螺旋的物理意义

1. 刚体的瞬时转动

刚体的瞬时转动用角速度线矢来表示, 即用角速度大小与表示轴线的单位线矢, $(s; s_0)$ 之积 $\omega \cdot s = \omega(s; s_0) = \omega s + \epsilon \omega s_0$ 表示, 其中 s 是单位矢量, 表示了转动轴线的方向, $s \cdot s = 1$; $\omega = \omega s$ 是转动角速度矢量; s_0 是 s 对原点的线矩, 且与 s 为正交, $s_0 = r \times s$, $s \cdot s_0 = 0$ 。线矢的第二项可以写为 $\omega s_0 = \omega r \times s = r \times \omega = v_0$

这表明了刚体空间旋转运动的运动线矢的第二项, 是刚体上与原点 o 重合点的速度, 此速度正是旋转运动产生的切向速度。因此, 构成刚体的转动线矢的对偶矢量是角速度矢量 ω , 和刚体上与坐标原点重合点的线速度 v_0 。刚体的瞬时纯转动运动的 *Plücker* 坐标为 $\omega(s; s_0)$ 。当坐标原点与转动轴重合时, $v_0 = 0$, 转动线矢变成 $\omega \cdot s = \omega s + \epsilon 0$, 写成 *Plücker* 坐标为 $(\omega; 0)$ 。

2. 刚体的瞬时移动

刚体的瞬时移动用移动线矢来表示。当刚体 2 相对刚体 1 作移动运动, 速度 v 沿单位矢量 s 方向, 则速度矢量表示为 $v = v s$, 此单位矢量 s 通常是选在移动副导路的中心线方向。然而对移动运动, 刚体 2 上所有的点都具有相同的移动速度 v , 即是说将矢量 s 平行移动并不改变刚体的运动状态, 所以移动速度矢量是自由矢量。

刚体的移动运动, 也可以看成是一个瞬时微转动, 此转动轴线与 s 正交, 并位于距 s 无限远的平面内, 此转动轴线的 *Plücker* 坐标为 $(0; s)$ 或者 $(0, 0, 0; L, M, N)$ 。绕此轴线的瞬时微转动运动, 就可以表示成 $v(0; s)$ 或者 $(0; v)$ 。速度矢量 v 是自由矢量。

3. 刚体的瞬时螺旋运动

当刚体 2 相对于刚体 1 既有相对转动, 又有相对移动时, 这时候刚体通过回转副绕轴线 s_1 旋转, 瞬时转动的线矢为 $\omega_1(s_1; s_{01})$ 。这里 $(s_1; s_{01})$ 为单位线矢; 刚体又通过移动副沿 s_2 作相对移动, 瞬时移动矩矢为 $v_2(0; s_2)$, s_2 为单位矢量。刚体的绝对瞬时运动应该是此两运动的合成, 按旋量代数和计算, 合成旋量的原部和对偶部应分别是转动、移动两矩矢的原部和对偶部的和, 合成旋量如表示成 $\omega_i \cdot s_i = \omega_i s_i + \epsilon \omega_i s_i^0$ 其中下标 i 表示合成的绝对瞬时运动参量, 其原部及对偶部就是 $\omega_i s_i = \omega_i s_i$ 和 $\omega_i s_i^0 = s_{0i} + v_2 s_2$ 。

可见, 合成运动的方向矢量 s_i 与 s_i 相同, 即平行于 s_i ; 合成运动转动角速度 ω_i 等于转动角速度 ω_i 。合成运动第二项 $\omega_i s_i^0$ 仍为速度矢量, 但此合成速度矢量是两项之和, 不再是旋转的切向速度。也可以把这个瞬时合成运动写成 $\omega_i \cdot s_i = \omega_i + \epsilon v_i^0$, 式中 $\omega_i = \omega_i s_i$, $v_i^0 = \omega_i s_i^0$ 。显然此时刚体的绝对瞬时

运动, 已不再是纯转动, 旋量的两部分不满足正交条件, 即 $\omega_i \cdot v_i^0 \neq 0$ 。此时绝对瞬时运动可以分解为 $(\omega_i; v_i^0) = \omega_i (s_i; s_i^0) + \omega_i (0; h_i s_i)$, 其中 $s_i \cdot s_i^0 = h_i$, 式中右边的第一项 $\omega_i (s_i; s_i^0 - h_i s_i)$ 是绕 s_i 轴线的纯转动(因括号中的第二项只是原点重合点的切向速度分量)。 s_i 轴与 s_i 平行, 其轴线方程可已写为 $r \times s_i = s_i^0 - h_i s_i$, 式中的第二项 $\omega_i (0; h_i s_i)$ 是纯移动分量, 移动速度大小为 $v_i = \omega_i h_i$; 而移动速度的方向也是沿着 s_i 方向。这样合成运动是绕 s_i 的转动和沿 s_i 的移动, 也就是通常所说的运动学上的螺旋运动 (screw, 或者 twist)。

4. 刚体上的作用纯力

与刚体瞬时运动的表示相似, 刚体上的作用力也可以用线矢量来表示。如刚体上有一个作用力 f , 则其可以写为纯量 f 与单位矢量 s 之积。此力对坐标原点之矩 C_0 可以表示为纯量 f 与单位矢量 s 之线矩 s_0 之积。因此作用在刚体上的力如以单位线矢表示, 为 $f \cdot \$ = f s + \epsilon f s_0$ 式中 $\$$ 为单位线矢, $s \cdot s = 1$, s 与 s_0 正交, $s \cdot s_0 = 0$; 用线矢表示刚体上的作用力, 同时表明了作用在刚体上力的大小、方向和作用线。力线矢写成 *Plücker* 坐标形式为 $f (s; s_0)$ 或者 $(f; C_0)$, 即 $f \cdot \$ = f + \epsilon C_0$ 式中 C_0 为力 f 对原点之矩, 即 $C_0 = f s_0 = f r \times s$ 。当力过原点, 力对原点之矩为零, $C_0 = 0$, 此时表示此力的 *Plücker* 坐标为 $(f; 0)$ 。

5. 刚体上的作用力偶

在刚体上作用的两个大小相等、方向相反的平行力 f_1 、 f_2 构成一个力偶, 其力偶矩可以表示为 $C = (r_2 - r_1) \times f_2$, 显然此力偶矩矢量是在这个力偶平面的法线方向。若 s 是平面的法线方向上的任一个单位矢量, 它与力偶矩按右手螺旋一致, 力偶矩矢量就可以表示为 $C = C s$ 。表示力偶矢的矢量 C 或者 $C s$ 是自由矢量, 它在刚体内自由地平行移动而不会改变它对刚体作用地效果。自由矢量地齐次坐标为 $(0; s)$, 这样力偶矢可以表示为 $C = C (0; s)$ 。

力偶 C 也可以认为是一个作用在刚体上的“无限小的力”引起对原点的矩, 该力作用线与 s 正交, 在无限远的平面上, 这条线的 *Plücker* 坐标是 $(0; s)$, 所以力偶可表示为 $C (0; s)$ 。

6. 刚体上作用的力螺旋

一般情况下作用于一个刚体的空间力系都可以简化为一个力 $f_i (s_i; s_0)$ 和一个力偶 $C_2 (0; s_2)$, 此力线矢和力偶矢相互间可能有任意的方向。此力线矢及力偶矢又可按旋量代数和结合为一个和旋量 $f_i \cdot \$ = f_i s_i + \epsilon f_i s_i^0$, 式中 s_i 及 $\$$ 是单位矢量和单位旋量, $s_i \cdot s_i^0 = 1$, 按照旋量和的规则, 其原部和对偶部分别为 $f_i s_i = f_i s_i$ 和 $f_i s_i^0 = f_i r_i \times s_i + C_2 s_2$ 。同样可以把和

旋量的表达式进行分解 $f_i \mathbf{s}_i = f_i(s_i; s_i^0 - h_i s_i) + f_i(0; h_i s_i)$ ，式中右边第一项是个纯力沿 s_i 轴线作用，而 $f_i(s_i^0 - h_i s_i)$ 是力 $f_i s_i$ 对原点之矩， s_i 的轴线位置可由 $r_i \times s_i = s_i^0 - h_i s_i$ 决定。式中右边第二项是一个纯力偶 $f_i h_i s_i$ ，矢量也沿 s_i 方向。因此力偶矢与力线矢共线，皆取 s_i 方向。力与力偶这样的组合称为力螺旋(Wrench)，力螺旋的轴线位置方程为

$$r_i \times f_i s_i = f_1 r_1 \times s_1 + C_2 s_2 - f_1 C_2 (s_1, s_i) s_1$$

其 *Plücker* 坐标为 $(f_1 s_1; f_1 r_1 \times s_1 + f_1 r_1 \times s_1 + C_2 s_2 - f_1 C_2 (s_1, s_i) s_1)$ 。

总之，刚体上作用的空间任意力系，最后都可以合成为一个有确定位置的力螺旋，即一个力线矢 $f_i(s_i; s_{0i} - h_i s_i)$ 和与其共线的力偶矢 $f_i(0; h_i s_i)$ 。

事实上，在刚体的运动学和静力学中的物理量可以分成以下几类：

- 1) 矢量 只要求考虑大小和方向的量，如运动学的刚体移动速度，静力学中的力偶矢量。它们都只需给出大小及方向就能确定该物理量。
- 2) 线矢量 需要同时给出大小、方向和矢量的作用线，才能确定该物理量。如角速度矢量、力矢量都是这样的物理量。
- 3) 旋量 当需要从全局上或整体上描述物体的受力或运动时，就要采用力螺旋或者运动螺旋这样的物理量，它们都是旋量。这两种都是由一个矢量和一个线矢结合构成。一般多个矢量之和仍为矢量，但多个线矢量之和不是线矢量而是旋量。

表 2-1 各种物理量的比较

	节距	运动学	静力学
旋量	$h \neq 0$	$(s; r \times s + hs)$	$(s; r \times s + hs)$
		运动螺旋 $(\omega; r \times \omega + h\omega)$	力螺旋 $(f; r \times f + hf)$
线矢量	$h = 0$	角速度线矢 $(\omega; r \times \omega)$	力线矢 $(f; r \times f)$
自由矢量	$h = \infty$	移动速度矢 $(0; v)$	力偶矢 $(0; C)$

2.4 螺旋系 (s_1, s_2, \dots, s_n) 的线性相关性

当螺旋线性相关时, 必可找到一组不全为零的数 $\omega_i \quad i = 1, 2, \dots, n$, 使得

$\sum_n \omega_i s_i = 0, \quad s_i = s_i^0 + \epsilon s_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ 。按螺旋的加法法则, 有

$$\sum_n \omega_i s_i = 0 \quad \sum_n \omega_i s_i^0 = 0 \quad (2-1)$$

当坐标系由 0 点移至 A 点, 各螺旋变为 $(s_i; s_i^A)$, 其中 $s_i^A = s_i^0 + \overline{AO} \times s_i$ 。

为确定经坐标系变换后螺旋的相关性, 乃分析其线性组合:

$$\sum_n \omega_i s_i^A = \sum_n \omega_i s_i + \epsilon \sum_n \omega_i s_i^A = \sum_n \omega_i s_i + \epsilon [\sum_n \omega_i s_i^0 + \overline{AO} \times \sum_n \omega_i s_i] \quad (2-2)$$

将(2-1)代入(2-2), 三项均为零, 所以有

$$\sum_n \omega_i s_i^A = 0$$

这表明对原坐标系为线性相关的螺旋系, 对新坐标系仍保持线性相关。对本问题不难推导出其对称命题, 即: 线性无关的坐标系, 经坐标变换后仍为线性无关, 这表明螺旋系的相关性与坐标系的选择无关。由此, 在分析机器人的奇异位形时, 可以选择最方便的坐标系。

(*Plücker* 坐标: 对于给定的笛卡尔直角坐标系, 和该坐标系下的两个点 $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ 、 $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ 。则由 A_1 、 A_2 两点所确定的线矢量用

Plücker 坐标可以表示为 $(L, M, N; P, Q, R)$, 其中 $L = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix},$

$N = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$)

如前所述螺旋是两个矢量的对偶组合, 写为 *Plücker* 坐标为 $(L, M, N; P, Q, R)$, 有六个标量。螺旋系的相关性, 就可以由螺旋系的 *Plücker* 坐标表示的矩阵的秩来分析

$$J = \begin{bmatrix} L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1, R_1 \\ L_2, M_2, N_2, P_2, Q_2, R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_n, M_n, N_n, P_n, Q_n, R_n \end{bmatrix}$$

螺旋的 *Plücker* 坐标有六个分量, 显然三维空间线性无关的螺旋最多 6 个。线矢量是螺旋的特例, 当组成螺旋的两个对偶矢量的点积为零时, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, 螺旋退化为线矢量。线矢量的 *Plücker* 坐标也有六个分量, 所以三维空间线性无关的线矢量也有六个, 见表 2-1。下面分析一些特殊几何条件下的螺旋的相关性。

表 2-2 线矢和螺旋在不同几何条件下的最大无关数

序号	几何特点	图示	线矢量	螺旋
1	共轴条件		1	2
2	共面平行		2	3
3	平面汇交		2	4
4	空间平行		3	5
5	共面		3	5
6	空间共点		3	(6)
7	汇交点在两面交线上的两平面汇交线束		(3)	-
8	共面共点, 汇交点在平面上		(4)	-
9	有一条公共直线 a. 有一条公共交线		4 5 4	4 (6) -

	b. 有两条公共交线 c. 有三条公共交线		3	-
10	交公共线矢 a		5	-
11	平行平面且无公垂线		5	5
12	无公共交线, 空间交错	非奇异线丛 (linear complex)	5	5
13	三维空间任意情况		6	6

(1) 共轴条件

任何两个线矢量共轴则必为线性相关。而共轴条件下最大线性无关组的螺旋 ($h \neq 0$) 数为 2。共轴螺旋之任何组合的合螺旋仍在该轴线上。

(2) 共面平行

使诸螺旋同置于 YZ 平面内, 且平行 Z 轴, 这样螺旋必有如下形式

$$\mathbf{s} = (0, 0, N; P, 0, R)$$

式中第 5 分量为零, 是因为皆与 Y 轴相交, 对 Y 轴无线距; 第 6 分量不为零, 因 $h \neq 0$, 矩阵 J 中 3 列元素为零, 因此最大线性无关数为 3。对于平面平行的线矢量, 第 6 分量也为零, 所以最大线性无关组为 2。

(3) 共面共点 (平面汇交)

此时将所有螺旋值置于 XY 平面内, 且原点为汇交点, 螺旋形如:

$$\mathbf{s} = (L, M, 0; P, Q, R)$$

式中, 因为 $h \neq 0$, 所以 $P \cdot R$ 不为零, 又经过原点 $R = 0$, 因此共面共点条件下最大线性无关组的螺旋数为 4。任何过汇交点位于该平面上的螺旋都可由此 4 螺旋线性组合而成; 而该平面上不过该汇交点的螺旋不可能由此 4 螺旋线性组合得到, 因为所有 4 个螺旋的第 6 分量都为零。对于平面汇交的线矢量, 其 Plücker 坐标的后三项也都为零, 所以最大线性无关数为 2。

(4) 空间平行

使坐标系的 Z 轴与螺旋平行, 其 Plücker 坐标中, 第 1, 2 两元素为零, 使矩阵 J 的前二列元素为零, 秩为 4。对于线矢量, Plücker 坐标的第 6 项也为零, 对 Z 轴无线距, 因此, 秩为 3。广泛使用的全铰链平面机构, 就是这种类型, 最大线性无关的线矢量数为 3, 有三个反螺旋, 公共约束为 3。

(5) 共面情况

对共面条件下, 将诸螺旋置于坐标系的 XY 面内, 这样螺旋的 Plücker 坐标的第 3 分量必为零, 矩阵的秩为 5。所以共面下最大线性无关数为 5。同时, 对比平面汇交情况, 可以看到至少有一个螺旋不过原点, 因而平面上任何螺旋都可以由此 5 个螺旋经过线性组合得到。

(6) 空间共点

3 维空间共点条件下最大线性无关的螺旋数等于 6。任何过公共点的螺旋总可以由该 6 个螺旋的线性组合得到。同时, 空间不过该点的螺旋也可由该 6 个螺旋线性组合得到。3 维空间共点条件下最大线性无关的线矢量数是 3。因为将原点选为公共点, 线矢量为 $\mathbf{S} = (L, M, N; 0, 0, 0)$ 。

(7) 汇交点在两平面交线上的两平面汇交线束

Grassmann 给出的这样的线矢量构成的螺旋系的最大线性无关数为 3。两平面上各自有一个共点线束, 且两汇交点均在两平面的交线上。平面共点线矢量之和仍为线矢量, 过交点, 所以可以经线性组合线矢量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 , 使得合矢量 \mathbf{S}' 沿直线 1-1, 而 \mathbf{S}' 的大小可以由 ω_1 和 ω_2 决定, $\mathbf{S}' = \omega_1 \mathbf{S}_1 + \omega_2 \mathbf{S}_2$ 。改变或者调节 ω_1 和 ω_2 的大小, 使得 $\mathbf{S}' + \omega_3 \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_4$, 这样得到 $\mathbf{S}_4 = \omega_1 \mathbf{S}_1 + \omega_2 \mathbf{S}_2 + \omega_3 \mathbf{S}_3$, 也过汇交点, 也是线矢量, 这说明线性无关的线矢量有 3 个。

(8) 共面与共点线矢量 (点在面上)

按 Grassmann, 这种线矢量构成的螺旋系的最大线性无关的线矢量为 4。这很容易由上述说法推得, 或者如图 2-2 建立坐标系, 取原点在汇交点处, 螺旋系可以表示为雅可比矩阵

显然平面上的线矢其 N, P, Q 三项为零, 空间共点线矢, P, Q, R 三项为零。因而矩阵的两列为零, 其秩为 4。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 & 0 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & b_6 & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(9) 交公共轴线

三维空间下所有螺旋交同一轴线，最大线性无关组的螺旋数目仍为 6，任何过此轴线的螺旋皆是由上述 6 个线性无关的螺旋组合得到。当所有螺旋皆与 Z 轴为正交，螺旋的 $Plücker$ 坐标的第 3、第 6 分量皆为零 $(L, M, 0; P, Q, 0)$ ，最大线性无关数为 4。三维空间下交同一直线 a 的线矢量，其最大线性无关数是 5（不包含 a ）。因选该公共轴线为 Z 轴时，过 Z 的线矢量对 Z 的线距为零。当所有线矢量正交同一直线，最大线性无关数为 4。

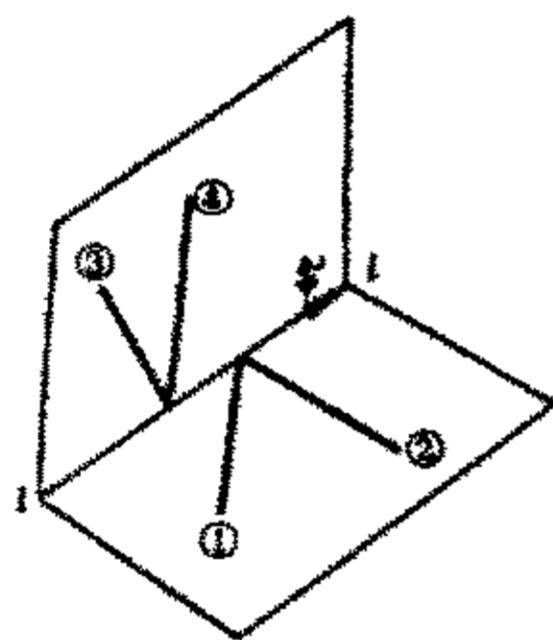


图 2-1 两平面线束

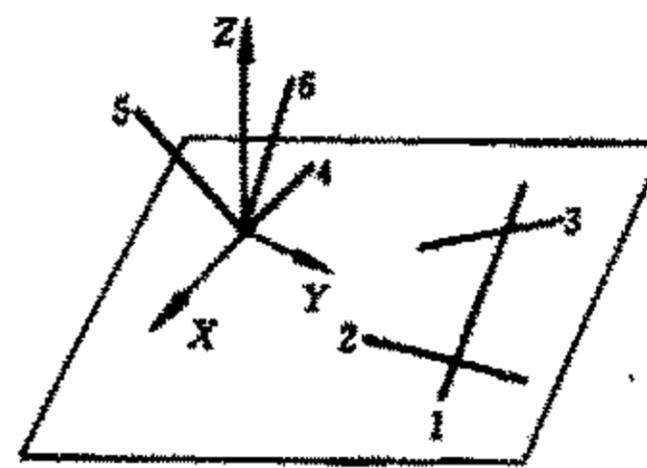


图 2-2 共面共点线矢量

由于相交两线矢量一定互逆，当所有线矢量同时与两条直线相交，即有两条公共直线，最大线性无关组数为 4；当所有线矢量同时与 3 条直线相交，有 3 条公共直线，最大线性无关组数为 3，4 条线矢量同时与 3 条直线相交，这 4 条线矢量一定线性相关。

(10) 交公共直线

三维空间中若干线矢量同时与另一条线矢量 a 相交，最大线性无关的线矢量是 5，即最多可以有 4 条线矢量与同一线矢量 a 相交，它们线性无关。当两条线矢量同时交第 3 线矢量，这就是表中的第 7 项。

(11) 平行平面且没有公共垂线

当所有螺旋分布在相互平行的平面中，相互之间无公共垂线。当取平面

法线为 Z 轴, 则其 *Plücker* 坐标的第三项为零, 所以最大线性无关数是 5。

2.5 反螺旋的概念

两矢量的对偶结合 $(s; s^0)$, $s \cdot s_0 \neq 0$, 称为螺旋 \mathbf{S} , 用以表示物体的螺旋运动或物体受到的力螺旋。当 $s \cdot s_0 = 0$ 时, 螺旋退化为线矢量, 线矢量是螺旋的特殊情况。线矢量在几何上表示直线矢量在空间的方向和位置, 在物理上表示转动或者作用力, $s_0 = r \times s$, 称为直线的线距。对有 n 个回转副的串联式机器人, 第 i 个运动运动副的轴线, 对应的角速度为 ω_i , 则末端手部的运动为

$$\omega_n \mathbf{s}_n = \sum_1^n \omega_i \mathbf{s}_i \quad (2-3)$$

上述 n 个螺旋组成的螺旋系 $D = [\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_n]$ 的线性相关性, 可以用 $6 \times n$ 的矩阵的秩 r 来表示, 机器人的自由度 w 则为

$$w = r(D) \quad (2-4)$$

当 $w < 6$ 时, 机器人的手部丧失一定数量的自由度。为研究这种受约束的状态, 引进反螺旋的概念。螺旋 \mathbf{s}_1 的反螺旋的定义为: 当 \mathbf{s}_1 与 \mathbf{s}_2 的互易积为零, 即 $\mathbf{s}_1 \circ \mathbf{s}_2 = 0$ 。其中符号 \circ 表示两螺旋作互易积, 这时, 我们称 \mathbf{s}_2 与 \mathbf{s}_1 互为反螺旋。

对应螺旋系, 若存在能同时满足下列方程组

$$\mathbf{s}' \circ \mathbf{s}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-5)$$

的 \mathbf{s}' , 则 \mathbf{s}' 就是此螺旋系的反螺旋。若螺旋以 *Plücker* 坐标表示

$$\mathbf{S}_i = (L_i, M_i, N_i; P_i, Q_i, R_i)$$

$$\mathbf{S}' = (L', M', N'; P', Q', R')$$

式(2-5)就可以表示为

$$L_i P' + M_i Q' + N_i R' + P_i L' + Q_i M' + R_i N' = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-6)$$

当机器人手臂所有运动副构成的螺旋系 D 的秩小于 6 时, $W < 6$, 机器人手部丧失一定数目的自由度, 此时方程式 (2-6) 有解, 必存在与螺旋系中每一个螺旋都相逆的反螺旋 \mathbf{s}' 。当运动螺旋系的秩是 W 时, 反螺旋的数

目是 $6-W$ ，并构成含 $6-W$ 个螺旋的反螺旋系。例如单螺旋的反螺旋系有 5 个螺旋，双螺旋的反螺旋系有 4 个螺旋，3 螺旋的反螺旋系有 3 个螺旋等。

2.7 本章小节

并联机构所有的组成运动副都是转动副、移动副或者两者的组合，而任何一个运动副都可以用螺旋进行表示，称之为运动螺旋，是进行机构运动学分析的基础。而反螺旋则引入了力的概念，并把运动副的运动与其受到的约束联系起来。本章主要是探讨了螺旋的基本概念以及其线性相关性，以及在反螺旋作用下可能存在的运动特征，从而为下面进行的运动学分析奠定了理论基础。

第三章 并联机构的自由度分析

自由度的分析包括了两个部分：即自由度的数目计算，以及自由度的运动特性分析（即自由度的转动或者移动性质），是进行机构设计和运动分析的前提和基础。本课题所研究的 4 自由度并联机器人由于采用了对称的结构而成为过约束机构，用传统的自由度理论进行分析将会得出错误的结论。本章节将用传统理论和螺旋理论分别进行自由度计算，并用运动仿真进行判断计算方法的正确性。

3.1 新型4自由度并联机构的描述

新型的 4-RRCR 并联机器人机构是由 4 个结构相同的支链分别连接动平台和固定平台而组成的，每条支链由 3 个转动副 R 和 1 个圆柱副 C 所组成，并按 RRCR 的顺序自固定平台到动平台依次串联而成，如图 3-1 所示。

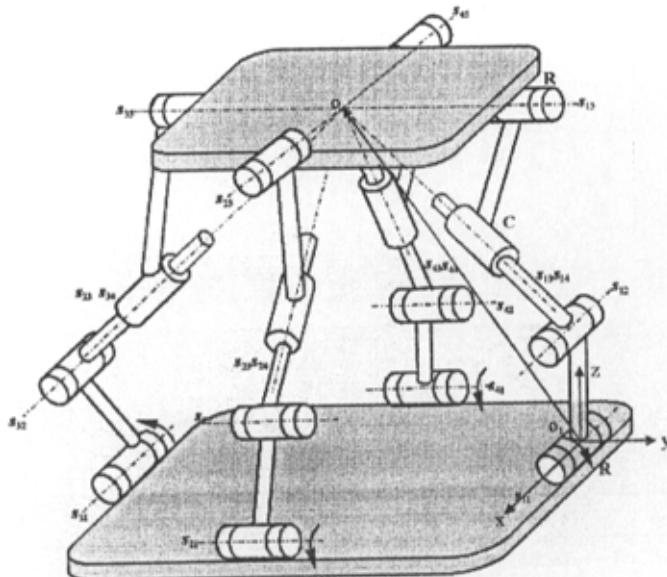


图 3-1 4-RRCR 并联机器人机构简图

图中， s_{ij} ($i=1 \sim 4, j=1 \sim 5$) 代表第 i 条支链的第 j 个运动副轴线的方向矢量，它们在空间方位上满足如下要求：

s_{11} 平行 s_{i2} , s_{11} 固定于定平台上作为每一条支链的驱动副; s_{11} 和 s_{31} 平行, s_{21} 和 s_{41} 平行, s_{i3} 、 s_{i4} 和 s_{i5} 在机构的运动过程中始终相交于同一点 (o 点), 其中 s_{i3} 和 s_{i4} 分别表示圆柱副 C 的转动副轴线的方向矢量和移动副轴线的方向矢量, s_{i3} 和 s_{i4} 都与 s_{i2} 垂直相交。

3.2 传统的自由度计算理论

传统的自由度理论中公认的是 Kutzbach Grubler^{[17], [18]}的计算公式。在许多著作中都有不同形式的 Kutzbach Grubler 公式, 一般都分为平面及球面机构和空间机构两大类, 但不管什么形式的 Kutzbach Grubler 公式, 其实质都是等价的。

对于空间机构有如下形式的 Kutzbach Grubler 公式

$$F = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

其中 n ——机构总的构件数

j ——总的运动副数

f_i ——第 i 个运动副的自由度数

F ——机构的总自由度数

4 自由度并联机构属于空间机构, 其在 Kutzbach Grubler 公式中的计算参数分别为: $n=14$; $j=16$; $\sum_{i=1}^j f_i=20$, 则机构的自由度 F 可以计算如下:

$$F = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i = 6 \times (14 - 16 - 1) + 20 = 2$$

通过后面的分析和仿真证明用传统的自由度计算公式得到的这一结论是错误的。

3.3 基于螺旋理论的自由度分析

3.3.1 基于螺旋理论的自由度计算理论

由第二章螺旋理论可知, 当两螺旋 $\$$ 和 $\$_i$ 满足 $\$ \circ \$_i = 0$ 时, 其中“ \circ ”表示两个螺旋作互易积, 则 $\$_i$ 称为 $\$$ 的反螺旋, 同样 $\$$ 亦称为 $\$_i$ 的反螺旋, 它

s_{11} 平行 s_{12} , s_{11} 固定于定平台上作为每一条支链的驱动副; s_{11} 和 s_{31} 平行, s_{21} 和 s_{41} 平行, s_{13} 、 s_{14} 和 s_{15} 在机构的运动过程中始终相交于同一点 (o 点), 其中 s_{13} 和 s_{14} 分别表示圆柱副 C 的转动副轴线的方向矢量和移动副轴线的方向矢量, s_{13} 和 s_{14} 都与 s_{12} 垂直相交。

3.2 传统的自由度计算理论

传统的自由度理论中公认的是 Kutzbach Grubler^{[17]、[18]}的计算公式。在许多著作中都有不同形式的 Kutzbach Grubler 公式, 一般都分为平面及球面机构和空间机构两大类, 但不管什么形式的 Kutzbach Grubler 公式, 其实质都是等价的。

对于空间机构有如下形式的 Kutzbach Grubler 公式

$$F = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

其中 n ——机构总的构件数

j ——总的运动副数

f_i ——第 i 个运动副的自由度数

F ——机构的总自由度数

4 自由度并联机构属于空间机构, 其在 Kutzbach Grubler 公式中的计算参数分别为: $n=14$; $j=16$; $\sum_{i=1}^j f_i=20$, 则机构的自由度 F 可以计算如下:

$$F = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i = 6 \times (14 - 16 - 1) + 20 = 2$$

通过后面的分析和仿真证明用传统的自由度计算公式得到的这一结论是错误的。

3.3 基于螺旋理论的自由度分析

3.3.1 基于螺旋理论的自由度计算理论

由第二章螺旋理论可知, 当两螺旋 S 和 S_i 满足 $S \circ S_i = 0$ 时, 其中“ \circ ”表示两个螺旋作互易积, 则 S_i 称为 S 的反螺旋, 同样 S 亦称为 S_i 的反螺旋, 它

们是互逆的,下标 r 代表了反螺旋。对于运动螺旋来说,它的反螺旋为力螺旋,代表着该螺旋所受到的力约束。对于一个空间 n 阶螺旋系 \mathcal{S}_k ($k=1 \sim n$, $n \leq 6$),即此 n 个螺旋均线性无关,对应有 $(6-n)$ 阶的反螺旋系 \mathcal{S}_m ($m=1 \sim 6-n$)。 \mathcal{S}_k 和 \mathcal{S}_m 之间满足如下的关系式:

$$\mathcal{S}_k \circ \mathcal{S}_m = 0 \quad (3-1)$$

当给定一个螺旋系以后,通过式 (3-1) 可求解出对应的反螺旋系。当该反螺旋系代表着机器人运动平台的约束力螺旋系时,动平台的自由度数目可以这样计算:

$$F=6 - C \quad (3-2)$$

式中, F 是动平台的自由度数目, C 代表约束力螺旋系的秩。

3.3.2 4-RRCR 并联机器人的自由度数的计算

4-RRCR 并联机器人总共有 4 条结构相同的支链,每条支链由 5 个运动副组成。为研究方便,支链的运动螺旋系用矩阵 $T_i = [\mathcal{S}_i]$ 表示。与支链 p 的运动螺旋系对应的反螺旋为约束力螺旋,用 \mathcal{S}_n 表示。因此,运动平台受到的约束力螺旋系用矩阵 $W = [\mathcal{S}_{n1} \mathcal{S}_{n2} \mathcal{S}_{n3} \mathcal{S}_{n4}]$ 表示。通过建立各支链的 T_i ,可由式 (1) 求得对应的 \mathcal{S}_n ,进而得到 W 。计算 $C = \text{Rank}(W)$,由式 (3-2) 便可得到动平台的 F 。

步骤 1. 4-RRCR 并联机器人运动螺旋系的建立

建立如图 1 所示的坐标系,其中坐标原点 o_1 在 \mathcal{S}_{11} 的轴线上, x 轴和 y 轴在基平面上, x 轴与 s_{11} 位于同一直线方向上, o 点坐标为 (x, y, z) , 矢量 r 代表矢量 $o_1 o$ 。

首先建立支链 1 各运动副所组成的运动螺旋系 $\mathcal{S}_{1j} = (s_{1j}; r_{1j} \times s_{1j})$

$$s_{11} = (1, 0, 0), \quad r_{11} = 0, \quad \mathcal{S}_{11} = (1, 0, 0; 0, 0, 0) \quad (3-3)$$

$$s_{12} = (1, 0, 0), \quad \mathcal{S}_{12} = (1, 0, 0; 0, Q_{12}, R_{12}) \quad (3-4)$$

$$s_{13} = (L_{13}, M_{13}, N_{13}), \quad r_{13} = r = (x, y, z),$$

$$\mathcal{S}_{13} = (L_{13}, M_{13}, N_{13}; yN_{13} - zM_{13}, zL_{13} - xN_{13}, xM_{13} - yL_{13}) \quad (3-5)$$

$$\mathbf{s}_{14} = \mathbf{s}_{13}, \quad \mathcal{S}_{14} = (0, 0, 0; L_{13}, M_{13}, N_{13}) \quad (3-6)$$

$$\mathbf{s}_{15} = (L_{15}, M_{15}, N_{15}), \quad \mathbf{r}_{15} = \mathbf{r} = (x, y, z),$$

$$\mathcal{S}_{15} = (L_{15}, M_{15}, N_{15}; yN_{15} - zM_{15}, zL_{15} - xN_{15}, xM_{15} - yL_{15}) \quad (3-7)$$

其中：

- ◆ (L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}) 和 (P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}) 分别表示运动螺旋系 \mathcal{S}_{ij} 的轴线方向矢量和轴线线矩矢量；
- ◆ \mathbf{s}_{11} 过原点，因此 $\mathbf{r}_{11} = 0$ ；
- ◆ \mathbf{s}_{12} 和 \mathbf{s}_{15} 均过 o 点，因此 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{15} = \mathbf{r}$ 。

同理可以建立其余三个支链的运动螺旋系如表 3-1：

步骤 2. 4-RRCR 并联机器人反螺旋系的建立

给定一个螺旋系，其反螺旋都可以由式 (3-1) 计算得到。根据所建立支链的 T_i ，由式 (3-1) 便可得到对应的 \mathcal{S}_i 。

令 $\mathcal{S}_n = (s_n; s_n^\theta) = (s_n; \mathbf{r}_n \times s_n + h_n s_n) = (L_n, M_n, N_n; P_n, Q_n, R_n)$ 。取支链 1 的 T_1 ，将其坐标代入式 (3-1) 中，得：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & Q_{12} & R_{12} \\ 0 & M_{13} & N_{13} & yN_{13} - zM_{13} & -xN_{13} & xM_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{13} & N_{13} \\ L_{15} & M_{15} & N_{15} & yN_{15} - zM_{15} & zL_{15} - xN_{15} & xM_{15} - yL_{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n1} \\ Q_{n1} \\ R_{n1} \\ L_{n1} \\ M_{n1} \\ N_{n1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3-8)$$

表 3-1 各支链的运动螺旋系

支链 2 (s_{2j})	支链 3 (s_{3j})	支链 4 (s_{4j})
$s_{21} = (0, 1, 0; 0, 0, R_{21})$	$s_{31} = (1, 0, 0; 0, 0, R_{31})$	$s_{41} = (0, 1, 0; 0, 0, R_{41})$
$s_{22} = (0, 1, 0; P_{22}, 0, R_{22})$	$s_{32} = (1, 0, 0; 0, Q_{32}, R_{32})$	$s_{42} = (0, 1, 0; P_{42}, 0, R_{42})$
$s_{23} = (L_{23}, 0, N_{23};$ $yN_{23}, -xN_{23} + zL_{23}, -yL_{23})$	$s_{33} = (0, M_{33}, N_{33};$ $yN_{33} - zM_{33}, -xN_{33}, xM_{33})$	$s_{43} = (L_{43}, 0, N_{43};$ $yN_{43}, -xN_{43} + zL_{43}, -yL_{43})$
$s_{24} = (0, 0, 0; P_{24}, 0, R_{24})$	$s_{34} = (0, 0, 0; 0, Q_{34}, R_{34})$	$s_{44} = (0, 0, 0; P_{44}, 0, R_{44})$
$s_{25} =$ $(L_{25}, M_{25}, N_{25}; yN_{25} - zM_{25},$ $zL_{25} - xN_{25}, xM_{25} - yL_{25})$	$s_{35} =$ $(L_{35}, M_{35}, N_{35}; yN_{35} - zM_{35},$ $zL_{35} - xN_{35}, xM_{35} - yL_{35})$	$s_{45} =$ $(L_{45}, M_{45}, N_{45}; yN_{45} - zM_{45},$ $zL_{45} - xN_{45}, xM_{45} - yL_{45})$

可以看出, 式(3-8)的系数矩阵为组成支链 1 的运动螺旋系坐标组合, 在支链各轴线的线矢为线性独立时, 该系数矩阵的秩为 5, 因此, 由线性代数的理论可知: 式(3-8)解出 s_{r1} 的基础解系为 s_{r1}^b , 任一个 s_{r1} 都可以表示为 $s_{r1} = t s_{r1}^b$, (t 为任意非零常数)。

同理, 分别代入支链 2、支链 3、支链 4 的运动螺旋系坐标, 可以得到 4 个支链的力螺旋基础解系:

$$\mathcal{S}_{r1}^b = (1, 0, 0; 0, z, -y) \quad (3-9)$$

$$\mathcal{S}_{r2}^b = (0, 1, 0; -z, 0, x) \quad (3-10)$$

$$\mathcal{S}_{r3}^b = (1, 0, 0; 0, z, -y) \quad (3-11)$$

$$\mathcal{S}_{r4}^b = (0, 1, 0; -z, 0, x) \quad (3-12)$$

步骤 3. 4-RRCR 并联机器人自由度数的计算结论

建立机器人动平台的力螺旋系后, 对其进行分析, 可从中得到如下的结论:

- ◆ 所有的力螺旋的轴线矢量与所选坐标参数无关, 轴线矢量的第三项代表螺旋轴线与 z 轴的方向余弦, 因为都为 0, 即均与 z 轴垂直, 也就是说它们都在与 xy 平面平行的平面上。
- ◆ 所有的力螺旋均为线矢量, 因此 $h_r = 0$, 因为 s_r 与 s_r^0 的点积均为 0;
- ◆ 所有的力螺旋均过点 $o(x, y, z)$, 因为它们均满足 $r \times s_r = s_r^0$;
- ◆ 反螺旋系 W 的 $C = 2$, 这也可以从螺旋理论得到, 因为对于任意的平面汇交的线矢量, 其最大线性无关数为 2。

3.3.3 4-RRCR 并联机器人动平台的自由度性质

自由度的性质, 指的是该自由度的种类(如转动自由度、移动自由度等等)及其进一步的描述(如转动自由度的转轴描述、移动自由度的移动轴描述等等)。下面就运用反螺旋的相关理论来作进一步的探讨。

如前所述, 互易积为零的两个螺旋互称为反螺旋。从物理意义上说, 互为反螺旋的两个螺旋分别代表物体的运动螺旋和力螺旋, 则互易积就是力螺旋对运动螺旋所作的功。互易积为零, 即力螺旋对运动螺旋作的功为零, 此力螺旋必为物体的约束反力。因此, 反螺旋反映了物体被约束的运动和物体为约束所允许的运动, 这样, 通过对反螺旋的分析就可以知道运动平台的哪

些运动为约束所允许，哪些运动受到约束。

1. 平动自由度的分析

从上面对动平台的力螺旋分析可知，动平台上所受到的四个力螺旋 s_{r1} 、 s_{r2} 、 s_{r3} 和 s_{r4} 在同一个与静平台平行的平面上，并且相交于 O 点。对于动平台沿 z 轴的移动，因为与 xy 平面正交，即力螺旋与沿 z 轴移动的运动螺旋是相互垂直的，做功为零，因此这个方向的移动是为力螺旋约束所允许的；而沿平行 xy 平面的平动均可以分解为沿相互正交的力螺旋 s_{r1} 、 s_{r2} 方向，此时力螺旋对这类移动做功不为零，这些运动都将被力螺旋所约束掉，即动平台没有沿平行 xy 平面的平动自由度。

2. 转动自由度的分析

因为螺旋之间的线性相关与否与坐标系的选择无关，因此移动坐标系到如图 3-2 所示。

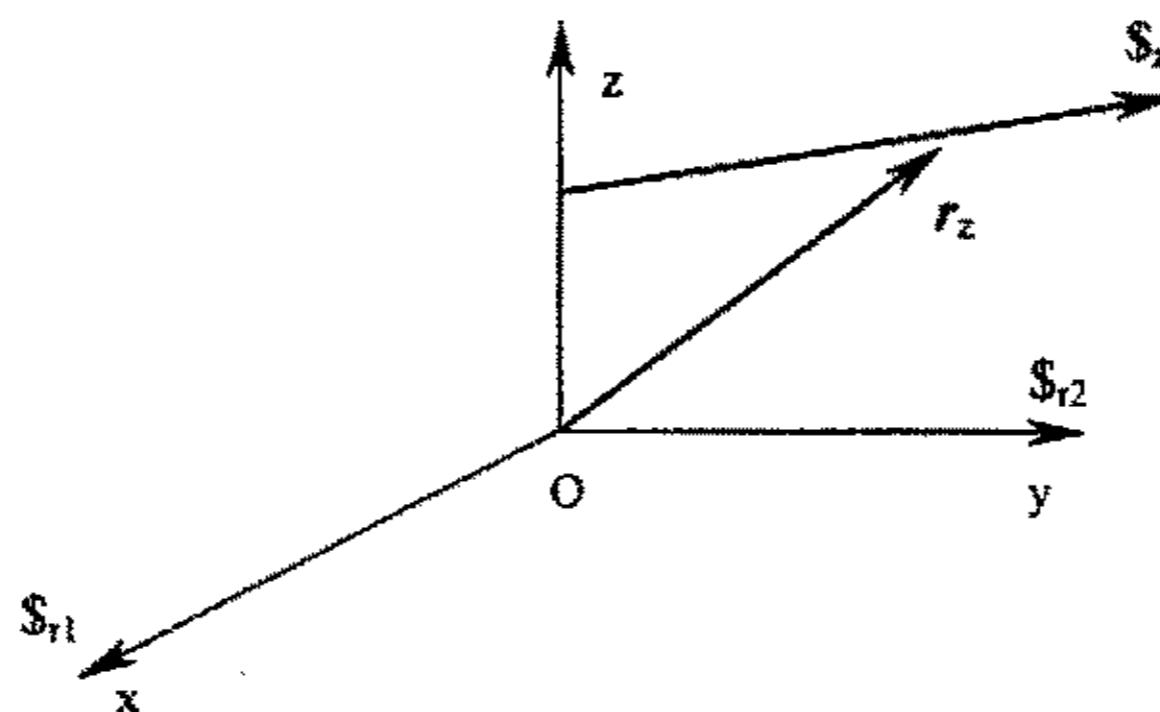


图 3-2 空间螺旋系

此时 s_{r1} 和 s_{r2} 分别表示为 $s_{r1} = (s_{r1}; s_{r1}^0) = (1, 0, 0; 0, 0, 0)$ ， $s_{r2} = (s_{r2}; s_{r2}^0) = (0, 1, 0; 0, 0, 0)$ 。假设空间任一线矢量 $s_z = (s_z; r_z \times s_z) = (L_z, M_z, N_z; P_z, Q_z, R_z)$ 为动平台的某一个转动轴的线矢量，且该转动是为力螺旋约束所允许的。动平台绕轴线 s_z 转动时，动平台上过原点沿 s_{r1} 和 s_{r2} 方向的直线上所有点沿着这两个方向的任何位移被约束，也就是说对于 s_z ，如果 $(r_z \times s_z \cdot s_{r1} \neq 0)$ 或者 $(r_z \times s_z \cdot s_{r2} \neq 0)$ ，那么这个转动是被约束的。因此，对于空间任一能够为力螺旋约束所允许的转动轴线 s_z ，必将满足如下条件：

$$r_z \times s_z \cdot s_{r1} = 0 \quad (3-13)$$

$$\mathbf{r}_z \times \mathbf{s}_z + \mathbf{s}_{r2} = 0 \quad (3-14)$$

同时, 由于 \mathbf{s}_z 为线矢量, 因此有:

$$\mathbf{s}_z \cdot \mathbf{r}_z \times \mathbf{s}_z = L_z P_z + M_z Q_z + N_z R_z = 0 \quad (3-15)$$

代入各自的坐标计算可得:

$$P_z = 0; Q_z = 0; N_z R_z = 0 \quad (3-16)$$

由于 \mathbf{s}_z 的轴线方向 $\mathbf{s}_z = (L_z, M_z, N_z)$ 是任意的, 也就是说 N_z 是任意取值, 由式 (3-16) 可得 $R_z = 0$, 此时 \mathbf{s}_z 表示为 $(L_z, M_z, N_z; 0, 0, 0)$, 也就是说 \mathbf{s}_z 的轴线通过坐标原点 o 。因此, 空间任一个为力螺旋约束所允许的、可以作为动平台旋转轴线的 \mathbf{s}_z 必定通过 o 点, 即动平台的所有转动轴线相交于同一点 o , 动平台的转动为绕 o 点的转动。

通过上述的自由度性质分析, 可以得到动平台的自由度描述如下:

- ◆ 动平台的平动自由度为沿 z 轴方向的平动, 平动自由度数目为 1
- ◆ 动平台的转动自由度为绕 o 点的转动, 转动自由度数目为 3。

3.4 两种自由度计算理论的比较

由传统自由度计算理论 Kutzbach Grubler 公式计算得到的自由度数为 2; 而基于螺旋理论分析得到的自由度数为 4, 分别是绕 o 点的 3 个转动自由度和沿 z 轴方向的移动自由度, 可见, 两种方法计算得出的结论仍有相当大的差距。如果机械系统实际的自由度数为 4, 但却以 2 个自由度数的情况进行处理, 那么机械系统将会处于过自由度状态, 出现失控的问题。

为了验证上述两个结论的正确性, 本课题将用 Adams 软件建立并联机器人的机构模型 (参看图 3-9), 并进行运动仿真, 机构的驱动都加在每个支链与静平台连接处的转动副上。

1. 假设并联机构为 2 个自由度

此时取 4 个支链的任意两个作为驱动支链, 两个驱动的角速度参数设定为:

$$\theta_1 = 0.8 * t, \theta_2 = -0.6 * t$$

动平台上 o 点的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标的初始值分别为 0、0 和 300mm，时间参数 t 的初始值为 0。经过 0.2 秒的运动仿真以后，动平台上 o 点的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标随时间的变化曲线分别如图 3-3、图 3-4 和图 3-5 所示：

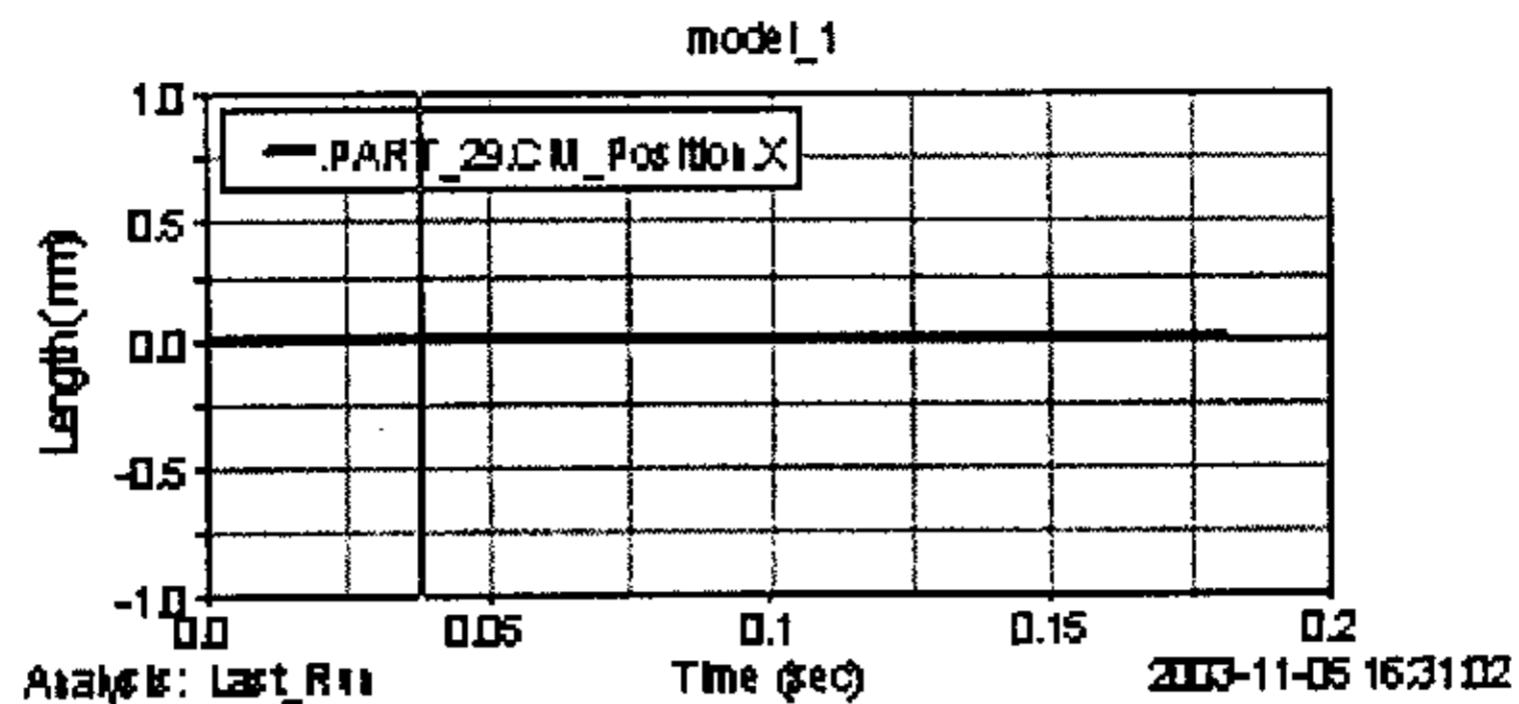


图 3-3 o 点 x 坐标变化曲线

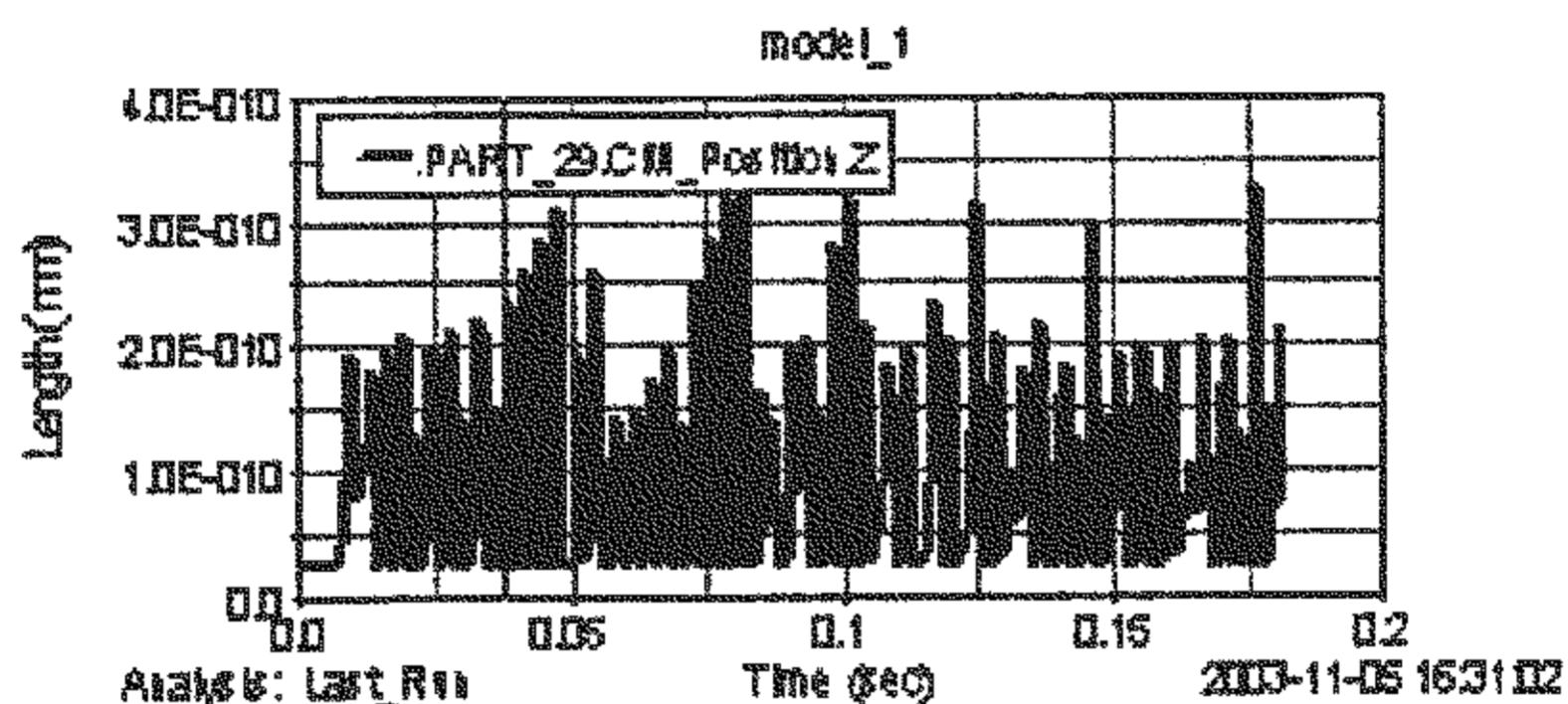


图 3-4 o 点 y 坐标变化曲线

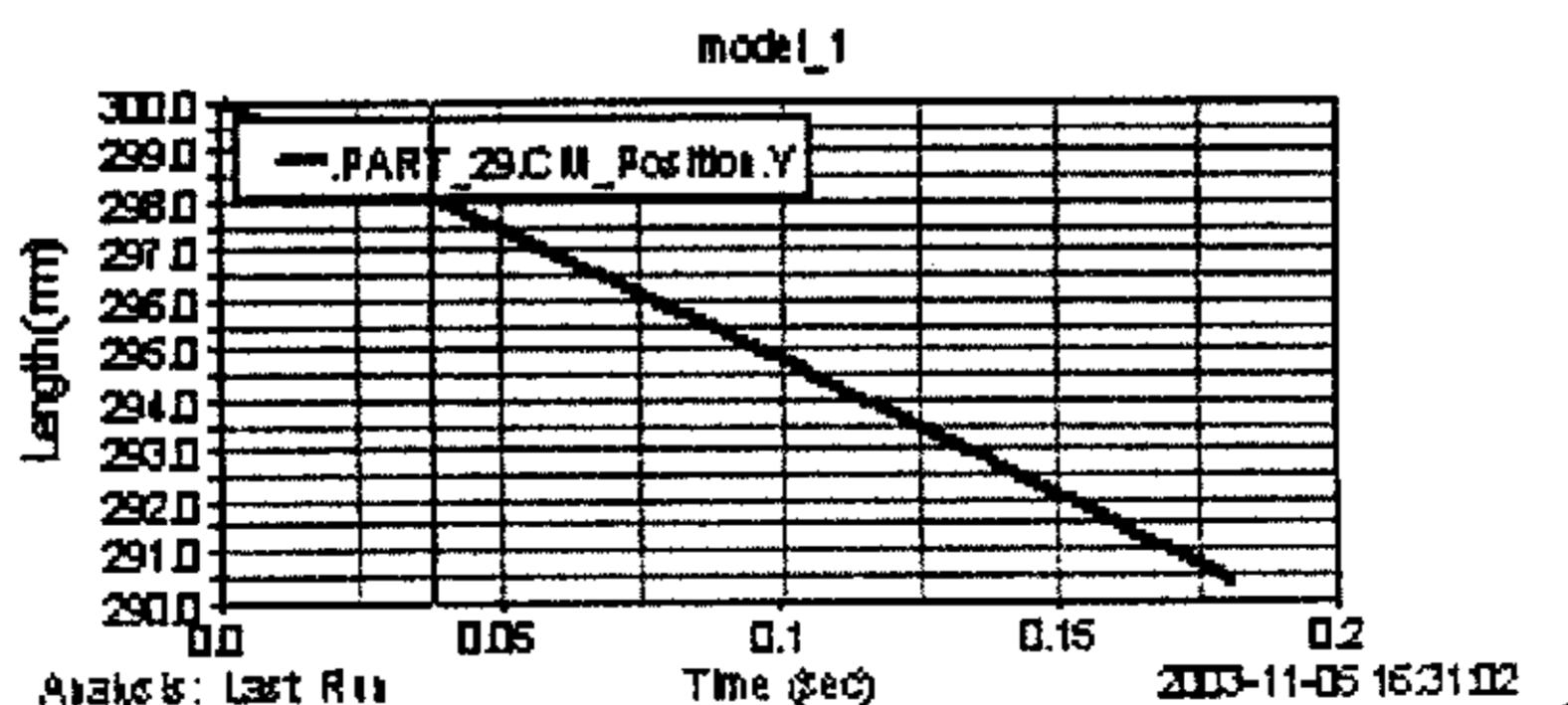


图 3-5 o 点 z 坐标变化曲线

2. 假设并联机构的自由度数为 4

此时, 4 个支链都作为驱动链, 每个驱动的角速度参数分别为:

$$\theta_1 = 0.3*t, \theta_2 = -0.5*t, \theta_3 = -0.5*t, \theta_4 = 0.45*t$$

运动平台上 o 点的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标的初始值分别为 0、0 和 300mm, 时间参数 t 的初始值为 0。经过 0.45 秒的运动仿真以后, 运动平台上 o 点的 x 坐标、y 坐标和 z 坐标随时间的变化曲线分别如图 3-6、图 3-7 和图 3-8 所示:

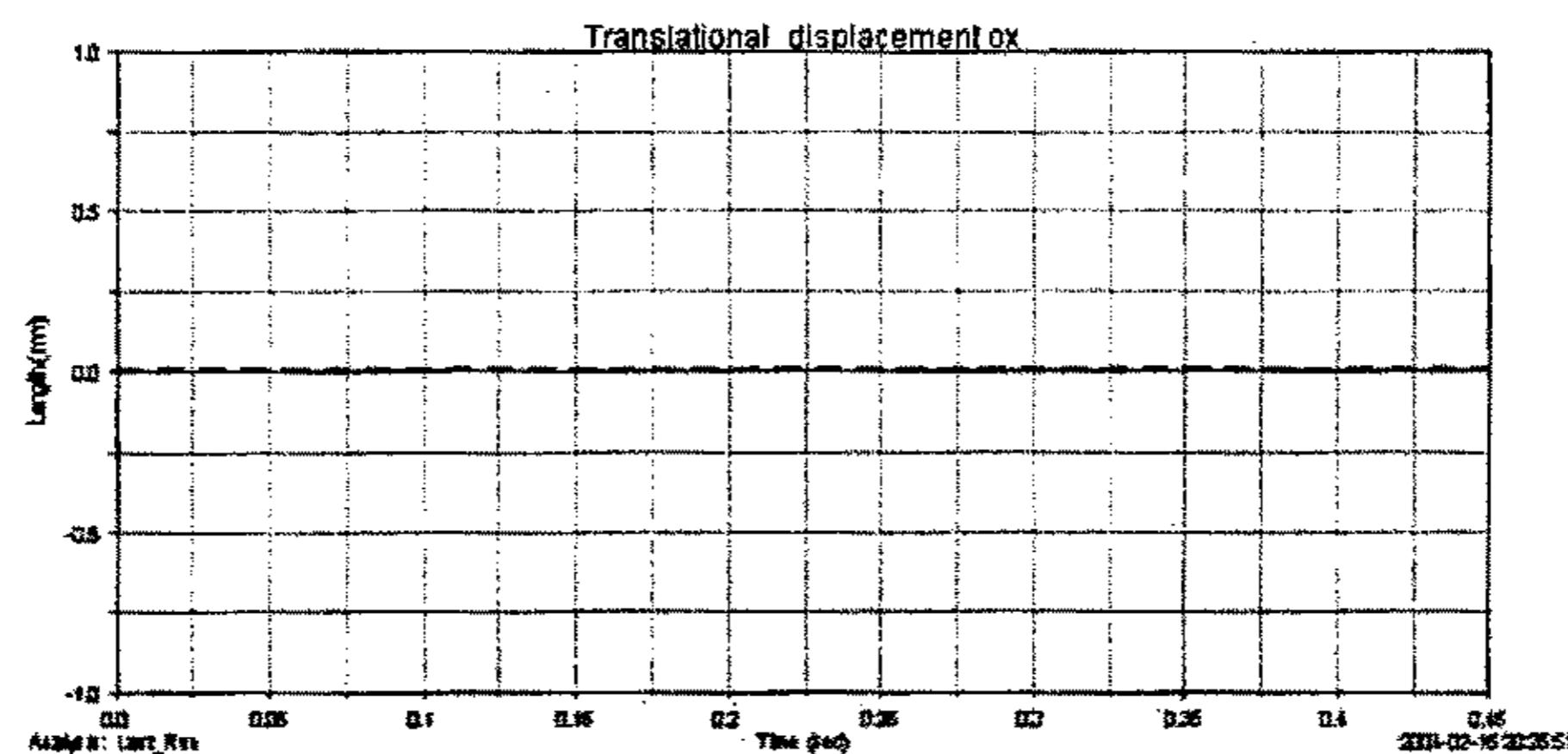


图 3-6 o 点 x 坐标变化曲线

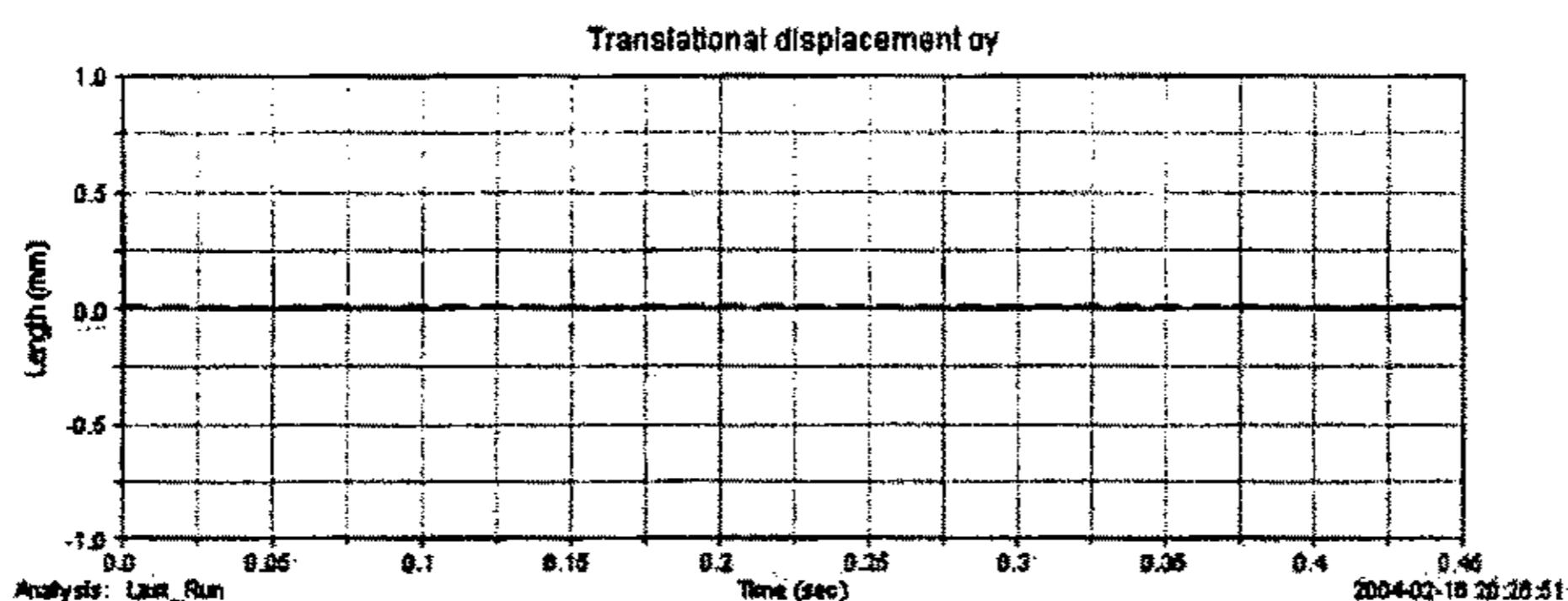


图 3-7 o 点 y 坐标变化曲线

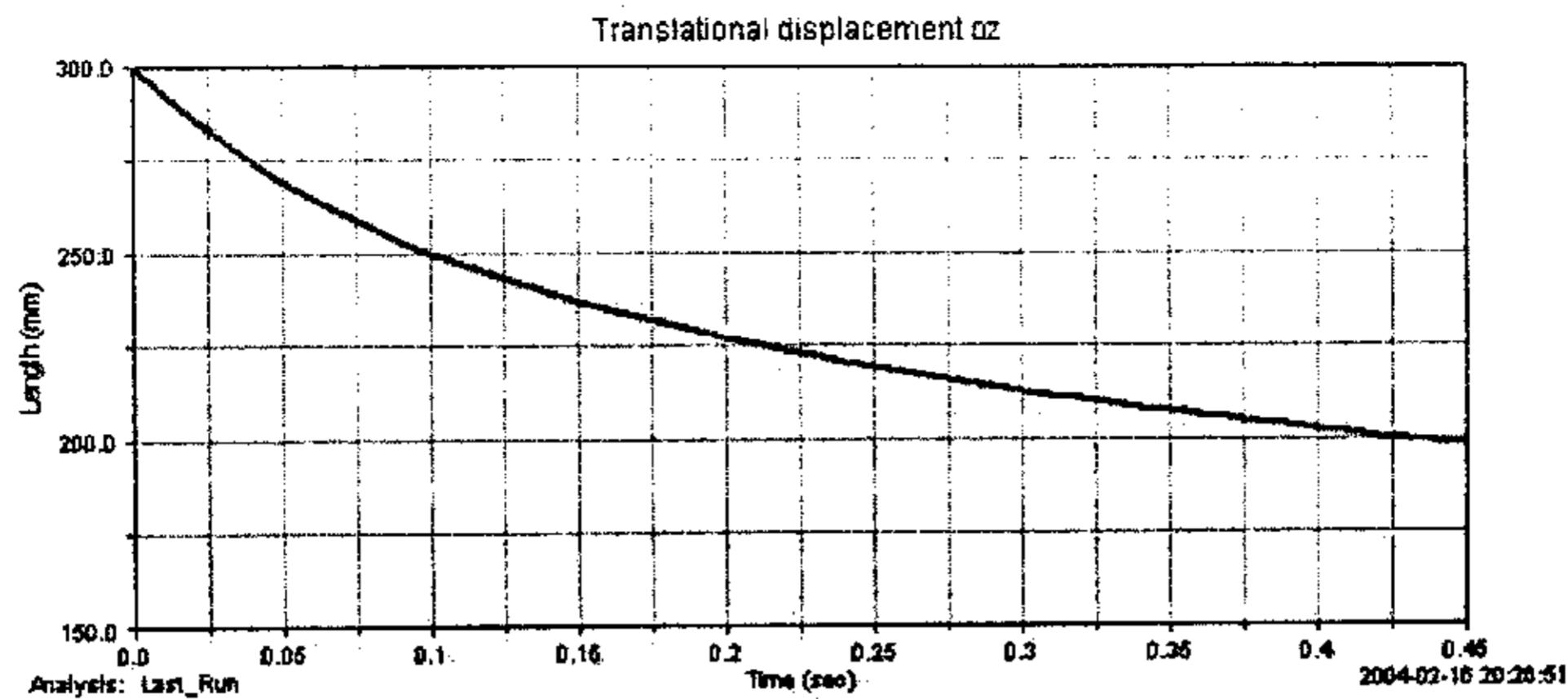


图 3-8 o 点 z 坐标变化曲线

从上面的图例可以看出,当仅仅给并联机器人施加 2 个驱动,也就是假设自由度为 2 的时候,此时动平台上 o 点的 y 坐标值随着时间的变化将呈现无序状态。也就是说,此时由于系统的输入自由度数不能满足机构本身的自由度数,系统处于失控状态, y 坐标值随时间的变化而变得无法确定,在图表中则显示出来为随机状态。

而当假设动平台为 4 个自由度时,动平台上 o 点的三个坐标值都随时间呈现出平滑曲线的变化状态,而且 x 坐标和 y 坐标均不随时间而变化,只有 z 坐标随时间而发生变化,这也符合了运用螺旋理论进行分析得出的自由度性质变化。

综上所述,通过 Adams 的运动仿真可以看出,采用 Kutzbach Grubler 公式计算出的自由度数目无法满足并联机构的运动要求,传统的自由度计算理论运用在空间并联对称机构上将会得出错误的结论;而用螺旋理论分析的自由度不仅满足并联机构的运动要求,而且符合自由度的运动性质,螺旋理论的分析结论是正确的。

3.5 本章小结

4 自由度并联机器人属于过约束机构,采用传统的自由度理论进行分析往往得出错误的结论,本章节则运用螺旋理论对其进行自由度的计算和分析,并通过计算机的运动仿真论证了传统自由度理论结论的错误和螺旋理论分析的正确。自由度的分析将为后续运动学研究的前提和基础。

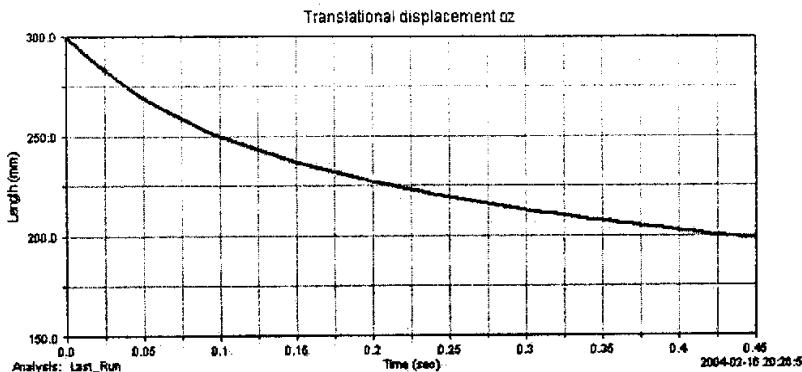


图 3-8 o 点 z 坐标变化曲线

从上面的图例可以看出,当仅仅给并联机器人施加 2 个驱动,也就是假设自由度为 2 的时候,此时动平台上 o 点的 y 坐标值随着时间的变化将呈现无序状态。也就是说,此时由于系统的输入自由度数不能满足机构本身的自由度数,系统处于失控状态, y 坐标值随时间的变化而变得无法确定,在图表中则显示出来为随机状态。

而当假设动平台为 4 个自由度时,动平台上 o 点的三个坐标值都随时间呈现出平滑曲线的变化状态,而且 x 坐标和 y 坐标均不随时间而变化,只有 z 坐标随时间而发生变化,这也符合了运用螺旋理论进行分析得出的自由度性质变化。

综上所述,通过 Adams 的运动仿真可以看出,采用 Kutzbach Grubler 公式计算出的自由度数目无法满足并联机构的运动要求,传统的自由度计算理论运用在空间并联对称机构上将会得出错误的结论;而用螺旋理论分析的自由度不仅满足并联机构的运动要求,而且符合自由度的运动性质,螺旋理论的分析结论是正确的。

3.5 本章小结

4 自由度并联机器人属于过约束机构,采用传统的自由度理论进行分析往往得出错误的结论,本章节则运用螺旋理论对其进行自由度的计算和分析,并通过计算机的运动仿真论证了传统自由度理论结论的错误和螺旋理论分析的正确。自由度的分析将为后续运动学研究的前提和基础。

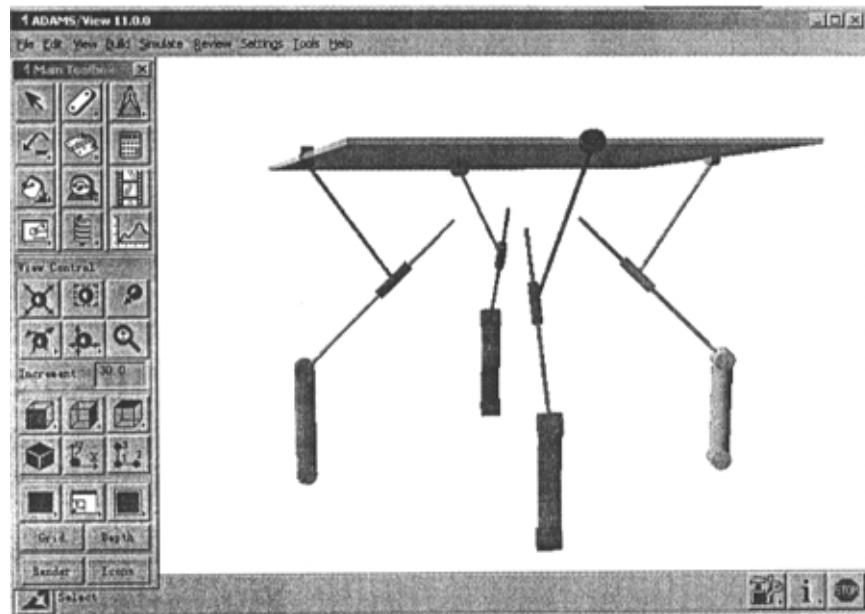


图 3-9 在 ADAMS 环境下建立的机构模型

第四章 并联机构的运动学分析

机器人的运动学主要研究在支链的几何约束下机器人的末端输出运动，机器人的运动学主要分成两部分：运动学反解和运动学正解。运动学反解研究的是通过给定工作空间内的一个已知输出位置从而映射到产生该输出位置的输入变量；而运动学正解研究的是通过给定已知的输入关节变量从而映射到由该关节变量产生的动平台输出位置^[19]。

串联机器人属于开链式结构，每一个关节都有一个驱动。其运动学正解所研究的内容是由给定的关节变量求解出末端操作器的位姿，而反解则是对给定的末端操作器位姿求解出对应的关节变量。串联机器人运动学的研究方法主要采用 Denavit-HartenBerg 法，通过建立支链的 D-H 参数，以此获得连杆的变换矩阵，从而得到末端操作器的位姿与关节变量之间的函数关系。串联机器人的正解比较直接，因此相对简单；而反解的求解则比较困难。目前对串联机器人的反解研究主要侧重于得到封闭解，也就是把问题简化为一个与末端操作器位姿和某个关节变量相关的代数等式，以此得到所有可能的解和末端操作器的位姿。一般的方法有：矢量代数法^{[20][21]}、几何方法^[22] 和螺旋代数法^[23]等等。

并联机器人则属于闭链式机构，一般情况而言，并联机器人的支链数目与其自由度数目相等，每一条支链有一个驱动。与串联机器人相反的是，并联机器人的反解内容简单直接，而正解则变得相当复杂。一般说来，随着机器人中独立的运动环路数目的增加，其运动学正解的求解难度将增加，而运动学反解的求解难度则降低^[24]。并联机器人正解所面临的困难主要有两点：一是正解所得到的都是非线性强耦合的方程组；二是正解所得到的支链驱动参数结果不唯一。目前，国内外对于并联机器人正解的解决方案也趋向于两种方式：

- ◆ 一是从机构本身的结构上进行改进，创造性的提出满足并联机构运动自由度要求的新型机构，并使得这种并联机构的运动学正反解的非线性耦合程度降低到最小，从而得到合适的解析解或者实时解。如东北大学的胡明等^[25]在1998年提出了一种以 Stewart 平台为基础的一种新型三杆三自由度纯平动并联机器人机构，其运动学正反解都相当简单，而且运动之间完全没有耦合；燕山大学机器人研究中心的赵铁石等^[26]在2000年所提出的一种实现空间三维移动和绕z轴转动的空间4-TRT 四自由度并联机器人，其运动学正解可以求解得到一个关于其中一个支链驱动变量的

8次方程，也就是得到正解的封闭解；扬州大学的陈文家等^[27]在2002年提出一种以铅垂导轨上4个滑块作为原动件的新型四自由度并联机器人，该并联机器人能实现两个方向的移动以及绕两个方向轴线的转动，其运动学正解最后可以归结为含有6个未知数的高次非线性方程组，并应用Newton-Raphson方法求解；东南大学的金琼^[28]在2001年提出一类新型的三平移并联机器人机构，通过对机构的支链进行特殊的配置，使得各支链结构相同并不存在虚约束，并使得运动学的正解具有一定的解耦性。

- ◆ 二是从数学的角度出发，对已有的机构运动正反解结果运用各种数学算法进行解耦，或者对机构的运动副数学模型进行优化，从而降低运动正解的数目及其非线性属性。如郑州大学的孔宪文^[29]在1999年根据连续法求解多项式方程组时构造初始方程组的一条新原则，给出了3-RPS并联机构位置反解的高效算法，使得其位置反解的数目降低到最小8；中科院的邹豪^[30]等在1997年根据运动学等效的原则，在并联机器人中引入等效串联机器人以及分支等效串联机器人，以等效广义坐标为中间变量建立并联机器人运动学正解求解算法，从而能有效的处理结构带来的运动耦合以及避免多解性；西安交通大学的周冰^[31]在2000年针对一类3-RSR并联机器人提出一种新的姿态描述方法，并以此对机器人进行几何分析，得到并联机器人运动学正解的封闭解；Der-Ming Ku^[32]在1997年运用一种基于Newton-Raphson的方法来求解Stewart平台的运动学正解，由数值仿真可以看出这种方法比以前的方法更有效更简单；J-P Merlet^[33]在1992年对用于求解并联机器人正解的两种迭代算法、一种简化的迭代算法和一种多项式算法进行了比较，分析了各自的优缺点。

对于本课题所研究的4-RRCR四自由度并联机器人而言，在其可达的工作空间之内，运动学反解可以得到解析解，而且每一条支链反解的个数将从1变化到4个；运动学正解的结果则比运动学反解的结果复杂得多，支链中被动的转动副由于上平台位姿变化引起转动而带来移动副的伸缩，即所谓的移动副与转动副发生了运动耦合，或者称运动派生^[30]，这样的运动学正解运动学方程中将会使得每条支链中被动转动副变量与动平台的位姿变量之间将会发生耦合，因此无法得到运动学正解的解析解，得到的将是实时解，运动学正解的结果将是动平台某个位姿变量的非线性等式，而非高次线性多项式。

4.1 并联机器人机构的运动关系描述

为便于运动学分析, 在 4-RRCR 四自由度并联机器人上建立如图 4-1 所示的坐标系:

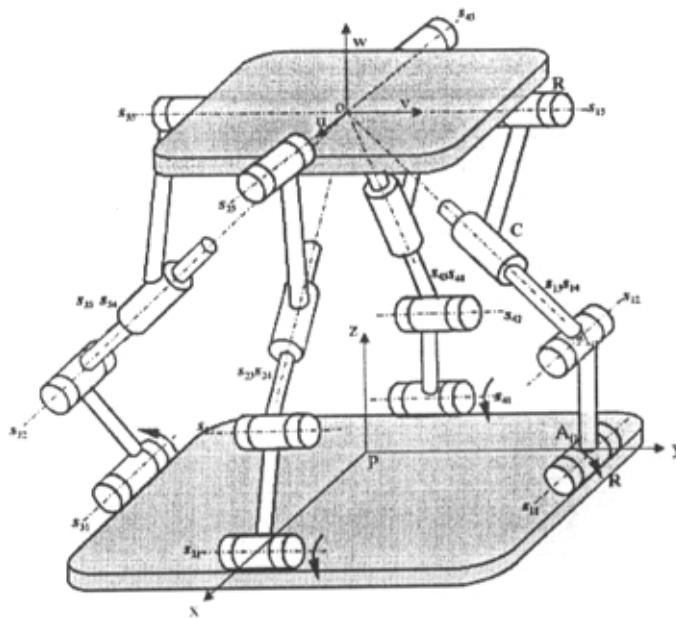


图 4-1 4-RRCR 并联机器人机构的坐标系

其中, 矢量 s_{ij} ($i=1 \sim 4$, $j=1 \sim 5$) 代表第 i 条支链的第 j 个运动副轴线的方向矢量。定平台和动平台的坐标系按如下的规则来确定:

1. 定平台坐标系 (即地面坐标系) pxy

原点在 p 点, x 轴与 s_{21} 以及 s_{41} 垂直, 正方向如图 4-1 所示; y 轴与 s_{11} 以及 s_{31} 垂直, 正方向如图 4-1 所示; z 轴由 x 轴和 y 轴按照右手螺旋法则确定, 沿着 po 的方向, 正方向从 p 点指向 o 点, po 用矢量 $\{0, 0, d\}$ (相对地面坐标系而言, 下同) 来表示。

2. 动平台坐标系 uvw

坐标系的原点取在各个支链最末端两个转动副轴线 s_{i5} 和 s_{i4} 的交点 o 点 (o 点同时也是动平台的中心点), 动坐标系的 u 轴与 s_{25} 和 s_{45} 重合, 正方向如图 4-1 所示, 矢量 u 表示为 $\{u_1, v_1, w_1\}$; v 轴与 s_{15} 和 s_{35} 重合, 方向如图 4-1 所示, 矢量 v 表示为 $\{u_2, v_2, w_2\}$, w 轴由 u 轴和 v 轴按照右手螺旋法则确定。

根据上述建立的坐标系, 可以定义机构其他相关的描述:

- ◆ s_{i1} 固定在定平台上, 与 x 轴或者 y 轴的交点为 A_{ii} , 原点 p 到 A_{ii} 的长度定义为 l_{i0} 。
- ◆ s_{i2} 与 s_{i1} 相互平行, 两者的公垂线交点分别为 A_{i1} 和 A_{i2} , 点 A_{i1} 和 A_{i2} 之间的距离定义为 l_{ii} ; 并且它们均与 xpz 平面平行 (当 $i=1,3$ 时) 或者垂直 (当 $i=2,4$ 时)。
- ◆ s_{i3} 和 s_{i4} 分别表示圆柱副 C 的转动副轴线的方向矢量和移动副轴线的方向矢量, 它们与 s_{i2} 垂直相交与点 A_{i2} ; s_{i3} 和 s_{i4} 在运动过程中始终与 s_{i5} 相交于点 o , 两者的夹角为常量 α_i 。 s_{i4} 用矢量 $\{x_i, y_i, z_i\}$ 表示, 其中 $x_1 = y_2 = x_3 = y_4 = 0$ 。

由上述的定义可知, 机构动平台的位姿参数可以用 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 共 7 个参数来表示, 其中只有 4 个参数是独立的。而每一条支链的驱动转动副的转动角 θ_{ii} 则是作为机构的输入参数, 因此运动学反解的目标为由动平台的 7 个位姿参数求解出支链驱动转动副的转角 θ_{ii} , 反之, 运动学正解的目标则为由支链驱动转动副的转角 θ_{ii} 求解出相应的动平台的位姿参数。

由第三章自由度的分析可知, 动平台的位姿变化是绕 o 点的三个转动和 o 点沿 z 轴的平动。因此, 为了建立动平台的输入与输出之间的关系, 连接位于同一平面上的 $op A_{i1} A_{i2}$ 四点, 构造如图 4-2 所示的几何关系图。

由图 4-2 所示的几何关系可得到如下的关系式:

1. d 与 θ_{ii} 的关系式

线段 $B_{i2} A_{i2}$ 的长度为 $(l_{i0} - l_{ii} \cos \theta_{ii})$, 由此得到线段 oB_{i2} 的长度为 $(l_{i0} - l_{ii} \cos \theta_{ii}) \cot \varphi_i$, 线段 $A_{i2} B_{ii}$ 的长度为 $l_{ii} \sin \theta_{ii}$, 因此得到第一个关系式:

$$d = (l_{i0} - l_{ii} \cos \theta_{ii}) \cot \varphi_i + l_{ii} \sin \theta_{ii} \quad (4-1)$$

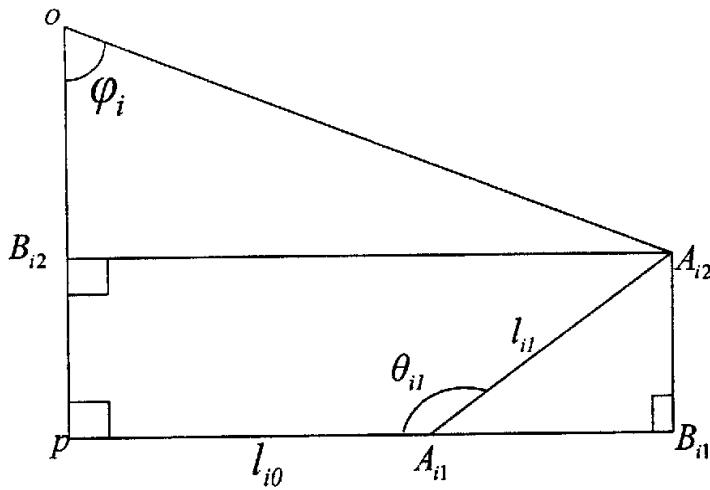


图 4-2 支链几何结构关系图

2. $s_{i4} = \{x_i, y_i, z_i\}$ 与 $u = \{u_1, v_1, w_1\}$ 和 $v = \{u_2, v_2, w_2\}$ 的关系式

因为在机构的运动过程中, s_{i4} 和 s_{i5} 之间的夹角是固定不变的为 α_i , 而 s_{i5} 与 v 重合 ($i=1$) 或者方向相反 ($i=3$), s_{i5} 与 u 重合 ($i=2$) 或者方向相反 ($i=4$), 把 s_{i4} 的表达式代入, 并用 φ_i 的三角函数来代替 s_{i4} 中的参数, 也就是 $s_{14} = \{0, y_1, z_1\} = \{0, \sin\varphi_1, -\cos\varphi_1\}$, $s_{24} = \{x_2, 0, z_2\} = \{\sin\varphi_2, 0, -\cos\varphi_2\}$, $s_{34} = \{0, y_3, z_3\} = \{0, -\sin\varphi_3, -\cos\varphi_3\}$, $s_{44} = \{x_4, 0, z_4\} = \{-\sin\varphi_4, 0, -\cos\varphi_4\}$ 。由此可以得到四个支链的关系式:

$$s_{14} \cdot v = \{0, \sin\varphi_1, -\cos\varphi_1\} \cdot \{u_2, v_2, w_2\} = v_2 \sin\varphi_1 - w_2 \cos\varphi_1 = \cos\alpha_1 \quad (4-2)$$

$$s_{24} \cdot u = \{\sin\varphi_2, 0, -\cos\varphi_2\} \cdot \{u_1, v_1, w_1\} = \sin\varphi_2 u_1 - \cos\varphi_2 w_1 = \cos\alpha_2 \quad (4-3)$$

$$s_{34} \cdot v = \{0, -\sin\varphi_3, -\cos\varphi_3\} \cdot \{u_2, v_2, w_2\} = -v_2 \sin\varphi_3 - w_2 \cos\varphi_3 = -\cos\alpha_3 \quad (4-4)$$

$$s_{44} \cdot u = \{-\sin\varphi_4, 0, -\cos\varphi_4\} \cdot \{u_1, v_1, w_1\} = -\sin\varphi_4 u_1 - \cos\varphi_4 w_1 = -\cos\alpha_4 \quad (4-5)$$

3. 动平台坐标轴之间的约束关系

动平台的 u 和 v 均为单位矢量, 因此其模为 1, 并且其各自 3 个方向矢量参数之间并不是完全独立的, 两者之间是相互垂直相交的, 由此得到关系式:

$$|u| = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1 \quad (4-6)$$

$$|v| = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1 \quad (4-7)$$

$$u \cdot v = \{u_1, v_1, w_1\} \cdot \{u_2, v_2, w_2\} = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0 \quad (4-8)$$

4.2 并联机器人运动学反解

当求解运动学反解时, 已知的参数为动平台的位姿参数, 也就是已知 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 共七个位姿参数, 求解的输入参数为 θ_{ii} , 其中 s_{i4} 为求解过程的中间变量。在计算过程中对三角函数进行处理, 采用半角来代替 θ_{ii} 和 φ_i 的函数表达式, 即:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_i &= \frac{2 \tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{2 t_{ii}}{1 + t_{ii}^2}, \quad \cos \varphi_i = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{1 - t_{ii}^2}{1 + t_{ii}^2}, \\ \cot \varphi_i &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{1 - t_{ii}^2}{2 t_{ii}} \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_{ii} &= \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)} = \frac{2 t_{2ii}}{1 + t_{2ii}^2}, \quad \cos \theta_{ii} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)} = \frac{1 - t_{2ii}^2}{1 + t_{2ii}^2}, \\ \cot \theta_{ii} &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\theta_{ii}}{2}\right)} = \frac{1 - t_{2ii}^2}{2 t_{2ii}} \end{aligned} \quad (4-10)$$

动平台的 u 和 v 均为单位矢量, 因此其模为 1, 并且其各自 3 个方向矢量参数之间并不是完全独立的, 两者之间是相互垂直相交的, 由此得到关系式:

$$|u| = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = 1 \quad (4-6)$$

$$|v| = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = 1 \quad (4-7)$$

$$u \cdot v = \{u_1, v_1, w_1\} \cdot \{u_2, v_2, w_2\} = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0 \quad (4-8)$$

4.2 并联机器人运动学反解

当求解运动学反解时, 已知的参数为动平台的位姿参数, 也就是已知 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 共七个位姿参数, 求解的输入参数为 θ_n , 其中 s_{i4} 为求解过程的中间变量。在计算过程中对三角函数进行处理, 采用半角来代替 θ_n 和 φ_i 的函数表达式, 即:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_i &= \frac{2 \tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{2t_{1i}}{1 + t_{1i}^2}, \quad \cos \varphi_i = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{1 - t_{1i}^2}{1 + t_{1i}^2}, \\ \cot \varphi_i &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)} = \frac{1 - t_{1i}^2}{2t_{1i}} \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_n &= \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = \frac{2t_{2i}}{1 + t_{2i}^2}, \quad \cos \theta_n = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = \frac{1 - t_{2i}^2}{1 + t_{2i}^2}, \\ \cot \theta_n &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} = \frac{1 - t_{2i}^2}{2t_{2i}} \end{aligned} \quad (4-10)$$

对支链 1, 在式 (4-2) 到式 (4-5) 中分别代入半角公式, 得到

$$(w_2 - \cos\alpha_1)t_{11}^2 + 2v_2 t_{11} - w_2 - \cos\alpha_1 = 0 \quad (4-11)$$

$$(w_1 - \cos\alpha_2)t_{12}^2 + 2u_1 t_{12} - w_1 - \cos\alpha_2 = 0 \quad (4-12)$$

$$(w_2 + \cos\alpha_3)t_{13}^2 - 2v_2 t_{13} - w_2 + \cos\alpha_3 = 0 \quad (4-13)$$

$$(w_1 + \cos\alpha_4)t_{14}^2 - 2u_1 t_{14} - w_1 + \cos\alpha_4 = 0 \quad (4-14)$$

因此, 由上述方程式可以得到 t_{1i} 的表达式:

$$t_{11} = \frac{w_2 + \cos\alpha_1}{2v_2} \text{ (当 } w_2 = \cos\alpha_1 \text{) 或}$$

$$t_{11} = \pm \sqrt{\frac{2(v_2^2 + w_2^2 - \cos^2\alpha_1)}{w_2 - \cos\alpha_1}} \text{ (当 } w_2 \neq \cos\alpha_1 \text{)} \quad (4-15)$$

$$t_{12} = \frac{w_1 + \cos\alpha_2}{2u_1} \text{ (当 } w_1 = \cos\alpha_2 \text{) 或}$$

$$t_{12} = \pm \sqrt{\frac{2(u_2^2 + w_1^2 - \cos^2\alpha_2)}{w_1 - \cos\alpha_2}} \text{ (当 } w_1 \neq \cos\alpha_2 \text{)} \quad (4-16)$$

$$t_{13} = \frac{-w_2 + \cos\alpha_3}{2v_2} \text{ (当 } w_2 = -\cos\alpha_3 \text{) 或}$$

$$t_{13} = \pm \sqrt{\frac{2(v_2^2 + w_2^2 - \cos^2\alpha_3)}{w_2 + \cos\alpha_3}} \text{ (当 } w_2 \neq -\cos\alpha_3 \text{)} \quad (4-17)$$

$$t_{14} = \frac{-w_1 + \cos\alpha_4}{2u_1} \text{ (当 } w_1 = -\cos\alpha_4 \text{) 或}$$

$$t_{14} = \pm \sqrt{\frac{2(u_2^2 + w_1^2 - \cos^2 \alpha_4)}{w_1 + \cos \alpha_4}} \quad (\text{当 } w_1 \neq -\cos \alpha_4) \quad (4-18)$$

同样在式 (4-1) 中代入 θ_n 的半角的表达式, 可以得到:

$$a_1 t_{2i}^2 + a_2 t_{2i} + a_3 = 0 \quad (4-19)$$

其中:

$$a_1 = (l_{i0} + l_{ii})(1 - t_{1i}^2) - 2dt_{1i}$$

$$a_2 = 4l_{ii}t_{1i}$$

$$a_3 = (l_{i0} - l_{ii})(1 - t_{1i}^2) - 2dt_{1i}$$

因此 t_{2i} 的解可以得到:

$$t_{2i} = \frac{-a_3}{a_2} \quad (\text{当 } a_1 = 0) \text{ 或 } t_{2i} = \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_1a_3}{2a_1}} \quad (\text{当 } a_1 \neq 0) \quad (4-21)$$

这样就得到了运动学的反解最终结果, 从上述分析可知:

- ◆ 如果 t_{1i} 只有一个解, 那么运动学的反解可能为一个或者两个
- ◆ 如果 t_{1i} 有两个解, 那么运动学的反解则为两个或者四个

4.3 并联机器人运动学正解

并联机器人正解所研究的内容是通过已知的支链驱动参数 θ_n , 求解出动平台的位姿参数 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 。并联机器人运动学的一个显著的特点就是由于各个运动参数之间出现不同程度的耦合和非线性关系, 其运动学正解的求解比其运动学反解要困难的多。其求解的目标一般是通过各种方法例如 Dialytic Elimination、Polynomial Continuation、Grobner base

等消元法^[34]来消去其他未知参数, 最终得到只含有动平台其中一个位姿参数的高次多项式, 进而通过该位姿参数求解其余的未知量。

本课题所研究的并联机器人运动学正解可以通过前述的辅助运动学等式方程来进行消元, 并最终可以得到只含有位姿参数 d 的一个等式, 进而由此求解出所有的位姿参数。

为了计算方便, 由式 (4-1) 进行转换:

$$\cot\varphi_i = b_i = \frac{d - l_{i0}\sin\theta_{i0}}{l_{i0} - l_{i1}\cos\theta_{i1}} \quad (4-21)$$

则有

$$\sin\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1+b_i^2}}, \quad \cos\varphi_i = \frac{b_i}{\sqrt{1+b_i^2}} \quad (4-22)$$

把式 (4-22) 代入到式 (4-2) 到式 (4-5) 中的四个表达式里, 并由此四个方程联立求解出含有 b_i 的 $\{u_1, w_1, v_2, w_2\}$ 的表达式:

$$u_1 = \frac{b_2 \cos\alpha_4 \sqrt{1+b_4^2} + b_4 \cos\alpha_2 \sqrt{1+b_2^2}}{b_2 + b_4} \quad (4-23)$$

$$w_1 = \frac{-\cos\alpha_2 \sqrt{1+b_2^2} + \cos\alpha_4 \sqrt{1+b_4^2}}{b_2 + b_4} \quad (4-24)$$

$$v_2 = \frac{b_1 \cos\alpha_3 \sqrt{1+b_3^2} + b_3 \cos\alpha_1 \sqrt{1+b_1^2}}{b_1 + b_3} \quad (4-25)$$

$$w_2 = \frac{-\cos\alpha_1 \sqrt{1+b_1^2} + \cos\alpha_3 \sqrt{1+b_3^2}}{b_1 + b_3} \quad (4-26)$$

由式 (4-6) 到式 (4-8) 三个方程消去变量 v_1 和 u_2 得到只含有 $\{u_1, w_1, v_2, w_2\}$ 的一个方程等式:

$$\begin{aligned}
 f_1(u_1, w_1, v_2, w_2) = & w_1^4(v_2^4 + 2v_2^2w_2^2 + w_2^4) + \\
 & w_1^2(2u_1^2v_2^2 - 2v_2^4 - 2u_1^2w_2^2 - 2v_2^2w_2^2 + 2u_1^2v_2^2w_2^2 + 2u_1^2w_2^4) \\
 & + u_1^4 - 2u_1^2v_2^2 + v_2^4 - 2u_1^2v_2^2 + v_2^4 - 2u_1^4w_2^2 + 2u_1^2v_2^2w_2^2 + u_1^4w_2^4 = 0
 \end{aligned} \quad (4-27)$$

把 $\{u_1, w_1, v_2, w_2\}$ 的表达式代入式 (4-27) 后, 便得到只含有参数 d 的一个方程等式:

$$f_2(d) = 0 \quad (4-28)$$

由求解过程中可以看到, 当由式(4-28)求解出一个 d 之后, $\{u_1, w_1, v_2, w_2\}$ 相对应只有一个解, 而由式 (4-6) 到式 (4-8) 三个方程中求解出的变量 v_1 和 u_2 将分别出现一个或者两个解的情况。

4.4 并联机器人运动学正反解方程的数值验证

上述求解过程已经从理论上对机构的运动学的数学模型进行了描述, 因此数值例子可以从另一方面对运动学的数学模型进行进一步分析。在此假设运动学反解参数 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 已经给予赋值, 从而由反解方程求出对应的 θ_{ii} : 另一方面, 从运动学正解的角度出发, 以反解方程求解出的 θ_{ii} 作为已知输入参数, 由运动学正解方程求解出 $\{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, d\}$ 。两者进行对比, 以此验证运动学数学模型的正确性。

1. 机构的结构参数赋值, 如表 4-1

表 4-1 机构结构参数列表

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
l_{i0} (毫米)	200	200	200	200
l_{ii} (毫米)	100	100	100	100
α_i (弧度)	0.96736	0.7732	0.6425	0.818

2. 运动学正解参数赋值如表 4-2

表 4-2 运动学正解参数列表

u_1	v_1	w_1	u_2	v_2	w_2	d (毫米)
0.91256	-0.40814	-0.02555	0.405384	0.894658	0.187752	268.99

3. 运动学反解求解结果如表 4-3 和表 4-4

式 4-15 到 4-18 的结果如表 4-3

表 4-3 运动学反解 t_{ii} 求解结果

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
t_{ii}	0.46869 或 4.24349	0.46649 或 1.99588	0.45872 或 1.35172	0.46723 或 2.30649

θ_{ii} 的求解结果如表 4-4

表 4-4 运动学反解 θ_{ii} 求解结果

解系列	θ_{11} (弧度)	θ_{21} (弧度)	θ_{31} (弧度)	θ_{41} (弧度)
1	1.60139	1.5861	1.5351	1.5912
2	2.92864	2.95116	3.02775	2.94363
3	-1.60139	-1.5861	-1.5351	-1.5912

4	-2.92864	-2.95116	-3.02775	-2.94363
5	0.46287+1.759 <i>43i</i>	0.92895+1.879 <i>65i</i>	1.27388+1.816 <i>8i</i>	0.81819+1.872 <i>92i</i>
6	0.46287-1.7594 <i>3i</i>	0.92895-1.8796 <i>5i</i>	1.27388-1.8168 <i>i</i>	0.81819-1.8729 <i>2i</i>
7	-0.46287+1.75 <i>943i</i>	-0.92895+1.87 <i>965i</i>	-1.27388+1.81 <i>68i</i>	-0.81819+1.87 <i>292i</i>
8	-0.46287-1.759 <i>43i</i>	-0.92895-1.879 <i>65i</i>	-1.27388-1.816 <i>8i</i>	-0.81819-1.872 <i>92i</i>

4. 运动学反解分析

由表 4-4 可见, θ_{ii} 一共有 8 个解, 但是 θ_{ii} 的取值是在 $(0 - \pi)$ 之间, 并且从中排除复数解, 那么每一个支链的 θ_{ii} 只有两个可行解 (表中的解 1 和 2)。

5. 运动学正解数值验证

取表 4-4 中的第一行解作为运动学正解的输入值, 即令 $\theta_{11} = 1.60139$ 、 $\theta_{21} = 1.5861$ 、 $\theta_{31} = 1.5351$ 、 $\theta_{41} = 1.5912$, 由式 (4-28) 可以求解出 d 如表 4-5。

表 4-5 d 值列表

解系列	d (毫米)
1	269.17286
2	220.12055
3	-19.40583
4	-67.82084

5~18	复数解
------	-----

由式 4-6、4-7 以及 4-23 到 4-26 可求解出剩余的运动学正解参数如

表 4-6 动平台姿态参数列表

解系列	u_1	v_1	w_1	u_2	v_2	w_2
1	0.913085	-0.406975	-0.025434	0.40424	0.895233	0.187478
2	0.913085	0.406975	-0.025434	-0.40424	0.895233	0.187478

表 4-6 和 4-5 与表 4-2 进行对比可以看出：运动学正解的结果不唯一；运动学正解的结果中包含有原先所赋值的正解参数，并且由于计算过程中对数值有近似的舍取，因此两者之间有微小的误差。这就证明了上述建立的运动学数学模型是正确的。

4.5 本章小结

机构的运动学方程在支链驱动关节参数与动平台位姿参数之间建立了映射关系，是机构运动学分析的基础。本章通过对 4-RRCR 并联机器人的结构进行分析，根据其几何关系建立了支链的运动学的数学模型，从中推导出了机构运动学正反解的求解步骤，并加以数值实例验证了该数学模型的正确性。

第五章 并联机构的雅克比及其奇异位形分析

并联机器人的雅克比分析与串联机器人的雅克比相比要复杂的多,因为并联机器人拥有更多的支链,由此形成许多闭合环路。这方面最早的研究是由 Waldorn^[35] (1966) 所提出的,之后还有 Davies 和 Primrose^[36] (1971) 以及 Baker^[37] (1980) 等进行了探讨。此后,并联机器人学者提出了各种相关的研究方法,例如 Mohamed^[38] (1983) 通过速度矢量回路等式的方法来确定支链关节相关的瞬时运动螺旋; Mohame 和 Duffy^[39] (1985) 介绍了用于雅克比分析的螺旋理论; Sugimoto^[40] (1987) 运用运动代数法进行并联机器人的雅克比分析等等。同时,雅克比矩阵还有其他的各种用途,如: Oblak 和 Kohli^[41] 在 1988 年提出用雅克比矩阵来描述机器人的操作空间; Gosselin^[42] 在 1990 以及 Tahmasebi 和 Tsai^[43] 在 1995 年把雅克比矩阵与机器人的刚度联系起来,从中提出了一些有利于机器人刚度优化的末端操作器与驱动关节之间的联系; Gosselin 和 Angeles^[44] 分别在 1988、1989 以及 1991 年提出把雅克比矩阵的条件数作为机器人驱动关节与末端操作器之间误差放大量的量度,由此作为机器人设计的一个优化性能指标。

并联机器人的奇异位形与其雅克比矩阵是紧密相关的,当处于奇异位形时,雅克比矩阵也将出现奇异 (Ma 和 Angeles, 1991^[45]、Shi 和 Fenton^[46], 1992、Wang 和 Gosselin^[47], 1996)。并联机器人奇异位形存在于其工作空间内,当并联机器人处于这样的位形时,将获得一个或更多的自由度或者失去一个或更多的自由度,由此将完全失去运动刚度。Gosselin 和 Angeles^[48]

(1990) 研究了闭环回路的并联机器人的奇异位形,并提出了把其雅克比矩阵分离成两部分:一部分与运动学正解相关,另一部分与运动学反解相关,由此闭环回路机器人的奇异位形分解为运动学正解奇异和运动学反解奇异;而 Zlatanov^[49] 在 1995 年提出一种并不基于传统的雅克比矩阵的奇异位形分类方法,该方法根据驱动关节(包括被动关节)速度与机器人输出速度之间的线性映射等式系统的退化情况,把奇异位形分成 6 种对应的情况; Merlet^[50] 在 1989 年运用 Grassman 线几何方法来定义并联机器人的奇异位形,通过线从和线汇的特性来判断机构的特殊位形,并在 1992 年把这种方法运用于一种几对同心球铰接于动平台的特殊 Stewart 平台机构的奇异位形分析上。

本章将运用螺旋理论对 4-RRCR 并联机器人进行雅克比矩阵的分析,并把奇异位形分成 3 种情况进行讨论,从中得出了机器人的雅克比矩阵及其多种可能发生的奇异位形。

5.1 并联机构的雅克比分析

5.1.1 并联机构的雅克比的定义

对于并联机器人而言, 雅克比矩阵为动平台在笛卡儿空间的运动速度与驱动关节速度之间的映射, 用式子表述如下:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (5-1)$$

其中 $\dot{\mathbf{q}}$ 是一个代表驱动关节速率的 m 维矢量, $\dot{\mathbf{x}}$ 则是代表末端操作器输出速率的 n 维矢量, 而 \mathbf{J} 是 $n \times m$ 的雅克比矩阵。对于本课题所研究的并联机器人而言, 4 条支链各带有一个驱动关节, 并且由此映射到动平台的 4 个输出自由度, 也就是机器人 4 个输入速度坐标对应动平台的 4 个输出速度坐标, 因此 \mathbf{J} 是一个 4×4 的方矩阵。然而, 某些情况也会出现 $m \neq n$ 的情况, 例如冗余自由度机器人可能具有超过 6 个驱动关节, 而末端输出的自由度最多只有 6 个, 也就是 $m > n$ 。

按照 Gosselin 和 Angeles 在 1990 对雅克比矩阵定义的扩展, 输入坐标和输出坐标之间的关系可以写成如下的关系式:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0 \quad (5-2)$$

\mathbf{F} 是 \mathbf{x} 和 \mathbf{q} 的隐函数。对式 5-2 两边同时对时间求导, 得到如下的等式:

$$\mathbf{J}_F \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (5-3)$$

$\mathbf{J}_F = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$, 是 $n \times n$ 的雅克比矩阵; $\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$, 是 $n \times m$ 的雅克比矩阵。并且 \mathbf{J}_F 和 \mathbf{J}_x 在结构上是各自独立的, 也就是说 $\mathbf{J}_F = \mathbf{J}_F(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ 且 $\mathbf{J}_x = \mathbf{J}_x(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ 。

按照第三章自由度的分析可知, 动平台的 4 个自由度为绕 o 点的三个转动自由度和沿 z 轴的移动自由度, 因此定义 \mathbf{q} 和 \mathbf{x} 的表达式如下:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

其中 $(\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{21}, \dot{\theta}_{31}, \dot{\theta}_{41})$ 代表 4 个支链的驱动关节转动速率, (v_z, w_x, w_y, w_z) 分别代表动平台在固定坐标系中沿 z 轴的移动速率以及绕 o 点的转动速度在 (x, y, z) 轴方向的分量, J_I 和 J_F 均是 4×4 的雅克比矩阵。

5.1.2 基于螺旋理论的雅克比矩阵分析

由于并联机器人有多个闭环回路, 每一个支链与动平台之间都形成一个运动回路, 因此动平台的瞬时运动即其输出运动螺旋 $\varepsilon = (w, v)$ 与关节速率 $\dot{\theta}_i$ 之间的关系可以由以下的等式表示:

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j \quad i = 1 \dots 4 \quad (5-5)$$

ε_j 表示第 i 条支链的第 j 个关节的运动螺旋, 这是进行雅克比矩阵进行分析的充分必要条件。式 (5-5) 中一共有 24 个等式, 但是这些等式并非完全独立, 并且 $\varepsilon = (w, v)$ 中只有 4 个运动变量, 也就是 (v_z, w_x, w_y, w_z) 。

在第三章机构的自由度分析中可知, 该并联机构的自由度是绕 o 点三个方向的转动以及沿着 z 轴的移动, 动平台所受的力螺旋都通过 o 点, 并且位于与 xy 平面平行的平面上, 因此, 动平台受到的力螺旋可以用两个线性无关的基的组合得到, 这两个基为:

$$\sigma_{w1} = (1, 0, 0; 0, d, 0) \text{ 和 } \sigma_{w2} = (0, 1, 0; -d, 0, 0) \quad (5-6)$$

按照螺旋理论, 动平台受到的力螺旋与运动螺旋之间是螺旋与反螺旋的关系, 因此可以得到如下的等式:

$$\sigma_{w1} \circ \varepsilon = \sigma_{w1} \circ \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j = 0; \quad \sigma_{w2} \circ \varepsilon = \sigma_{w2} \circ \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j = 0 \quad (5-7)$$

这样, 对于求解关节速度或者反求动平台运动螺旋而言, 式 (5-5) 和式 (5-7) 一共有 20 个变量和 20 个等式, 理论上为关节速度以及动平台的运动螺旋求解提供了依据。

事实上, 对于任一个支链 i , 都可以找到一个仅含有运动学位姿正反解参数的螺旋 ε_i^0 , 使得其为螺旋系 $\dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j$ ($j = 2, 3, 4, 5$) 的反螺旋, 然后在式(5-5)的两端均与 ε_i^0 进行反螺旋乘积, 即

$$\varepsilon_i^0 \circ \varepsilon = \varepsilon_i^0 \circ \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j \quad (5-8)$$

由此得到仅含有动平台输出运动螺旋以及各个支链驱动关节转动速率的等式, 即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \circ \varepsilon \\ \varepsilon_2^0 \circ \varepsilon \\ \varepsilon_3^0 \circ \varepsilon \\ \varepsilon_4^0 \circ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \circ \dot{\theta}_{11} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2^0 \circ \dot{\theta}_{21} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_3^0 \circ \dot{\theta}_{31} \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_4^0 \circ \dot{\theta}_{41} \varepsilon_{41} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

上述求解过程为本章雅克比矩阵求解的思路, 其中将运用式(5-7)把每条支链的 5 个关节速度变量组合成 4 个关节速度, 并产生螺旋 ε_i^0 , 使其与 ε 的反螺旋乘积结果只含有 (v_z, w_x, w_y, w_z) 4 个变量, 从而求解出 $\mathbf{J}_F = \mathbf{J}_F(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ 和 $\mathbf{J}_I = \mathbf{J}_I(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ 。

步骤 1. 并联机器人支链关节运动螺旋 ε_j 的建立

按照第二章螺旋理论的介绍, 支链关节的运动螺旋可以表示为 $\varepsilon_j = (s_j; r_j \times s_j)$, 其中 s_j 是支链关节的轴线矢量, r_j 是坐标原点到该关节轴线上任一点的矢量。同时结合第四章图 4-1 所建立的坐标体系以及图 4-2 的支链几何结构图, 可以建立支链的关节运动螺旋:

表 5-1 支链关节运动螺旋系

ε_j	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$	$(1, 0, 0; 0, 0, -l_{10})$	$(0, 1, 0; 0, 0, l_{20})$	$(1, 0, 0; 0, 0, l_{30})$	$(0, 1, 0; 0, 0, -l_{40})$

$j = 2$	$(1, 0, 0; 0, l_{11} \sin \theta_{11}, -l_{10} + l_{11} \cos \theta_{11})$	$(0, 1, 0; -l_{21} \sin \theta_{21}, 0, l_{20} - l_{21} \cos \theta_{21})$	$(1, 0, 0; 0, l_{31} \sin \theta_{31}, l_{30} - l_{31} \cos \theta_{31})$	$(0, 1, 0; -l_{41} \sin \theta_{41}, 0, -l_{40} + l_{41} \cos \theta_{41})$
$j = 3$	$(0, 0, 0; 0, \sin \varphi_1, -\cos \varphi_1)$	$(0, 0, 0; \sin \varphi_2, 0, -\cos \varphi_2)$	$(0, 0, 0; 0, -\sin \varphi_3, -\cos \varphi_3)$	$(0, 0, 0; -\sin \varphi_4, 0, -\cos \varphi_4)$
$j = 4$	$(0, \sin \varphi_1, -\cos \varphi_1; -d \sin \varphi_1, 0, 0)$	$(\sin \varphi_2, 0, -\cos \varphi_2; 0, d \sin \varphi_2, 0)$	$(0, -\sin \varphi_3, -\cos \varphi_3; d \sin \varphi_3, 0, 0)$	$(-\sin \varphi_4, 0, -\cos \varphi_4; 0, d \sin \varphi_2, 0)$
$j = 5$	$(u_2, v_2, w_2; -dv_2, du_2, 0)$	$(u_1, v_1, w_1; -dv_1, du_1, 0)$	$(-u_2, -v_2, -w_2; dv_2, -du_2, 0)$	$(-u_1, -v_1, -w_1; dv_1, -du_1, 0)$

步骤 2. 支链运动关节速度变量的重新组合

按照求解思路, 对每一个支链的关节运动螺旋运用式 (5-7) 都可以进行关节速度变量的重新组合。首先对支链 1 运用式 (5-7) 进行计算, 得到:

表 5-2 支链 1 的式 (5-7) 计算结果

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{1j} \circ \boldsymbol{\sigma}_{w1}$	0	0	0	0	0

$\varepsilon_{1j} \circ \sigma_{w2}$	$-d$	$-d + l_{11} \sin \theta_{11}$	$\sin \varphi_1$	0	0
--------------------------------------	------	--------------------------------	------------------	---	---

因此得到关于 $\dot{\theta}_{1j}$ 的一个表达式:

$$-d \dot{\theta}_{11} + (-d + l_{11} \sin \theta_{11}) \dot{\theta}_{12} + \sin \varphi_1 \dot{\theta}_{13} = 0 \quad (5-10)$$

从中消去 $\dot{\theta}_{13}$ ，即

$$\dot{\theta}_{13} = \frac{-d \dot{\theta}_{11} + (-d + l_{11} \sin \theta_{11}) \dot{\theta}_{12}}{\sin \varphi_1}, \text{ 此时可以重新进行支链 1 关节速度变}$$

量的组合，即得到式 (5-5) 的变形:

$$\varepsilon = \varepsilon'_{11} \dot{\theta}_{11} + \varepsilon'_{12} \dot{\theta}_{12} + \varepsilon_{14} \dot{\theta}_{14} + \varepsilon_{15} \dot{\theta}_{15} \quad (5-11)$$

$$\text{其中 } \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} + \frac{d}{\sin \varphi_1} \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{12} - \frac{-d + l_{11} \sin \theta_{11}}{\sin \varphi_1} \varepsilon_{13}.$$

这样就可以得到支链 2、3 和 4 的各自表达式:

支链 2:

表 5-3 支链 2 的式 (5-7) 计算结果

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$\varepsilon_{2j} \circ \sigma_{w1}$	d	$d - l_{21} \sin \theta_{21}$	$\sin \varphi_2$	0	0

$\varepsilon_{2j} \circ \sigma_{w2}$	0	0	0	0	0
--------------------------------------	---	---	---	---	---

$$\varepsilon = \varepsilon'_{21} \dot{\theta}_{21} + \varepsilon'_{22} \dot{\theta}_{21} + \varepsilon_{24} \dot{\theta}_{24} + \varepsilon_{25} \dot{\theta}_{25} \quad (5-12)$$

其中 $\varepsilon'_{21} = \varepsilon_{21} - \frac{d}{\sin\varphi_2} \varepsilon_{23}$, $\varepsilon'_{22} = \varepsilon_{22} - \frac{d - l_{21} \sin\theta_{21}}{\sin\varphi_2} \varepsilon_{23}$ 。

支链 3:

表 5-4 支链 3 的式 (5-7) 计算结果

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$\varepsilon_{3j} \circ \sigma_{w1}$	0	0	0	0	0
$\varepsilon_{3j} \circ \sigma_{w2}$	$-d$	$-d + l_{31} \sin\theta_{31}$	$-\sin\varphi_3$	0	0

$$\varepsilon = \varepsilon'_{31} \dot{\theta}_{31} + \varepsilon'_{32} \dot{\theta}_{32} + \varepsilon_{34} \dot{\theta}_{34} + \varepsilon_{35} \dot{\theta}_{35} \quad (5-13)$$

其中 $\varepsilon'_{31} = \varepsilon_{31} - \frac{d}{\sin\varphi_3} \varepsilon_{33}$, $\varepsilon'_{32} = \varepsilon_{32} - \frac{d - l_{31} \sin\theta_{31}}{\sin\varphi_3} \varepsilon_{33}$ 。

支链 4:

表 5-5 支链 4 的式 (5-7) 计算结果

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$\varepsilon_{4j} \circ \sigma_{w1}$	d	$d - l_{41} \sin\theta_{41}$	$-\sin\varphi_4$	0	0

$\mathcal{E}_{4j} \circ \sigma_{w2}$	0	0	0	0	0
--------------------------------------	---	---	---	---	---

$$\varepsilon = \varepsilon'_{41} \dot{\theta}_{41} + \varepsilon'_{42} \dot{\theta}_{42} + \varepsilon'_{44} \dot{\theta}_{44} + \varepsilon'_{45} \dot{\theta}_{45} \quad (5-14)$$

$$\text{其中 } \varepsilon'_{41} = \varepsilon_{41} + \frac{d}{\sin\varphi_4} \varepsilon_{43}, \quad \varepsilon'_{42} = \varepsilon_{42} - \frac{-d + l_{41} \sin\theta_{41}}{\sin\varphi_4} \varepsilon_{43}.$$

步骤 3. 求解螺旋系 $\{\varepsilon'_{i2}, \varepsilon'_{i4}, \varepsilon'_{i5}\}$ 反螺旋 ε_i^0

求解 $\{\varepsilon'_{i2}, \varepsilon'_{i4}, \varepsilon'_{i5}\}$ 反螺旋 ε_i^0 其目的就是希望藉此消去支链中非驱动关节的转速变量, 仅保留有 θ_{ii} 变量, 并使得动平台的运动螺旋中不含有沿 x 轴和 y 轴方向的线速度分量。

按照螺旋理论对于给定螺旋系求解反螺旋的方法, 当螺旋系中包含有 3 个螺旋时, 首先选定三维空间中任意 4 个线性无关, 也就是正交的螺旋, 同时这 4 个螺旋的选择还能保证求解出的 ε_i^0 与 ε 的互易积不含有 x 轴和 y 轴方向的线速度分量。为此, 选定这 4 个螺旋为:

$$\varepsilon_1 = (0, 0, 1; 0, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 0, 0; 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon_3 = (0, 0, 0; 0, 1, 0), \quad \varepsilon_4 = (0, 0, 0; 0, 0, 1)$$

这样, ε_i^0 就可以用下面的式子表示:

$$\varepsilon_i^0 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon'_{i2} \circ \varepsilon_1 & \varepsilon'_{i2} \circ \varepsilon_2 & \varepsilon'_{i2} \circ \varepsilon_3 & \varepsilon'_{i2} \circ \varepsilon_4 \\ \varepsilon'_{i4} \circ \varepsilon_1 & \varepsilon'_{i4} \circ \varepsilon_2 & \varepsilon'_{i4} \circ \varepsilon_3 & \varepsilon'_{i4} \circ \varepsilon_4 \\ \varepsilon'_{i5} \circ \varepsilon_1 & \varepsilon'_{i5} \circ \varepsilon_2 & \varepsilon'_{i5} \circ \varepsilon_3 & \varepsilon'_{i5} \circ \varepsilon_4 \end{vmatrix} = (0, 0, h_{i1}; h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}) \quad (5-15)$$

$(h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4})$ 的表达式见附录。

步骤 4. \mathbf{J}_p 和 \mathbf{J}_i 的求解

根据上述的求解思路，在式(5-5)的两端分别运用 ε_i^0 作以互易积，得到式(5-5)左端：

$$\varepsilon_i^0 \circ \varepsilon = (0, 0, h_{i1}; h_{i2}, h_{i3}, h_{i4}) \circ (v_x, v_y, v_z; w_x, w_y, w_z) = h_{i1}v_z + h_{i2}w_x + h_{i3}w_y + h_{i4}w_z$$

在式(5-5)的右端则可以得到：

$$\varepsilon_i^0 \circ \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \varepsilon_j = \varepsilon_i^0 \circ \dot{\theta}_{i1} \varepsilon'_{i1} + \varepsilon_i^0 \circ \dot{\theta}_{i2} \varepsilon'_{i2} + \varepsilon_i^0 \circ \dot{\theta}_{i3} \varepsilon'_{i3} + \varepsilon_i^0 \circ \dot{\theta}_{i4} \varepsilon'_{i4} = (\varepsilon_i^0 \circ \varepsilon'_{i1}) \dot{\theta}_{i1}$$

其中 $\varepsilon_i^0 \circ \varepsilon'_{i1}$ 的表达式见附录。

因此，综合上述两个等式，并考虑4个支链的全部情况，可以得到如下等式：

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \circ \varepsilon'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^0 \circ \varepsilon'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^0 \circ \varepsilon'_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4^0 \circ \varepsilon'_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

根据式 $\mathbf{J}_F \begin{bmatrix} v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \mathbf{J}_I \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix}$ 以及 $\mathbf{J}_I \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{41} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$ 可知：

$$\mathbf{J}_F = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}, \mathbf{J}_I = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \circ \varepsilon'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^0 \circ \varepsilon'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^0 \circ \varepsilon'_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4^0 \circ \varepsilon'_{41} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

因此 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_I^{-1} \mathbf{J}_F$ ，这就得到了雅克比矩阵 \mathbf{J} 。

5. 2 并联机构的奇异位形分析

当并联机器人处于某些位置时, 其雅克比矩阵也将成为奇异矩阵, 行列式为零, 这样式(5-16)中机器人的速度反解不存在, 这种机构的位形就叫做奇异位形。并联机器人在奇异位形时其自由度将发生改变, 因而机器人将会失去控制; 同时, 在奇异位形区域附近, 机构的运动传递性能也是相当差的, 关节所受到的驱动力或者力矩都将会趋于无限大, 以至破坏机构的结构。因此, 在设计和运用并联机器人时都应该详细分析出奇异位形的情况, 并使得其运动轨迹尽量避开奇异位形。

少自由度并联机器人的奇异位形可以分成以下三种情况^[13]:

◆ 支链奇异位形

这种奇异位形与串联机器人的奇异位形类似, 其产生的原因是支链的关节运动螺旋之间出现线性相关, 相应于该运动螺旋的独立力螺旋数量将增加, 因此动平台将失去一个或者更多的自由度。支链奇异位形可以通过计算支链运动螺旋系的秩来进行判定。

◆ 动平台奇异位形

动平台奇异位形产生的原因是动平台的总力螺旋系之间出现了线性相关, 也即动平台受到的相应力螺旋约束将减少, 因此动平台将获得一个或者多个自由度。动平台奇异位形可以通过计算动平台运动螺旋系的秩来进行判定。

◆ 驱动奇异位形

驱动奇异位形是由于采用不恰当的关节作为支链的驱动关节而造成的, 此时当所有的驱动关节被锁定不动时, 动平台仍然有某些自由度。一般说来, 支链中的任一个运动关节都可以选作为驱动关节, 但是在某些特殊的几何结构中, 选择不恰当的驱动关节可能会导致局部的运动, 也就是说当所有的驱动关节都停止运动时, 机构中某些局部结构仍能够运动。因此, 支链驱动关节选择的原则是当所有的驱动关节停止运动时, 对应的动平台力螺旋系是 6 维系统, 此时支链运动螺旋的反螺旋系的维数将增加 1 (Joshi 和 Tsai^[52]2002)。判别驱动关节奇异位形的一种方法是计算当所有的驱动关节均锁定时的动平台力螺旋系的秩, 当秩为 6 维时, 说明机构不会出现驱动奇异位形, 否则就有必要更改支链的驱动

关节或者改变并联机器人的结构。

本章节将按照上述定义, 分别讨论 4-RRCR 并联机器人的支链奇异位形、动平台奇异位形和驱动奇异位形三种情况。

5.2.1 并联机构的支链奇异位形分析

支链奇异位形的分析方法主要就是对每条支链的关节运动螺旋系进行分析, 从中寻找出现运动螺旋之间发生线性相关的可能情况。4-RRCR 并联机器人的每条支链都是由 5 个关节运动副组成的, 5 维线性无关的运动螺旋系其反螺旋是 1 维力螺旋, 该力螺旋是施加在动平台上的。如果 5 维的运动螺旋系发生线性相关, 则对应的力螺旋系维数将超过 1, 那么这就使得动平台受到的力螺旋数量增加, 将可能导致力螺旋系秩发生增大的情况, 相应的动平台就将有可能失去 1 个乃至更多的自由度。

现在先取支链 1 进行分析, 按照表 5-1 所建立的支链运动螺旋系, 并结合第四章图 4-1 所建立的坐标体系以及图 4-2 的支链几何结构图, 支链 1 的运动螺旋系其矩阵表达式如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l_{11} \sin \theta_{11} & -l_{10} + l_{11} \cos \theta_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & -d \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ u_2 & v_2 & w_2 & -d v_2 & d u_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

因为在平台运动过程中, 一般不会出现 $\sin \varphi_1 = 0$ 的情况, 且为了便于研究该矩阵式秩, 在保证矩阵秩不发生变化的情况下, 可以通过矩阵行与行之间的运算把式(5-18)简化成阶梯状形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_{10} \\ 0 & \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & -d \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 + v_2 \cot \varphi_1 & 0 & d u_2 & l_{10} u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_{11} + \sin \theta_{11} \cot \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

因此, 由式(5-19)就可以得到该矩阵发生退化的 2 种情况:

◆ $\text{Cos}\theta_{11} + \text{Sin}\theta_{11}\text{Cot}\varphi_1 = 0$ 的情况

此时可知 $\text{Cot}\theta_{11} = -\text{Cot}\varphi_1$ ，即 $\theta_{11} + \varphi_1 = \pi$ ，矩阵的秩将不超过 4，支链发生奇异位形。

◆ $w_2 + v_2\text{Cot}\varphi_1 = 0$ 的情况

如果 $u_2 = 0$ ，则矩阵第三行必为零行，支链发生奇异位形；

如果 $u_2 \neq 0$ ，并且满足 $\frac{\text{Sin}\varphi_1}{d} = \frac{\text{Cos}\varphi_1}{-l_{10}}$ ，即 $\text{Cot}\varphi_1 = -\frac{l_{10}}{d}$ ，此时矩阵第三行

与第四行线性相关，此时支链也发生奇异位形。

其余支链的奇异位形也可以通过同样的方法求得：

支链 2 的支链奇异位形

支链的运动螺旋系为

$$\begin{bmatrix} \text{Sin}\varphi_2 & 0 & -\text{Cos}\varphi_2 & 0 & d\text{Sin}\varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -l_{20} \\ 0 & 0 & w_1 + u_1\text{Cot}\varphi_2 & -dv_1 & 0 & -l_{20}v_1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Sin}\varphi_2 & 0 & -\text{Cos}\varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Cos}\theta_{21} + \text{Sin}\theta_{21}\text{Cot}\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

两种奇异位形情况分别为：当 $\theta_{21} + \varphi_2 = \pi$ 时；当 $w_1 + u_1\text{Cot}\varphi_2 = 0 (v_1 = 0)$ 或者 $w_1 + u_1\text{Cot}\varphi_2 = 0$ 且 $\text{Cot}\varphi_2 = -\frac{l_{20}}{d} (v_1 \neq 0)$ 时。

支链 3 的支链奇异位形

支链的运动螺旋系为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{30} \\ 0 & -\sin\varphi_3 & -\cos\varphi_3 & d\sin\varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_2 + v_2 \operatorname{Cot}\varphi_3 & 0 & -du_2 & l_{30}u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_3 & -\cos\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_{31} - \sin\theta_{31} \operatorname{Cot}\varphi_3 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

两种奇异位形情况分别为：当 $\theta_{31} + \varphi_3 = \pi$ 时；当 $-w_2 + v_2 \operatorname{Cot}\varphi_3 = 0 (u_2 = 0)$ 或者 $-w_2 + v_2 \operatorname{Cot}\varphi_3 = 0$ 且 $\operatorname{Cot}\varphi_3 = -\frac{l_{30}}{d} (u_2 \neq 0)$ 时。

支链 4 的支链奇异位形

支链的运动螺旋系为

$$\begin{bmatrix} -\sin\varphi_4 & 0 & -\cos\varphi_4 & 0 & -d\sin\varphi_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -l_{40} \\ 0 & 0 & -w_1 + u_1 \operatorname{Cot}\varphi_4 & dv_1 & 0 & -l_{40}v_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi_4 & 0 & -\cos\varphi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{41} + \sin\theta_{41} \operatorname{Cot}\varphi_4 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

两种奇异位形情况分别为：当 $\theta_{41} + \varphi_4 = \pi$ 时；当 $-w_1 + u_1 \operatorname{Cot}\varphi_4 = 0 (v_1 = 0)$ 或者 $-w_1 + u_1 \operatorname{Cot}\varphi_4 = 0$ 且 $\operatorname{Cot}\varphi_4 = -\frac{l_{40}}{d} (v_1 \neq 0)$ 时。

5.2.2 并联机构的动平台奇异位形分析

第三章机构自由度的分析中曾对机构动平台受到的由各个支链提供的力螺旋系进行了分析，得出了如下的结论：

动平台所受到的力螺旋均为线矢量，它们的轴线矢量与所建立的坐标系统无关，并且都通过点 o ，位于与 xy 平面平行的平面上。

同时，当并联机构不发生支链奇异位形时，对表 5-1 中所建立的各支链运动螺旋系分别求解其反螺旋可以得到 4 个支链的反螺旋，其中两个为 $\sigma_{w1} = (1, 0, 0; 0, d, 0)$ 而另外两个为 $\sigma_{w2} = (0, 1, 0; -d, 0, 0)$ ，这就进一步证明了第三章研究得出的结论。因此，对于 4-RRCR 并联机器人而言， σ_{w1} 和 σ_{w2} 之间

不可能出现线性相关的情况，动平台受到的由 σ_{w1} 和 σ_{w2} 组成的 2 维力螺旋系不会出现降维的情况，换句话说，当不出现支链奇异位形时，动平台奇异位形的情况也不会发生，动平台不会增加自由度。

5.2.3 并联机构的驱动关节奇异位形分析

4-RRCR 并联机器人每个支链都有一个固接在静平台上的转动副作为驱动关节，这样就减少了运动负荷，相反串联机器人的驱动元件以及传动系统大都放在运动着的大小臂上，增加了系统的惯性，恶化了动力性能。当然，为了达到最优化的设计，也需要对驱动关节的选取进行研究，以避免当所有的驱动关节都锁定时，动平台仍具有一些自由度，也就是出现驱动关节奇异位形。

表 5-1 列举了包括驱动关节在内的所有支链关节的运动螺旋，当所有的驱动关节都锁定时，此时支链 i 的关节运动螺旋系为 $\{\varepsilon_j\}$ ($j = 2, 3, 4, 5$)，对应的反螺旋系为 2 维的力螺旋系 $\{\sigma_{ij}, \sigma_{i2}\}$ ，4 个支链受到的总力螺旋系 W 一共包括 8 个力螺旋量。判定机构是否存在驱动关节奇异位形的情况就是对动平台受到的 W 的秩进行计算，如果 W 的秩等于 6，则说明此时动平台的运动螺旋数量为零，动平台没有运动自由度，机构不存在驱动关节奇异位形；如果 W 的秩小于 6，则动平台至少具有一个运动自由度，机构将出现驱动关节奇异位形。

步骤 1. 支链力螺旋系的建立

按照表 5-1 所列举的支链运动螺旋系，通过计算可以建立支链的力螺旋系如表 5-6。

步骤 2. 动平台 W 的线性相关性分析

由表 5-4 可以看出： $\sigma_{11} = \sigma_{31}$, $\sigma_{21} = \sigma_{41}$ ，即 W 实际上只包含 6 个螺旋量； σ_{11} 和 σ_{21} 分别与其余 5 个螺旋量均线性无关。因此 W 内部螺旋量的线性相关性就等价于研究 $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{41}$ 之间的线性相关性。

步骤 3. σ_{11} 与 σ_{21} 的线性相关性

由表 5-4 可知，假设 σ_{11} 与 σ_{21} 线性相关，那么至少需要满足下面这两个条件：

表 5-6 应用于关节奇异位形分析的支链力螺旋系

	σ_{i1}	σ_{i2}
$i = 1$	$(1, 0, 0; 0, d, 0)$	$\{0, \text{Cot}\varphi_1, 1; l_{10} - l_{11}\text{Cos}\theta_{11} - l_{11}\text{Cot}\varphi_1\text{Sin}\theta_{11},$ $\frac{-u_2\text{Cos}\varphi_1(l_{10} - l_{11}\text{Cos}\theta_{11})}{\text{Sin}^2\varphi_1(v_2\text{Cos}\varphi_1 + w_2\text{Sin}\varphi_1)},$ $\frac{-u_2(l_{10} - l_{11}\text{Cos}\theta_{11})}{\text{Sin}\varphi_1(v_2\text{Cos}\varphi_1 + w_2\text{Sin}\varphi_1)}\}$
$i = 2$	$(0, 1, 0; -d, 0, 0)$	$\{\text{Cot}\varphi_2, 0, 1; \frac{v_1\text{Cos}\varphi_2(l_{20} - l_{21}\text{Cos}\theta_{21})}{\text{Sin}^2\varphi_2(u_1\text{Cos}\varphi_2 + w_1\text{Sin}\varphi_2)},$ $-l_{20} + l_{21}\text{Cos}\theta_{21} + l_{21}\text{Cot}\varphi_2\text{Sin}\theta_{21},$ $\frac{v_1(l_{20} - l_{21}\text{Cos}\theta_{21})}{\text{Sin}\varphi_2(u_1\text{Cos}\varphi_2 + w_1\text{Sin}\varphi_2)}\}$
$i = 3$	$(1, 0, 0; 0, d, 0)$	$\{0, -\text{Cot}\varphi_3, 1; -l_{30} + l_{31}\text{Cos}\theta_{31} + l_{31}\text{Cot}\varphi_3\text{Sin}\theta_{31},$ $\frac{u_2\text{Cos}\varphi_3(l_{30} - l_{31}\text{Cos}\theta_{31})}{\text{Sin}^2\varphi_3(v_2\text{Cos}\varphi_3 - w_2\text{Sin}\varphi_3)},$ $\frac{-u_2\text{Cos}\varphi_3(l_{30} - l_{31}\text{Cos}\theta_{31})}{\text{Sin}\varphi_3(v_2\text{Cos}\varphi_3 - w_2\text{Sin}\varphi_3)}\}$
$i = 4$	$(0, 1, 0; -d, 0, 0)$	$\{-\text{Cot}\varphi_4, 0, 1; \frac{-v_1\text{Cos}\varphi_4(l_{40} - l_{41}\text{Cos}\theta_{41})}{\text{Sin}^2\varphi_4(u_1\text{Cos}\varphi_4 - w_1\text{Sin}\varphi_4)},$ $l_{40} - l_{41}\text{Cos}\theta_{41} - l_{41}\text{Cot}\varphi_4\text{Sin}\theta_{41},$ $\frac{v_1\text{Cos}\varphi_4(l_{40} - l_{41}\text{Cos}\theta_{41})}{\text{Sin}\varphi_4(u_1\text{Cos}\varphi_4 - w_1\text{Sin}\varphi_4)}\}$

$$\begin{cases} \text{Cot}\varphi_1 = 0, \text{Cot}\varphi_2 = 0 (\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}) \\ l_{10} - l_{11}\text{Cos}\theta_{11} = 0, l_{20} - l_{21}\text{Cos}\theta_{21} = 0 \end{cases}$$

根据第四章图 4-2 的支链几何结构图可知， $(l_{10} - l_{11}\text{Cos}\theta_{11})\text{Cot}\varphi_1 + l_{11}\text{Sin}\theta_{11} = (l_{20} - l_{21}\text{Cos}\theta_{21})\text{Cot}\varphi_2 + l_{21}\text{Sin}\theta_{21}$ ，由此得出 $l_{10} = l_{20}$ 。

因此，只要在支链的结构上进行调整使得 $l_{10} \neq l_{20}$ ，那么 σ_{11} 与 σ_{21} 都将是线性无关。类似的， σ_{11} 与 σ_{41} 、 σ_{31} 与 σ_{21} 、 σ_{31} 与 σ_{41} 之间的线性相关性在结构上都满足这样的要求。依此类推，当 $l_{10} \neq l_{40}$ 、 $l_{30} \neq l_{20}$ 和 $l_{30} \neq l_{40}$ 都满足时，这 4 对螺旋量彼此之间就不可能发生线性相关。

步骤 4. σ_{11} 与 σ_{31} 的线性相关性

仍然由表 5-4 可知，假设 σ_{11} 与 σ_{31} 线性相关，那么至少需要满足 $\text{Cot}\varphi_1 = -\text{Cot}\varphi_3 (\varphi_1 + \varphi_3 = \pi)$ 这个条件，把这个条件代入第四章运动学分析中推导出的这两个等式： $\begin{cases} v_2\text{Sin}\varphi_1 - w_2\text{Cos}\varphi_1 = \text{Cos}\alpha_1 \\ v_2\text{Sin}\varphi_3 + w_2\text{Cos}\varphi_3 = \text{Cos}\alpha_3 \end{cases}$ ，可以得到 $\text{Cos}\alpha_1 = \text{Cos}\alpha_3 (\alpha_1 = \alpha_3)$ 。

因为 α_i 是机构本身的固有结构参数，因此当 $\alpha_1 \neq \alpha_3$ 时， σ_{11} 与 σ_{31} 就不会出现线性相关的情况。类似的当 $\alpha_2 \neq \alpha_4$ 时， α_2 和 α_4 也不会出现线性相关的情况。

这样，动平台 W 可能出现降秩的 6 种情况都讨论完毕，当 W 不降秩时，并联机器人将不会发生驱动关节奇异位形。

5.3 本章小节

本章对于雅克比矩阵的分析是基于螺旋理论的，以此建立了并联机器人的支链运动螺旋系，并把雅克比矩阵分解成运动学正解雅克比矩阵和运动学反解雅克比矩阵分别求解。

机构的奇异位形研究同样基于支链运动螺旋系，并分成支链奇异位形、动平台奇异位形和驱动关节奇异位形逐一分析。支链奇异位形存在于所有的 4 个支链，每条支链出现奇异位形所需满足的条件都详细列举在论文中；由于结构的特殊性，并联机器人不会在运动过程中出现动平台奇异位形的情况；驱动关节奇异位形分成两种情况，可以通过调整机构本身的结构参数来避免。

第六章 并联机构的虚拟样机设计

虚拟样机技术属于计算机辅助工程 (CAE) 的一个分支, 又称为机械系统动态仿真技术, 是 20 世纪 80 年代随着计算机技术的发展而迅速发展起来的一项新技术, 其核心是机械系统运动学和动力学仿真技术, 同时还包括三维 CAD 建模技术、有限元分析技术、机电液控制技术、最优化技术等相关技术^[52]。借助于这项技术, 工程师们可以在计算机上建立机械系统的模型, 伴之以三维可视化处理, 模拟在现实环境下系统的运动和动力特性, 并根据仿真结果精化和优化系统的设计与过程。

本章进行虚拟样机设计采用的是美国 MDI 公司 (Mechanical Dynamics inc) 开发的 ADAMS 软件, 首先依据 4-RRCR 并联机器人的结构特性建立其三维可视化模型, 其次绘制出与前面运动学分析相关的数据曲线, 最后对这些数据作进一步分析, 以此验证数学模型建立的正确性。

6.1 并联机构虚拟样机模型的建立

第三章关于机构自由度的分析里对并联机构本身的结构特性有以下 3 个方面的描述:

- ◆ s_{i4} 和 s_{i5} 在机构的运动过程中始终相交于同一点 (o 点)
- ◆ s_{i5} 与 s_{i4} 的夹角在运动过程中始终保持不变
- ◆ s_{i1} 与 s_{i2} 在运动过程中始终保持平行

机构的模型是按照图 4-1 的模式建立起来的, 上述这 3 个结构特性是保证其能达到预期运动特性的基础, 这就要求在机构的运动分析过程中, 这几个条件都能够满足。为此, 在支链 4 个驱动关节中施加运动, 运用 ADAMS 中的测量功能, 根据这些条件随时间的变化情况来判定上述要求是否能够得到满足。

6.1.1 s_{i4} 和 s_{i5} 在机构的运动过程中始终相交于同一点 (o 点)

因为 s_{i5} 本身是固定在动平台平面上, 并且彼此都是通过 o 点的, 因此在运动过程中 s_{i5} 始终相交于 o 点。为了验证 s_{i4} 是否满足要求, 可在 s_{i4} 上取两个不同的点 b_i 和 c_i , 如果由点 o、 b_i 和 c_i 构成的角度随时间保持为 180° 不

变, 那么由此就可以证明 s_{i4} 在机构的运动过程中始终相交于点 o。下面是 4 个支链依次得到的测量结果:

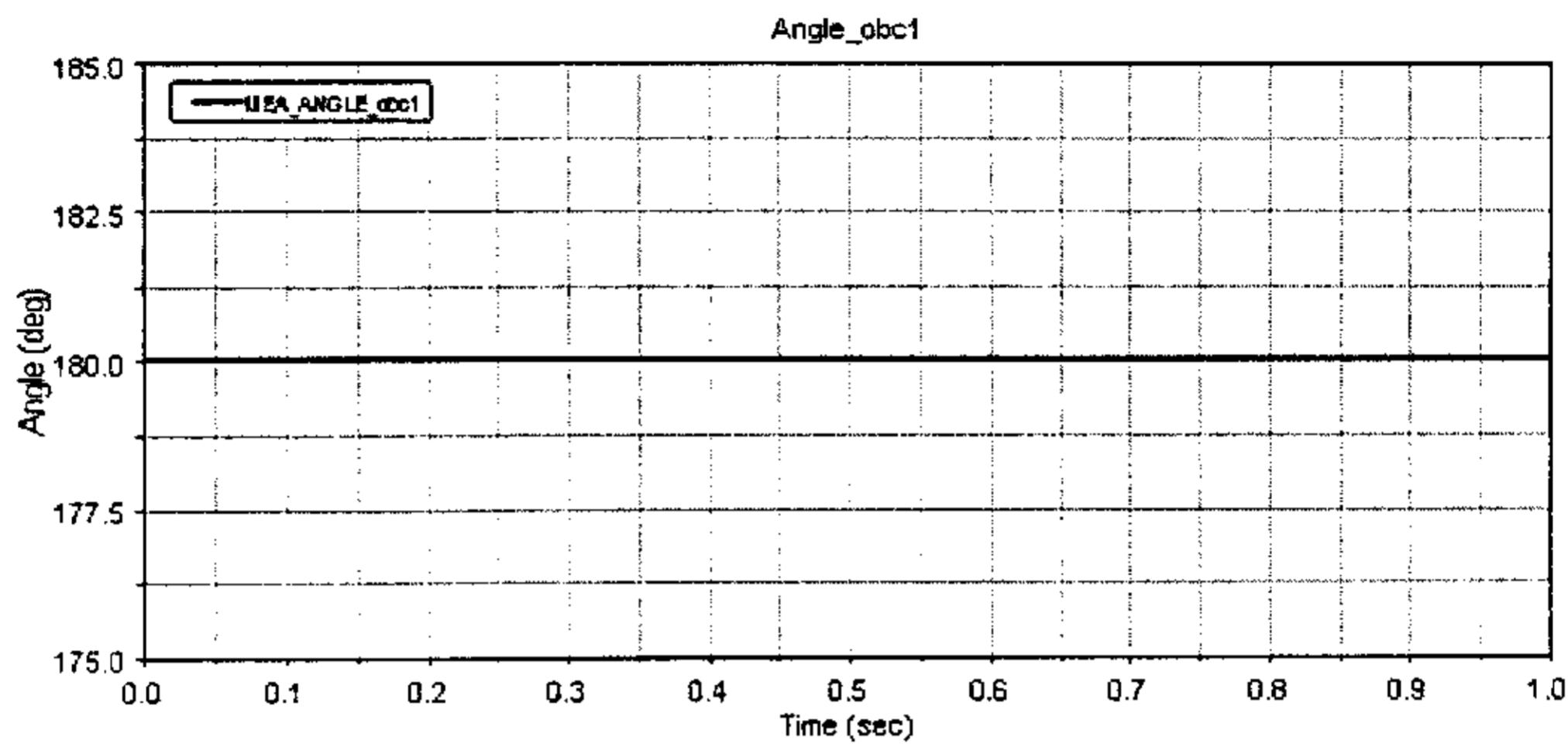


图 6-1 夹角 ob_1c_1 的变化曲线

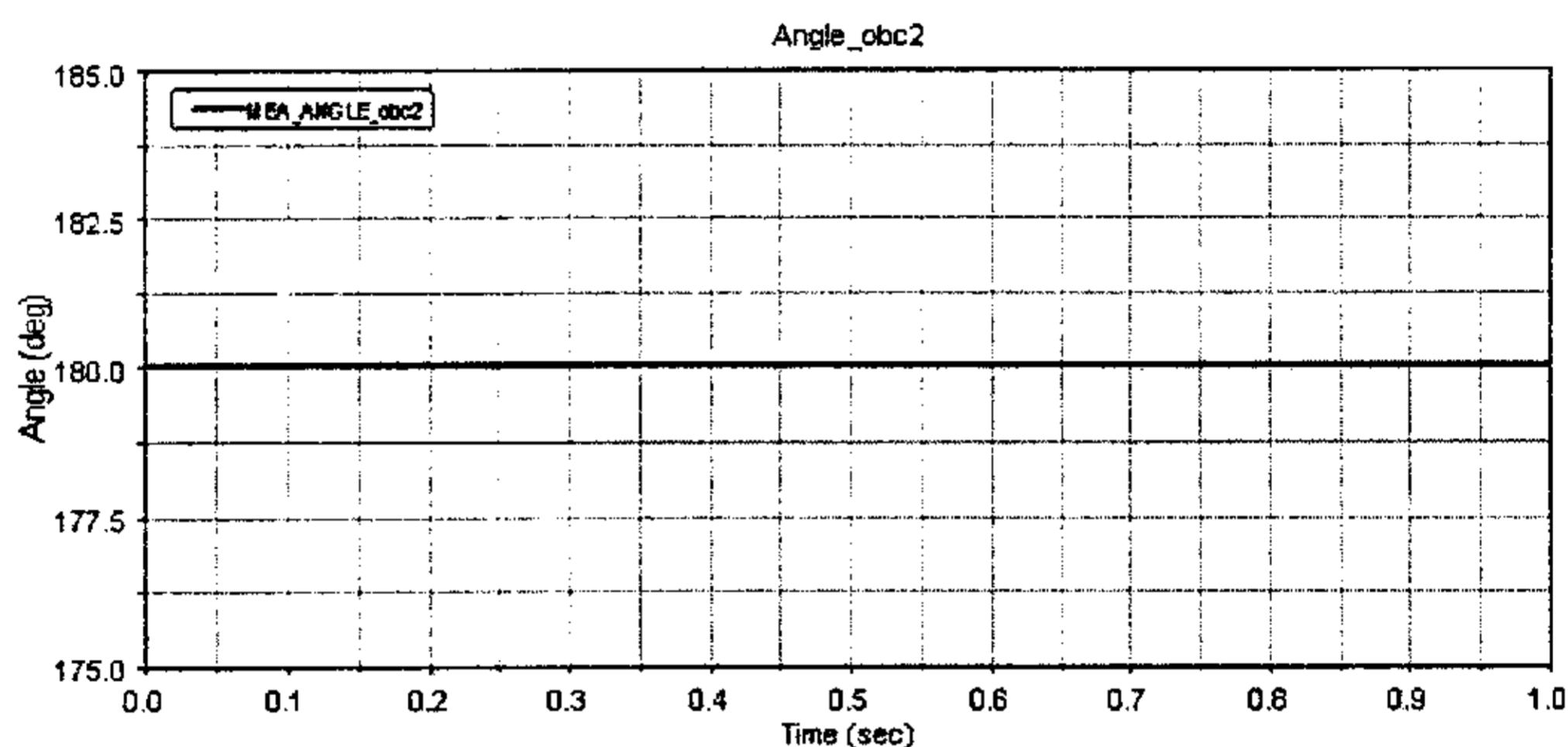


图 6-2 夹角 ob_2c_2 的变化曲线

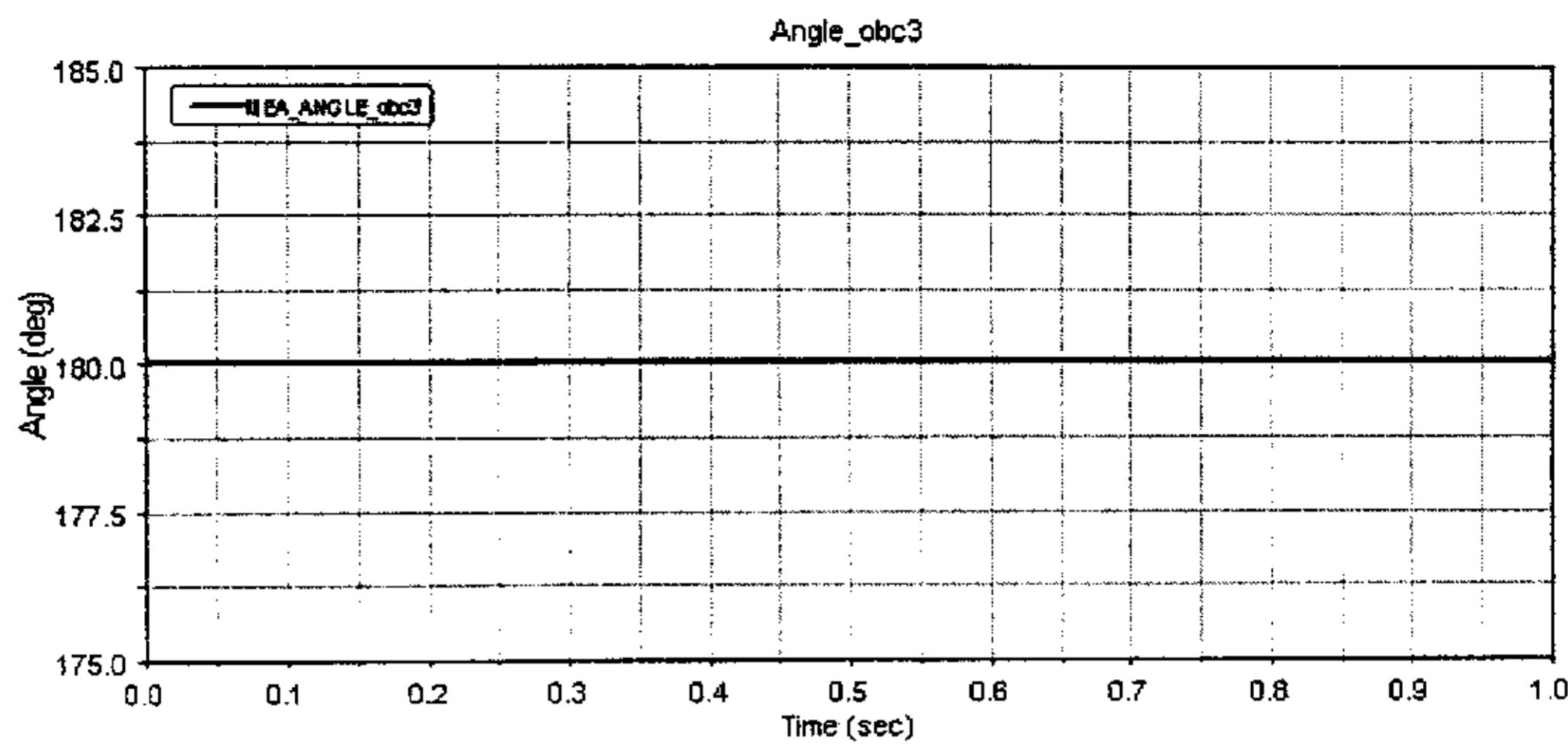


图 6-3 夹角 ob_3c_3 的变化曲线

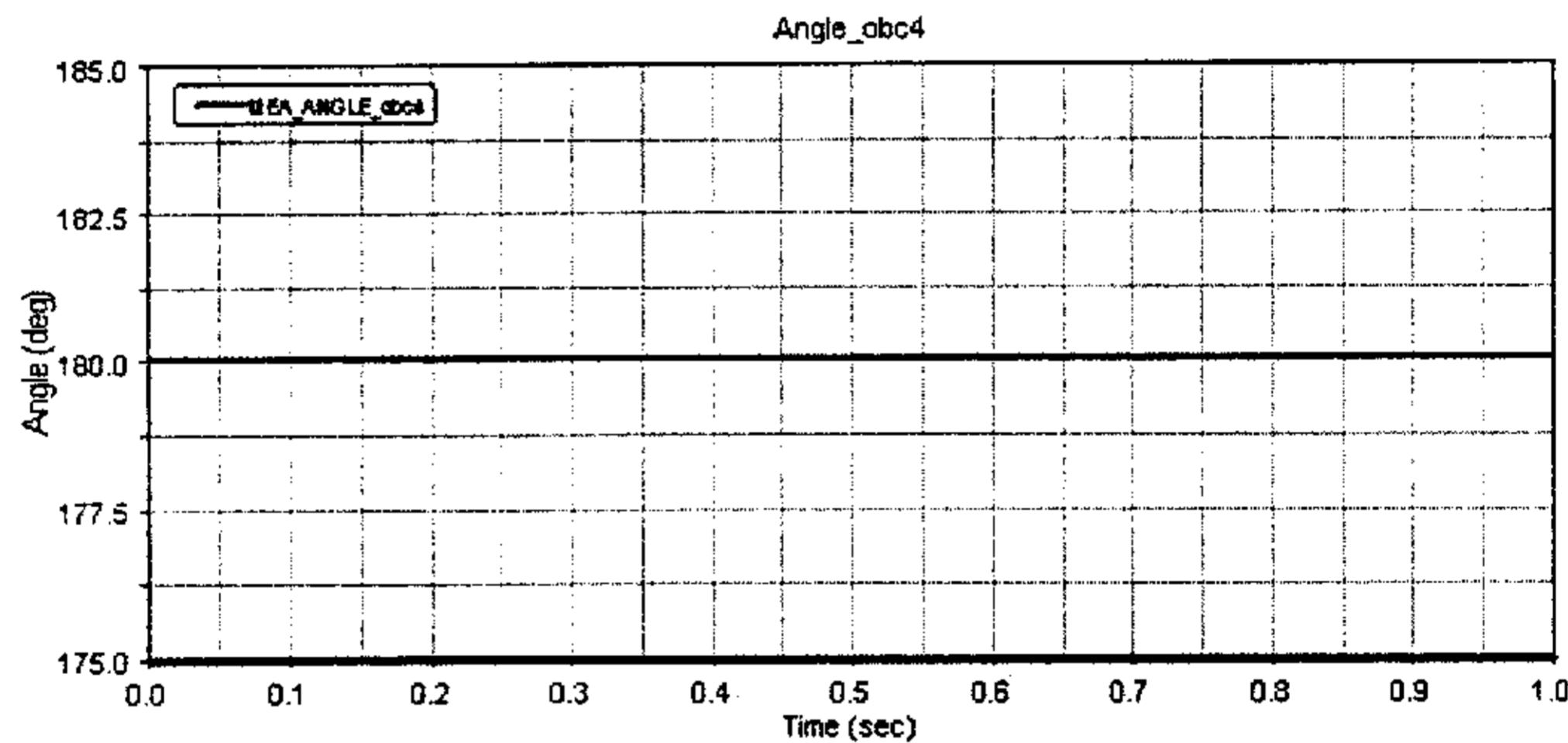


图 6-4 夹角 ob_4c_4 的变化曲线

图 6-1 到 6-4 描绘了由点 o 、 b_i 和 c_i 构成的角度随时间的变化曲线，从图中可以知：在测量时间范围之内这 3 个点之间构成的夹角保持 180° 不变， s_{i4} 在机构的运动过程中始终相交于点 o 。

6.1.2 s_{i5} 与 s_{i4} 的夹角在运动过程中始终保持不变

s_{i5} 与 s_{i4} 的夹角是第四章中的角 α_i ，与上一论述类似，取 s_{i5} 上的一点 e_i 、 o 点以及 s_{i4} 上一点 c_i 顺次构成角 α_i ，测量 α_i 随时间的变化曲线，以此验证其是否符合要求。以下是 4 个支链的测量结果：

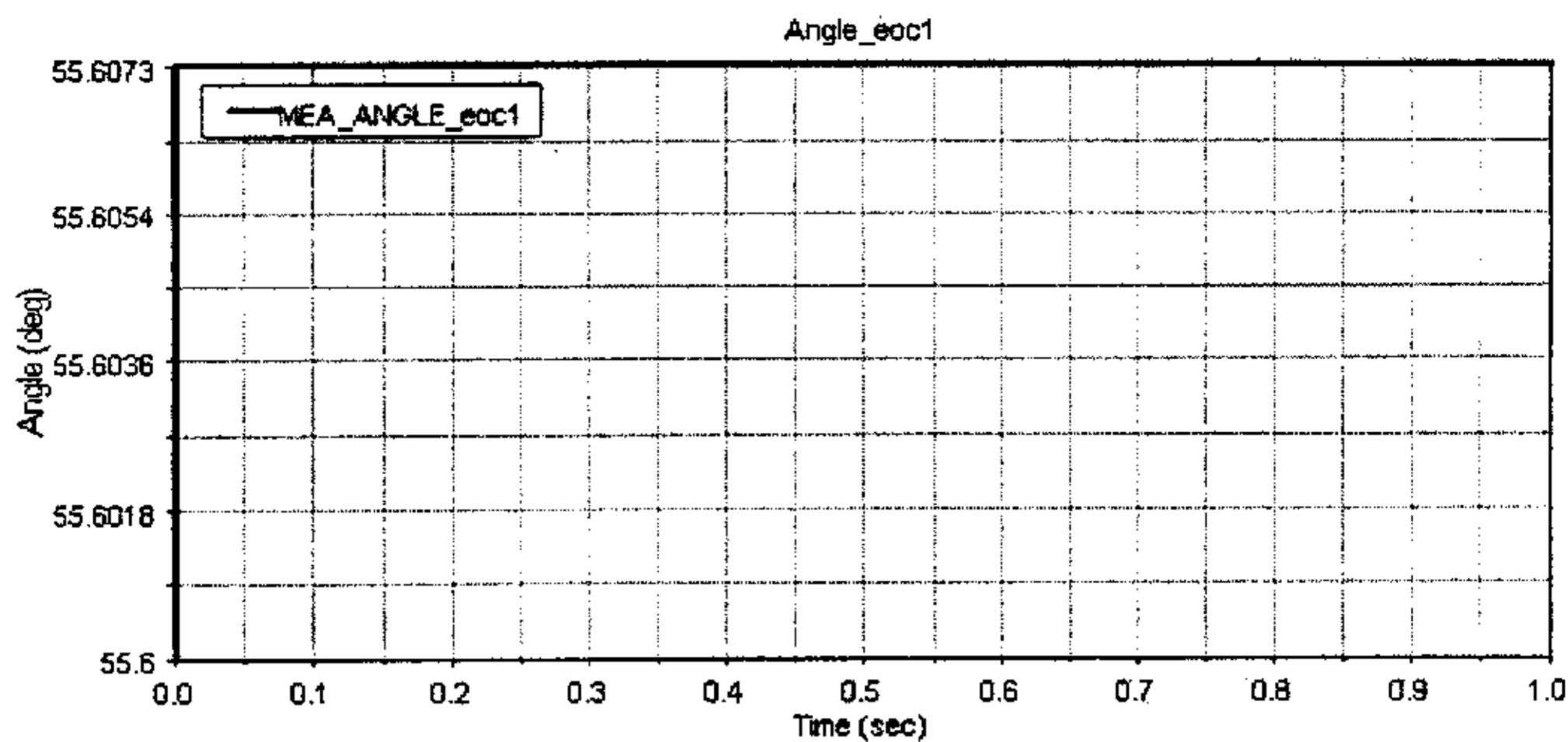


图 6-5 夹角 α_i 的变化曲线

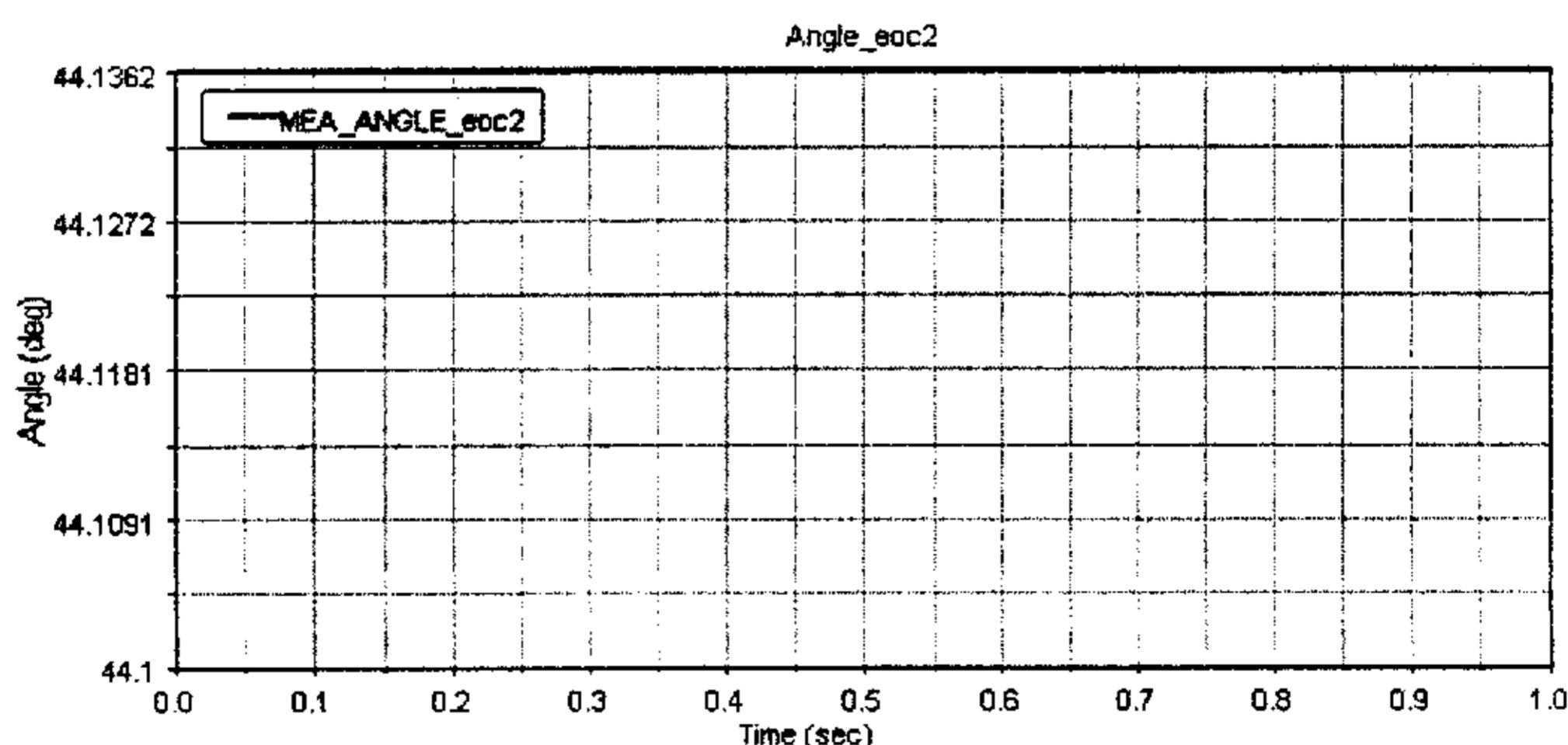


图 6-6 夹角 α_i 的变化曲线

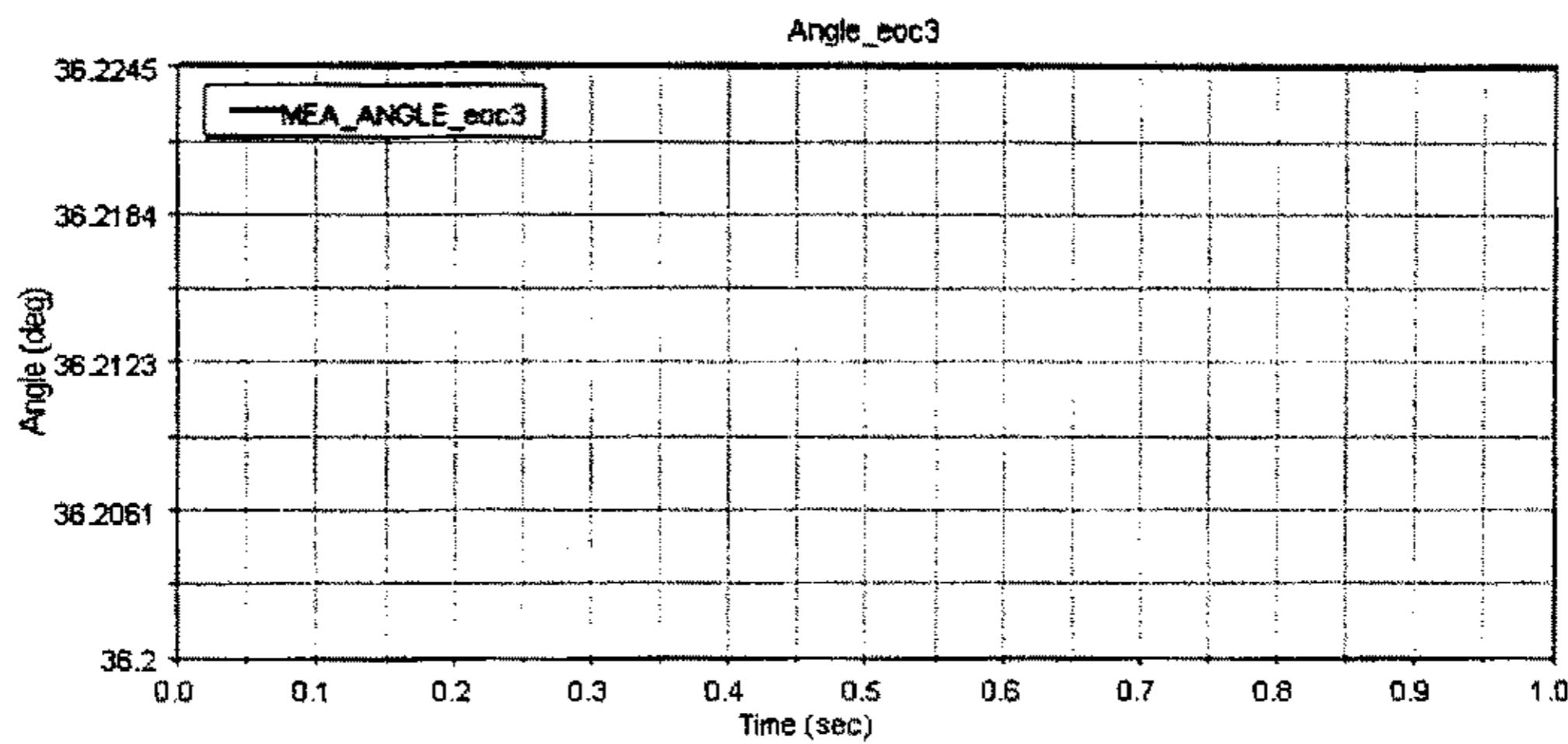
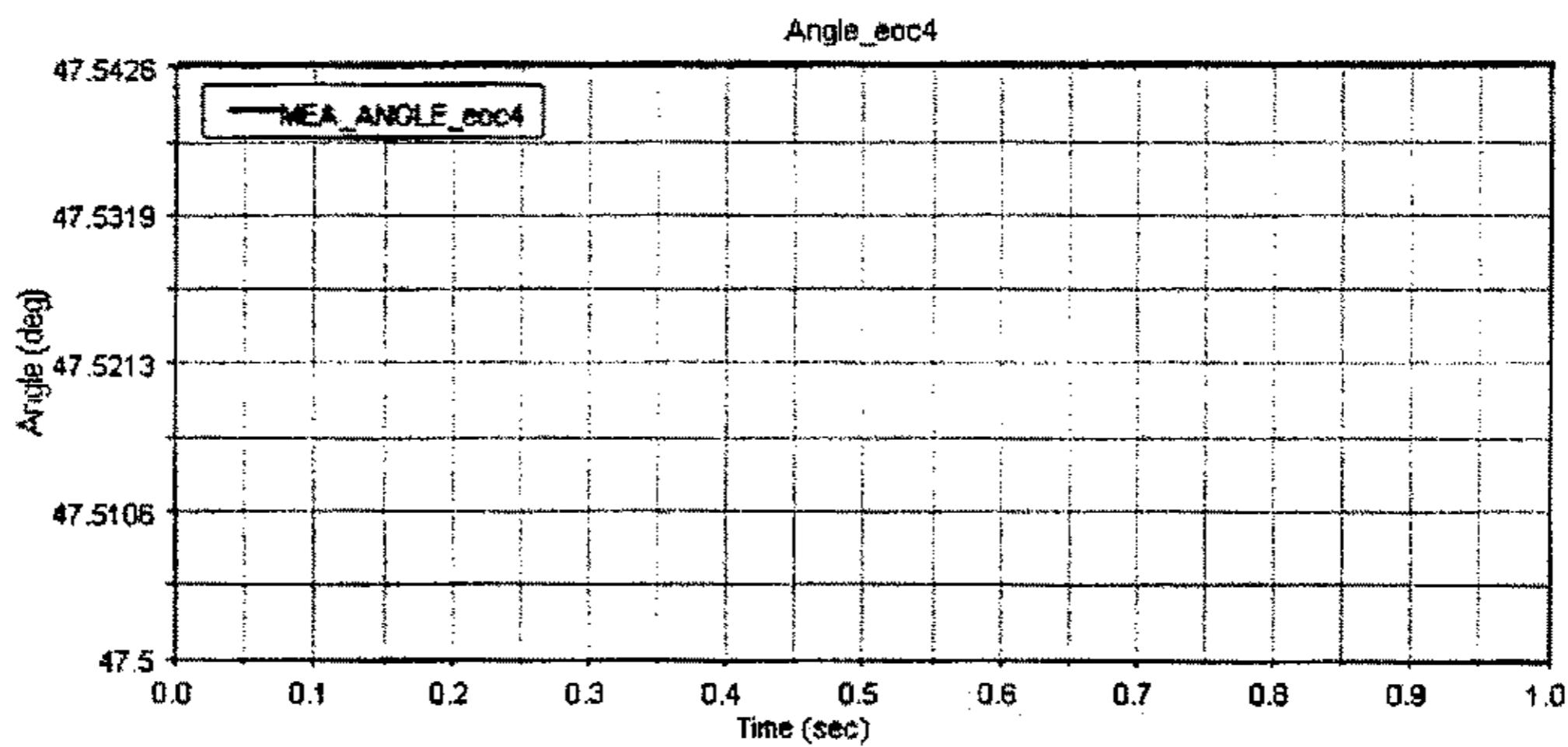
图 6-7 夹角 α_3 的变化曲线图 6-8 夹角 α_4 的变化曲线

图 6-5 到图 6-8 描绘了角 α_i 随时间的变化曲线，数据显示角 α_i 的测量值依次为： 55.6013° 、 44.1362° 、 36.2245° 以及 47.5425° ，并且在测量时间范围内不发生变化。因此可以从中得到的结论是： s_{i5} 与 s_{i4} 的夹角在运动过程中始终保持不变。

6.1.2 s_{i1} 与 s_{i2} 在运动过程中始终保持平行

由于在模型中, s_{i1} 与 s_{i2} 是彼此平行的固定在同一个圆柱上, 因此在运动过程中它们是作为一个整体运动, 这就保证了它们能始终保持平行。

6.2 并联机构虚拟样机的运动仿真

前面的几章已经从理论上对并联机器人的运动学进行了推导和计算, 而模型的运动仿真不仅可以得到直观的三维效果, 并且运动参数(如位移、速度和加速度等等)随时间的变化曲线也能够为验证理论推导的正确性提供所需的数据。

6.2.1 驱动关节输入角位移 θ_i 及其速度的变化曲线

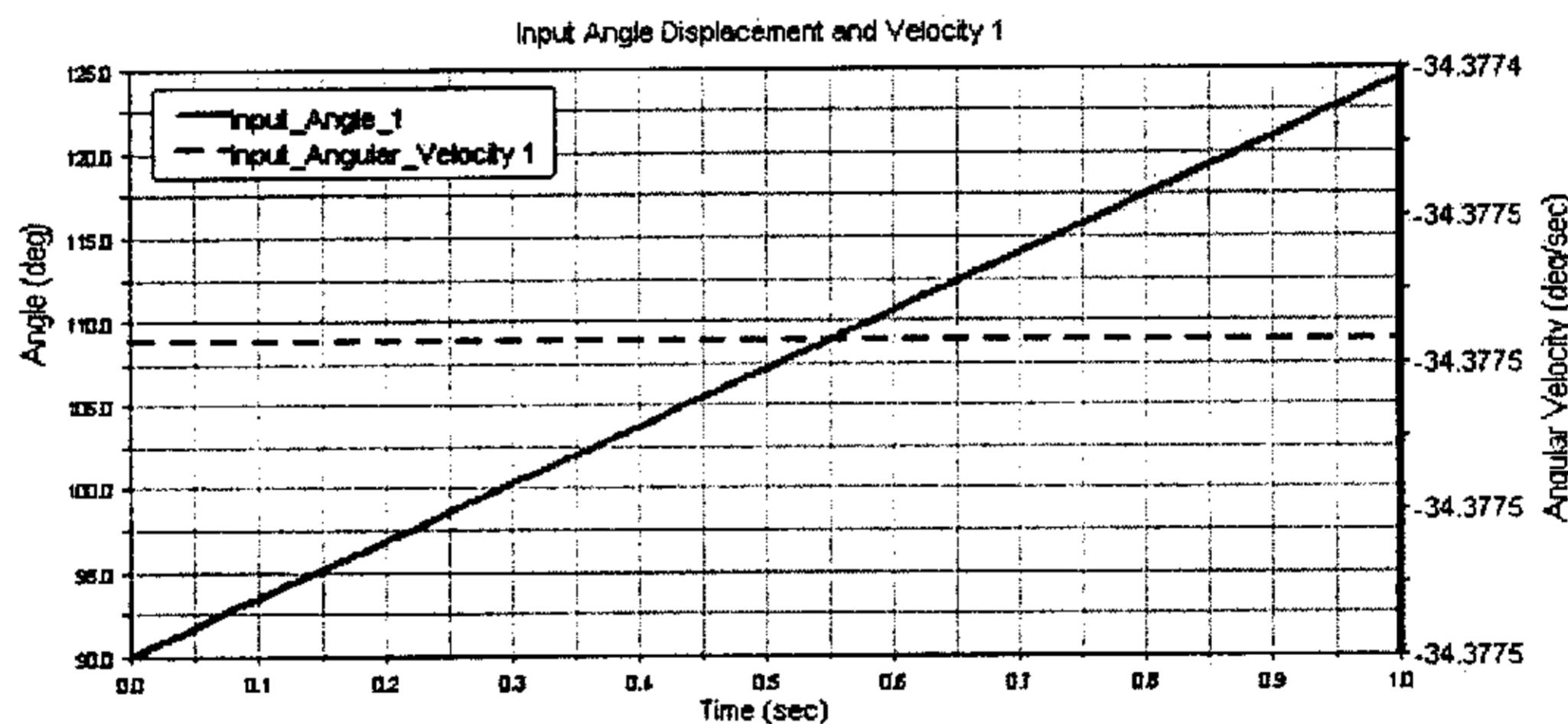


图 6-9 驱动关节 1 的输入角位移和速度变化曲线

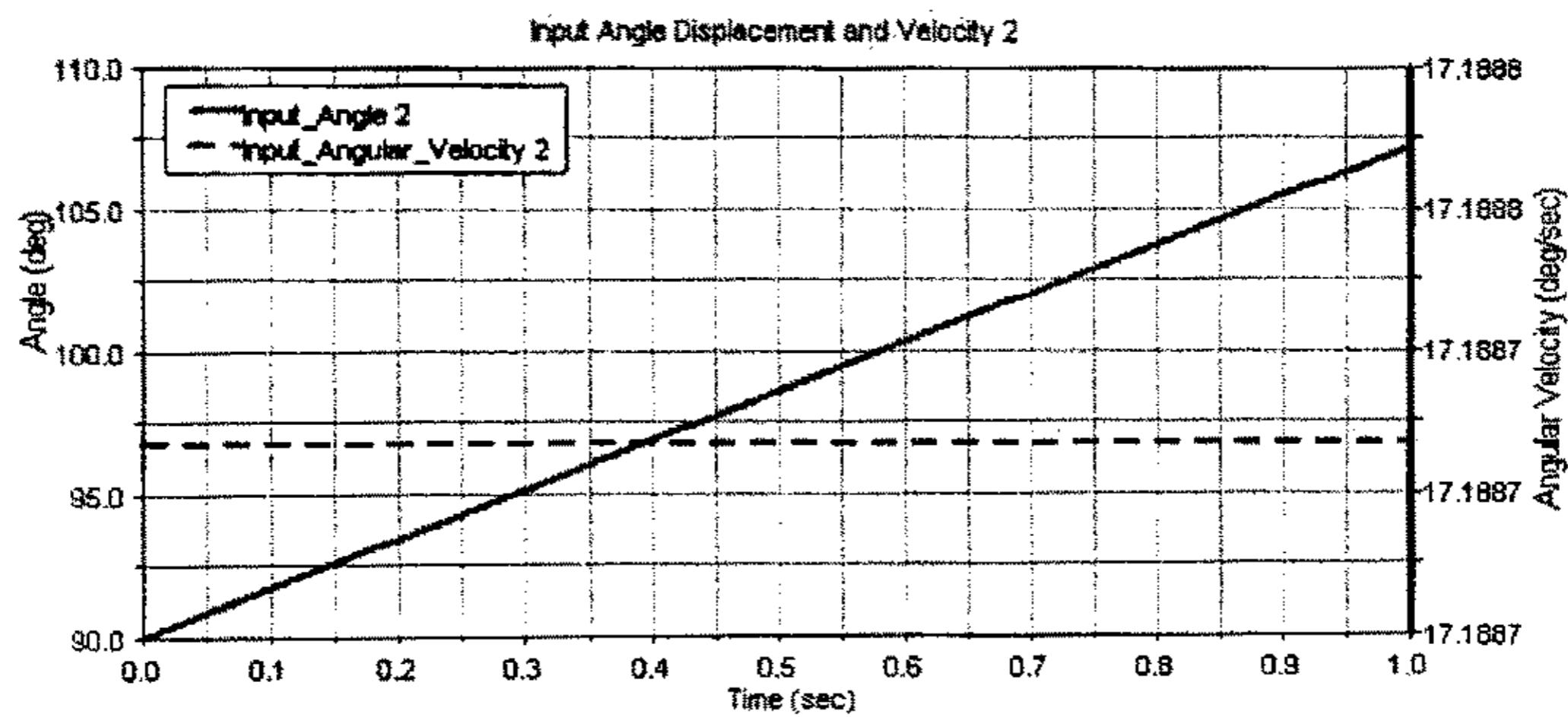


图 6-10 驱动关节 2 的输入角位移和速度变化曲线

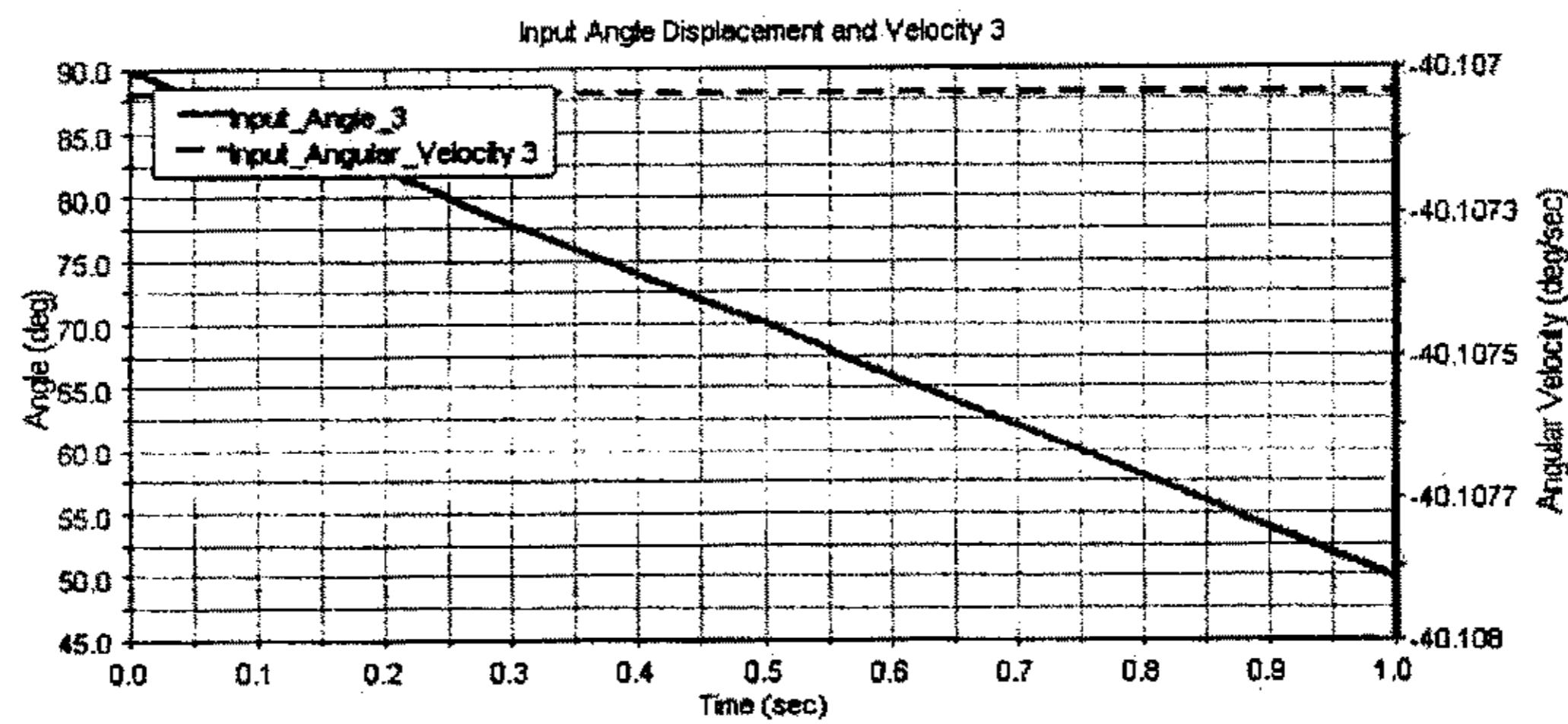


图 6-11 驱动关节 3 的输入角位移和速度变化曲线

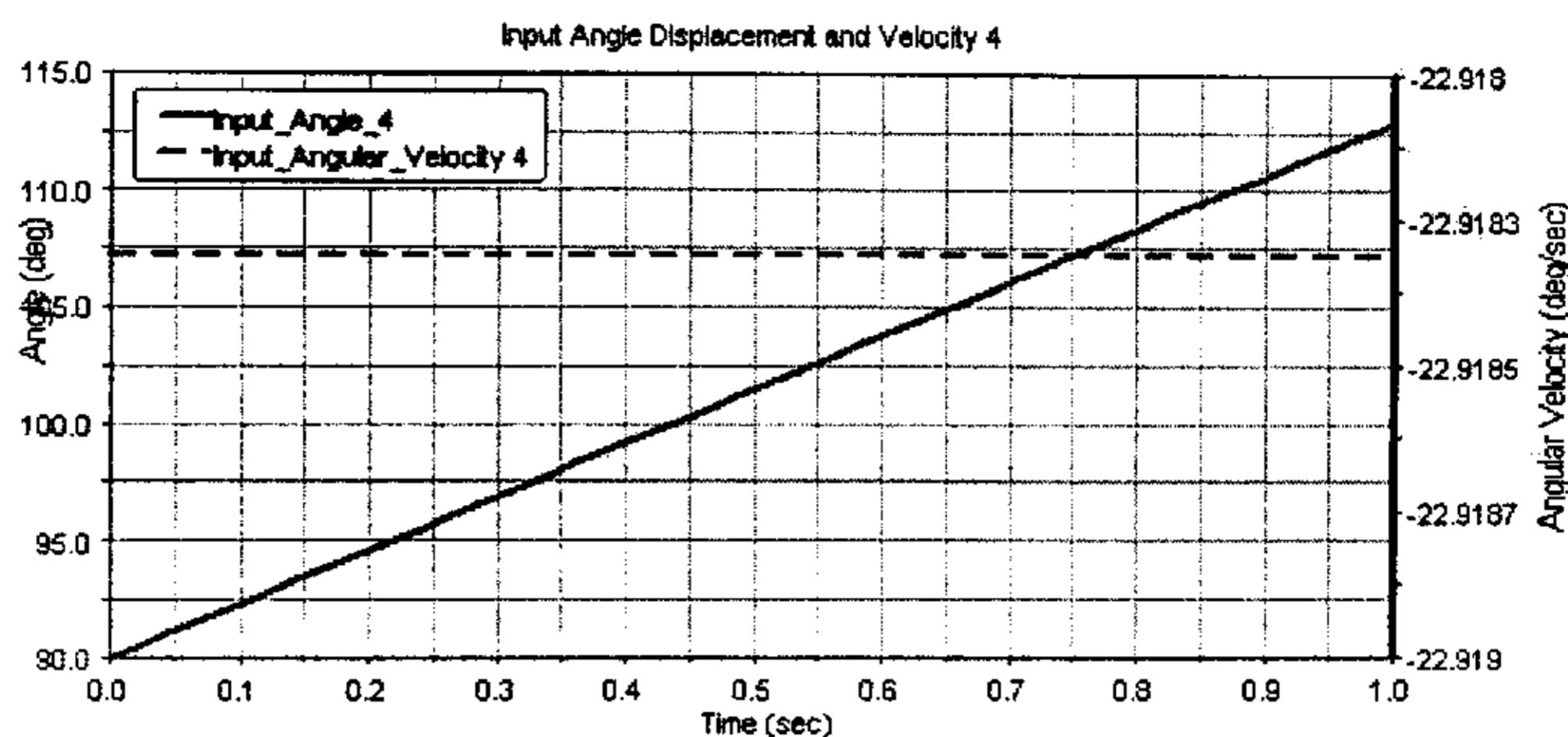


图 6-12 驱动关节 4 的输入角位移和速度变化曲线

图 6-9 到图 6-12 是赋予 4 个支链的驱动关节的角度移及其对应的角度速度随时间的变化曲线。因为角度移曲线都是时间的一次函数，因此其对应的角度速度不随时间发生变化。

6.2.2 动平台的点线位移及对应速度

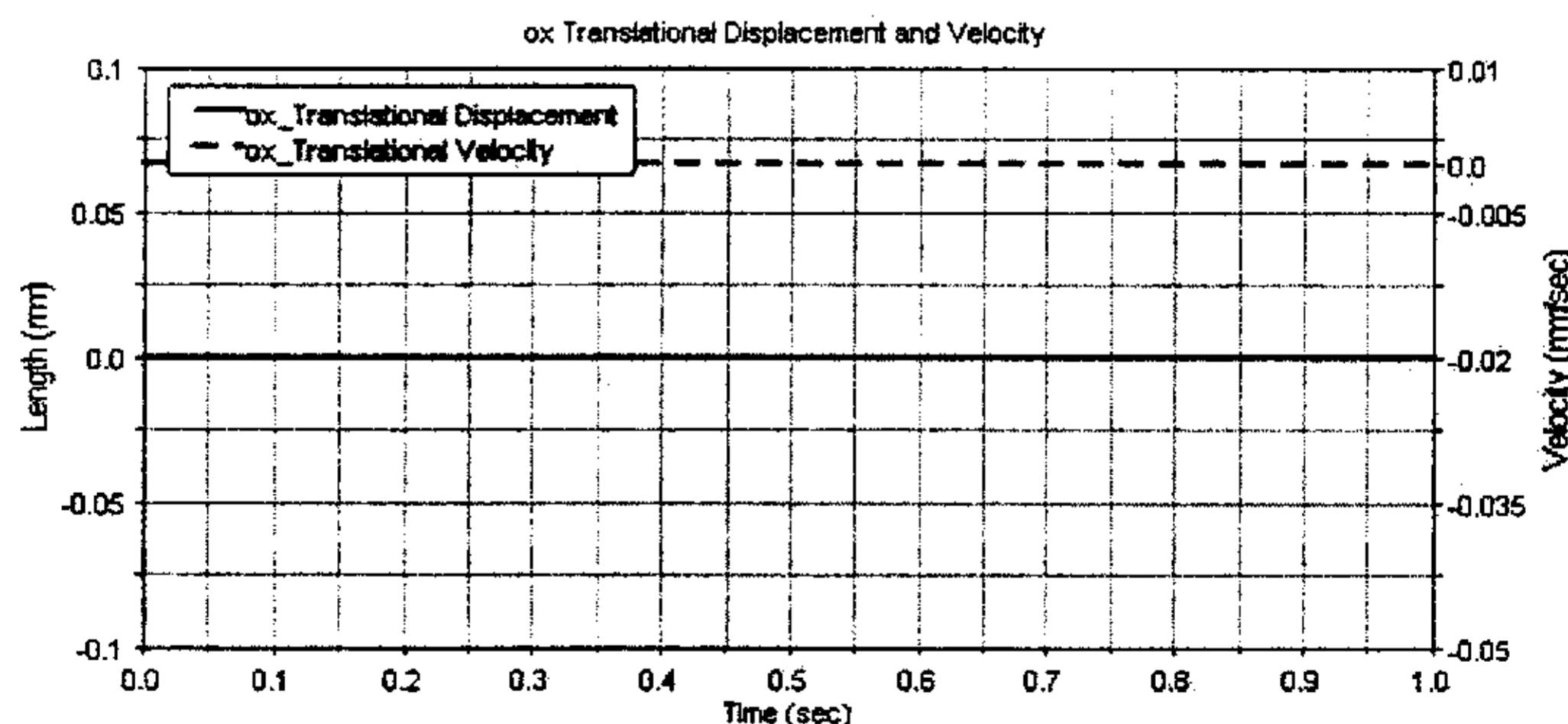


图 6-13 动平台 o 点 x 轴位移及其对应速度的变化曲线

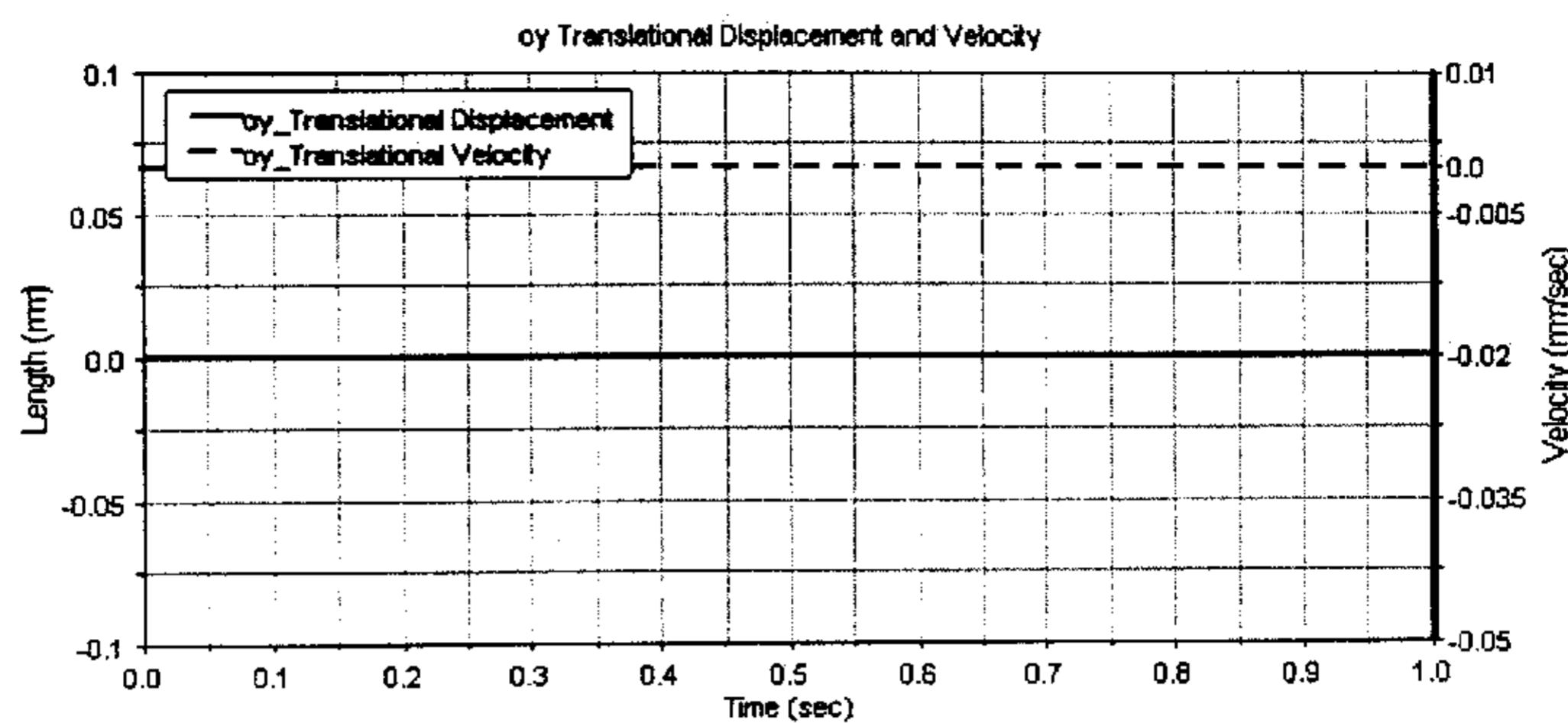


图 6-14 动平台 o 点 y 轴位移及其对应速度的变化曲线

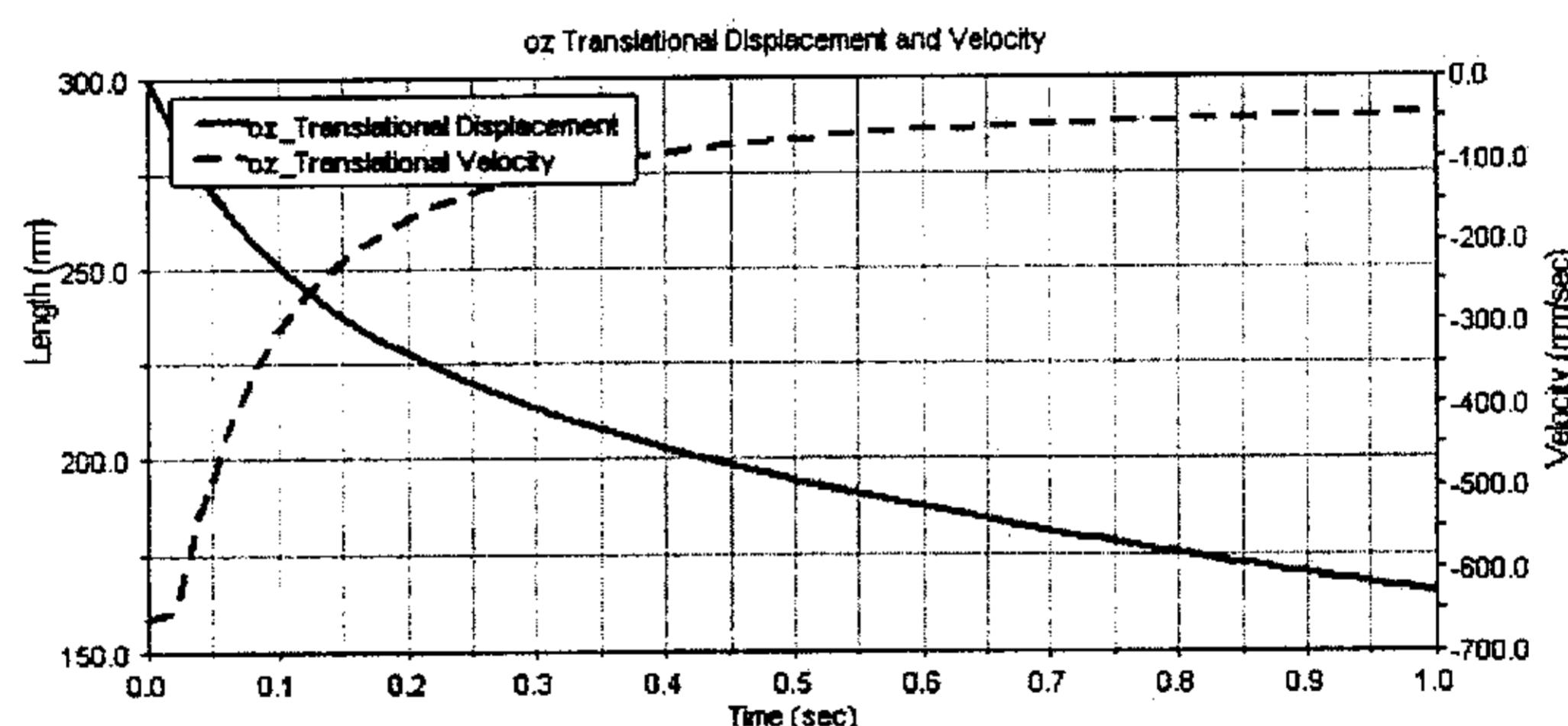


图 6-15 动平台 o 点 z 轴位移及其对应速度的变化曲线

6.2.3 动平台 o 点坐标系的欧拉角位移及其对应角速度

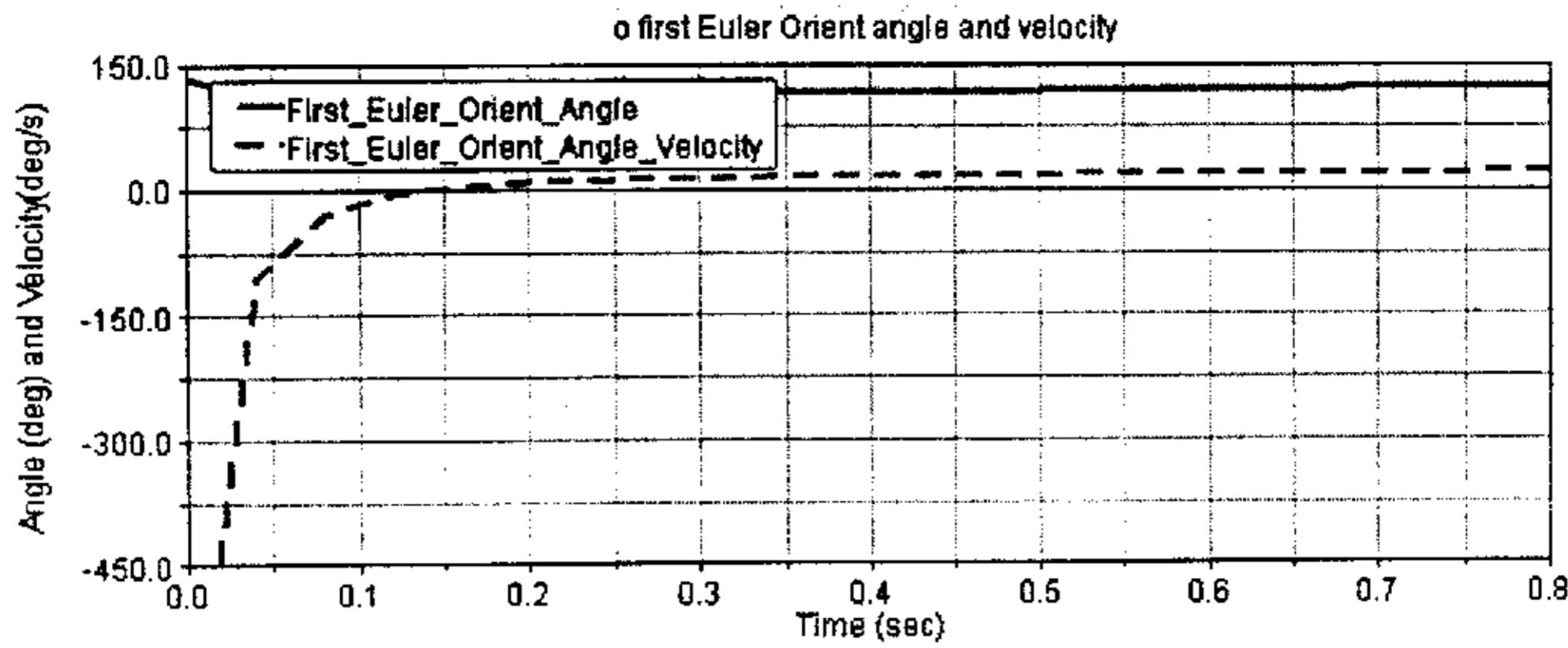


图 6-16 动平台 o 点坐标系第一欧拉角位移及对应角速度变化曲线

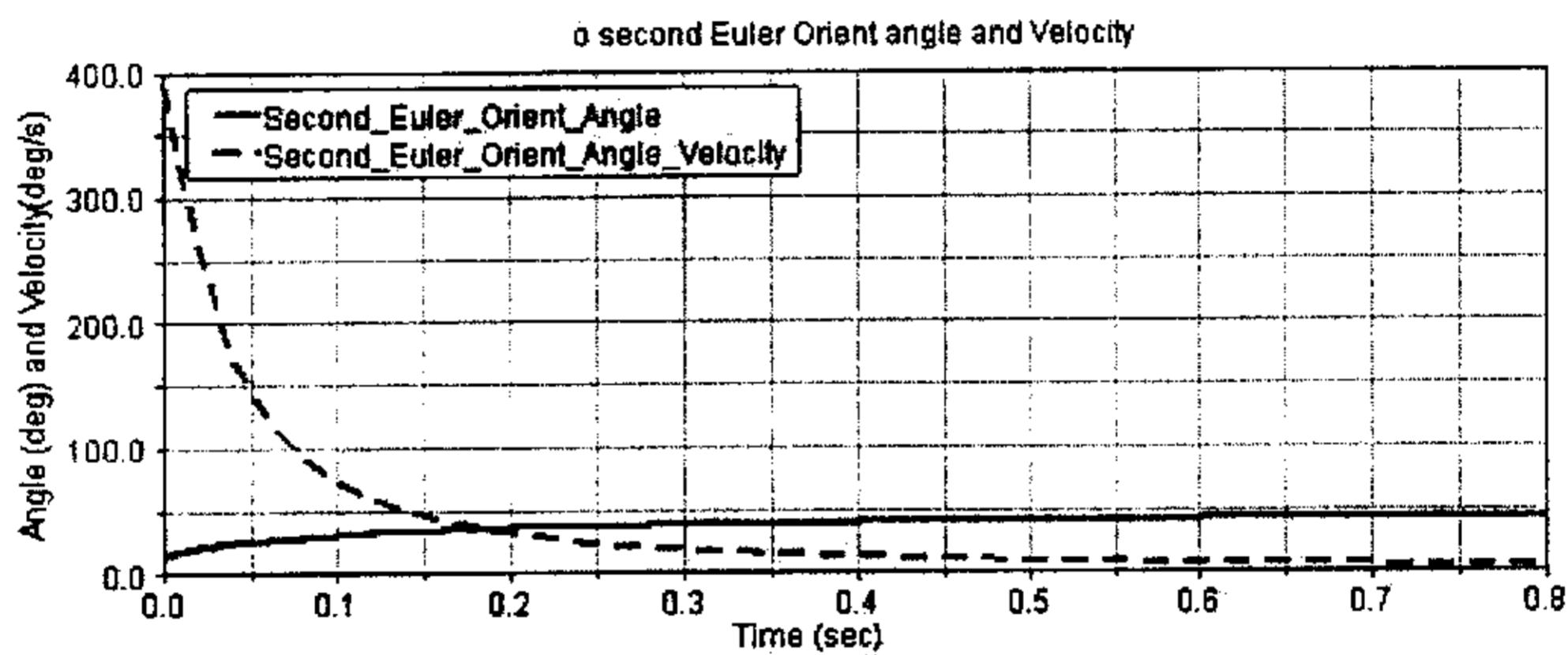


图 6-17 动平台 o 点坐标系第二欧拉角位移及对应角速度变化曲线

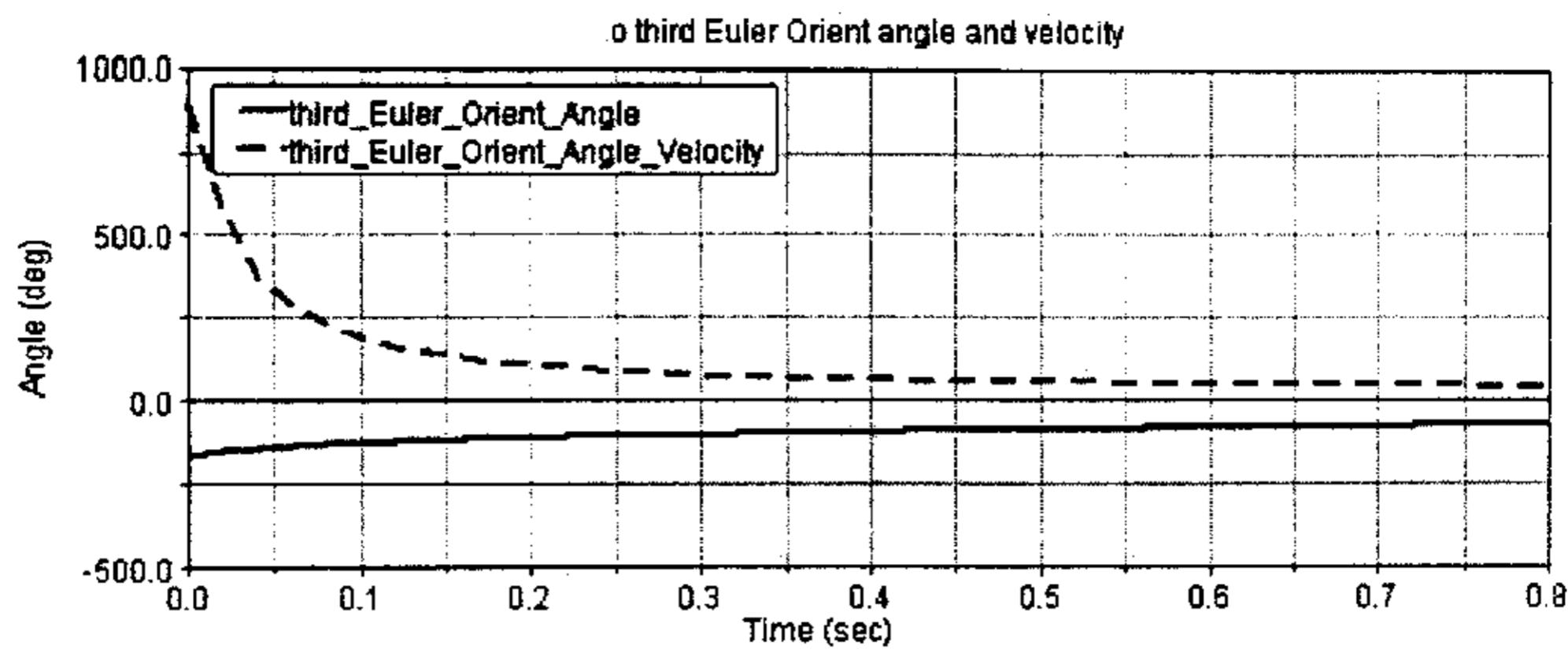


图 6-18 动平台 o 点坐标系第三欧拉角位移及对应角速度变化曲线

6.2.4 动平台 6 个姿态参数随时间的变化曲线

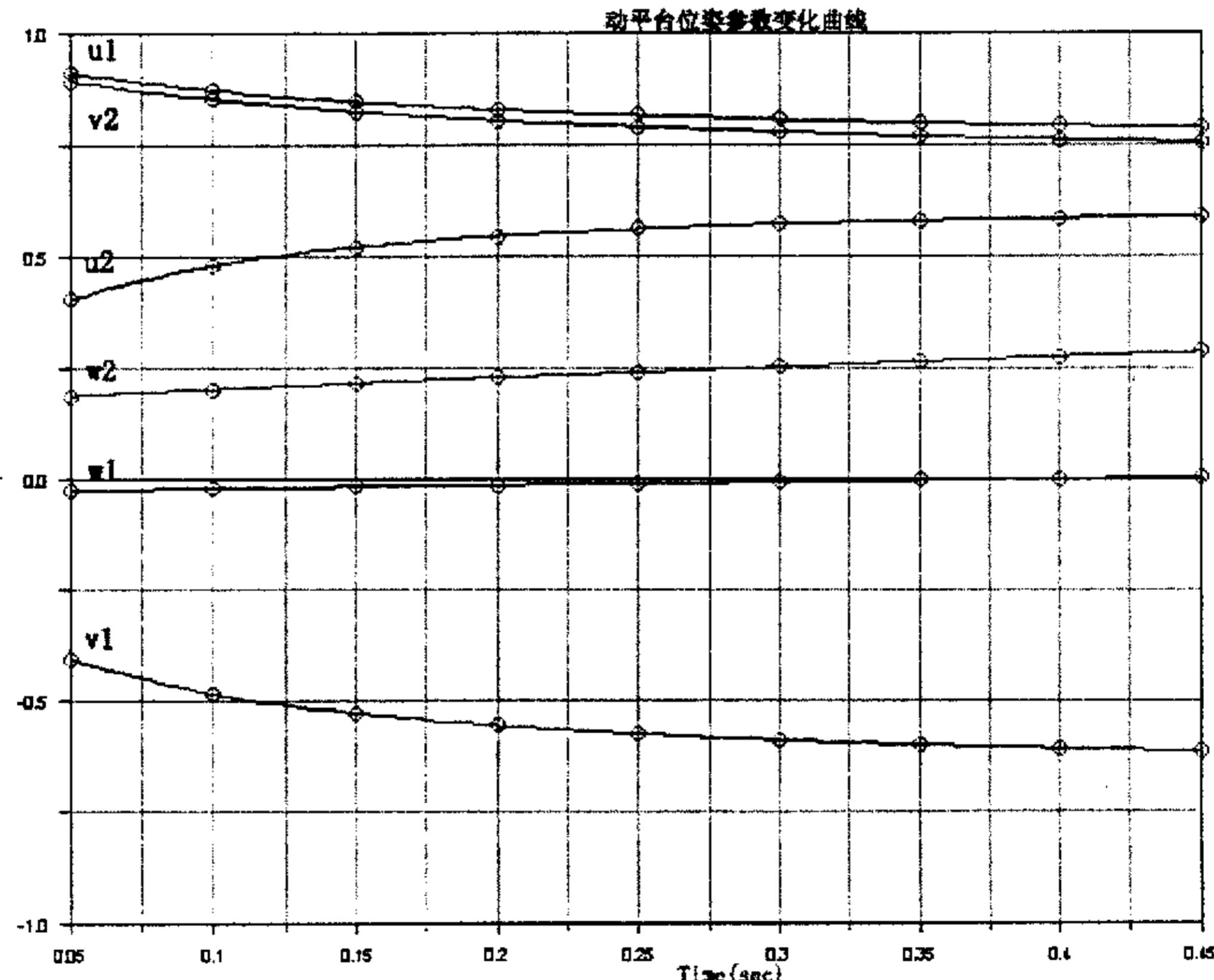


图 6-19 动平台位姿 6 个参数的变化曲线

图 6-13 到 6-19 中列举的参数变化曲线均以地面坐标系为参考坐标系, o 点坐标系相对地面坐标系的方位变换采用欧拉角的 (z-x-z) 变换法则, 即该坐标系按先后顺序绕地面坐标系的 z 轴、x 轴以及 z 轴转动的角度作为测量参数。转动 u 轴和 v 轴的单位矢量在固定坐标系中用矢量 $\{u_1, v_1, w_1\}$ 和 $\{u_2, v_2, w_2\}$ 表示, 它们是通过测量矢量 s_{i5} 上的点 e_i 坐标并把其与 o 点坐标进行运算从而得到的。其中 o 点只有沿着 z 轴方向的平动分量, 其余两个方向的位移均为 0, 这也是第三章机构自由度为绕 o 点的 3 个转动以及沿 z 轴的平动这一推论的有力证明, 并由此验证了运动学正反解方程的正确性。

6.3 机构动力学仿真初步

机构的动力学研究的是对于给定的动平台运动轨迹如何求解出相应应该施加在驱动关节上的驱动力矩。动力学研究的重要意义在于只有详细了解了机构的动力学特性才能够推导出施加在驱动关节上的力矩, 进而决定施加力矩的驱动设备的功率; 而且详细的动力学特性能够产生更好的控制策略, 使其控制设备发挥更好的功能。动力学的研究方法主要是以牛顿-欧拉方程^[53] (New-Euler equations) 和二阶拉格朗日方程^[54] (Lagrange formulations) 为基础。前一种方法为力的动态平衡法, 需要从运动学出发求得加速度, 并消去各种作用力, 此种方法在运用于较复杂的系统时将会变得复杂而且麻烦; 后一种方法又称为拉各朗日功能平衡法, 它只需要速度而不必求内作用力, 是一种比较直截了当和简便的方法。由于时间关系, 本课题将不对机构进行具体的动力学分析和研究, 只描述每个支链的驱动关节所需施加的力以及力矩变化曲线。其中, 驱动关节力图内包含两条变化曲线, 一条对应着此时动平台上施加纯力的情况, 另一条对应着动平台上施加纯力偶的情况。驱动关节力矩图也如此。其中, 动平台施加的扭矩沿 x 轴、y 轴和 z 轴三个方向的分量为常量 500N·M; 施加的纯力沿 x 轴、y 轴和 z 轴三个方向的分量为常量 500N。

6.3.1 驱动关节力变化曲线

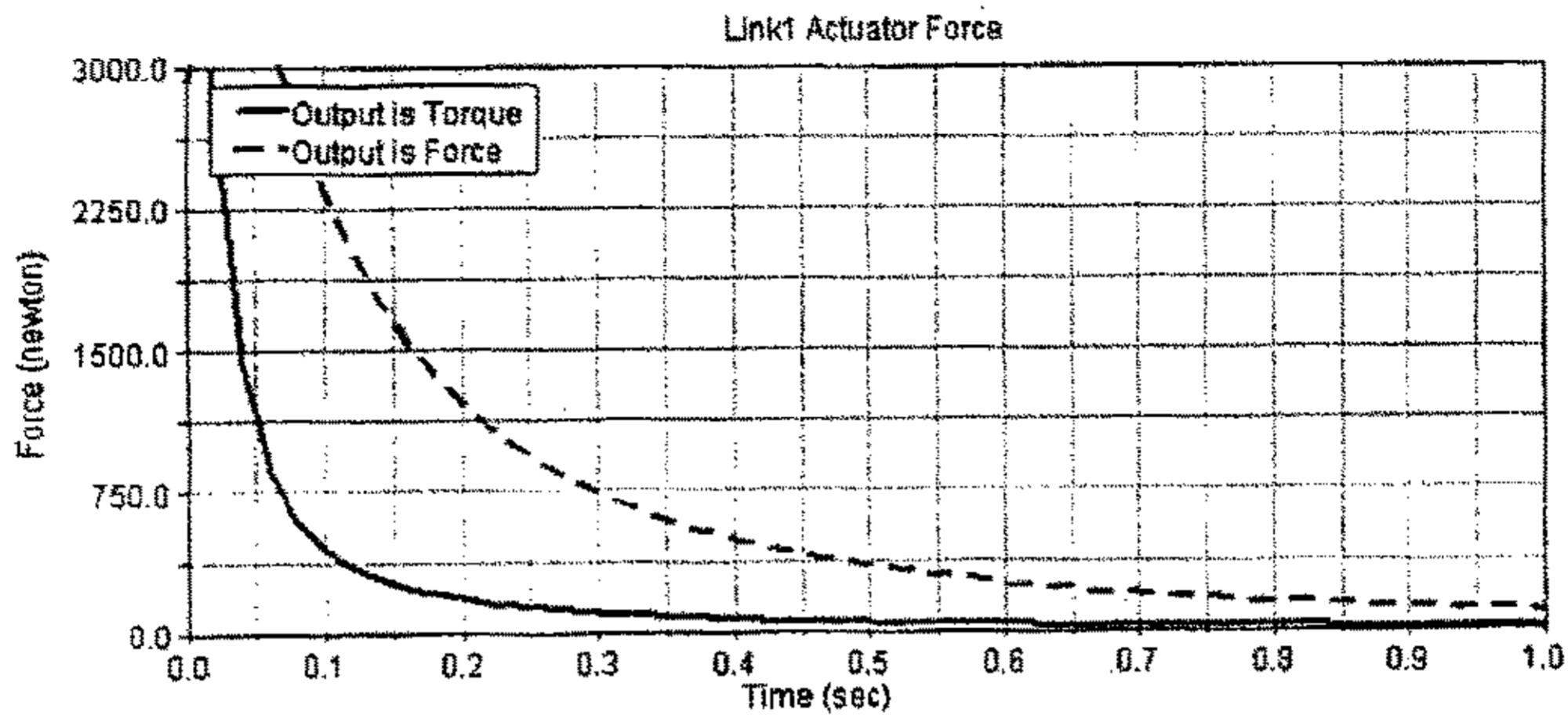


图 6-20 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 1 驱动关节受力曲线

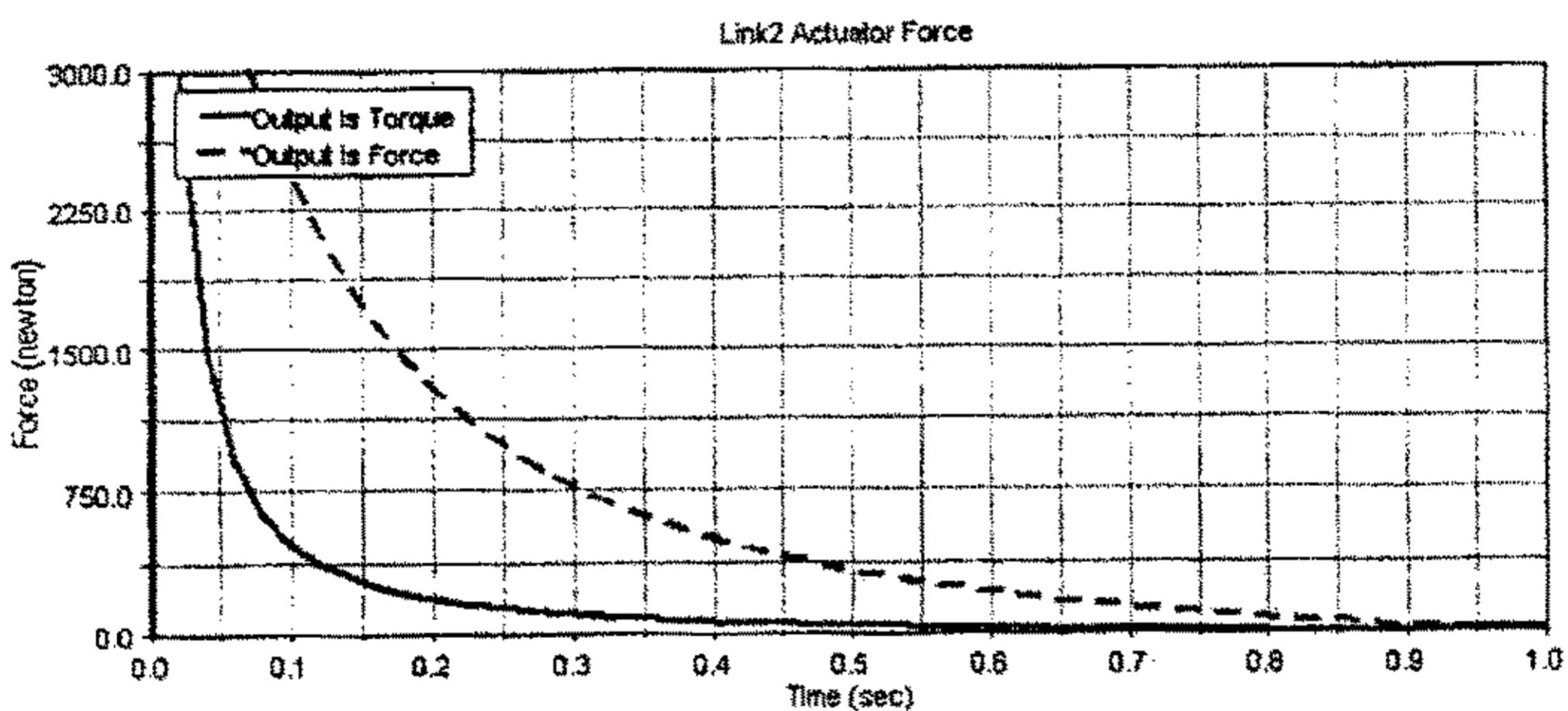


图 6-21 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 2 驱动关节受力曲线

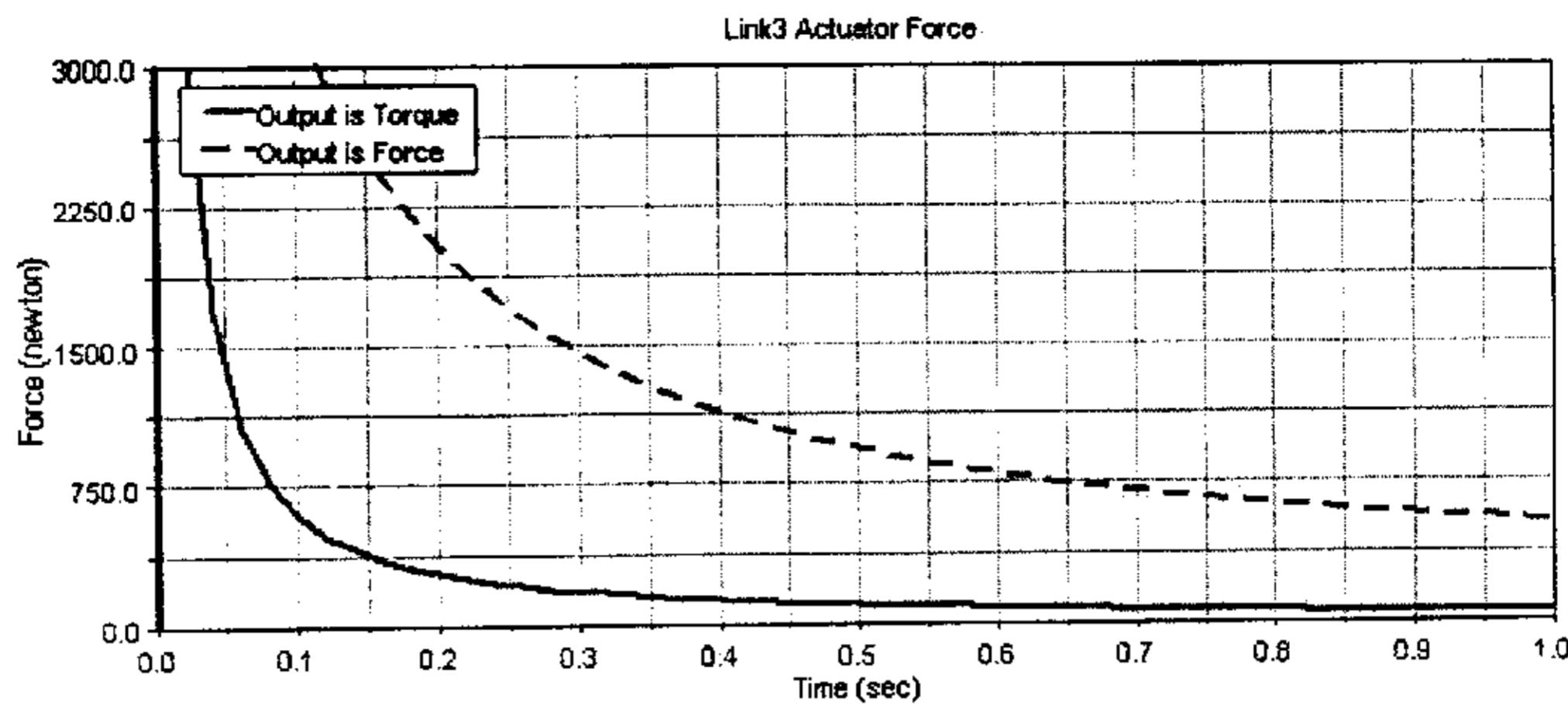


图 6-22 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 3 驱动关节受力曲线

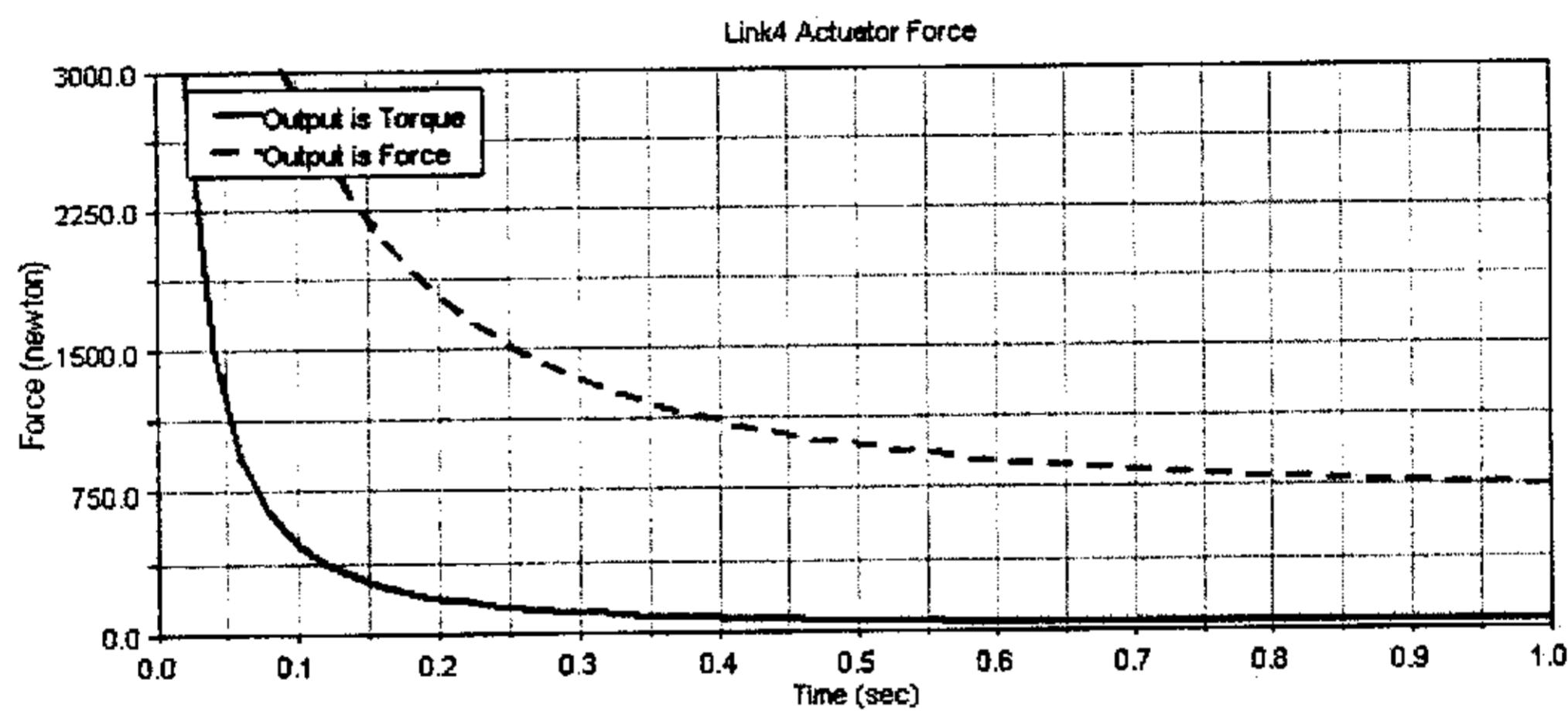


图 6-23 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 4 驱动关节受力曲线

图 6-20 到 6-23 绘制出了驱动关节受到的力随时间的变化曲线, 其中实线对应着动平台施加的为纯扭矩约束, 虚线对应着动平台施加的为纯力约束的情况。从中可见:

- ◆ 各个驱动关节力对应动平台两种情况的变化是不相同的。
- ◆ 各个驱动关节力在运动初期波动较大, 在后期变化比较平稳。这是因为仿真模型在运动初始阶段速度从零变化到一定数值, 受力变化较大, 而

在后期驱动关节所受到的力趋于某个稳定值，这对机构的电机驱动是比较有利的。

- ◆ 由于 4-RRCR 并联机器人采用的是对称的结构，每一条支链结构形式都相同，因此对于动平台的任一种情况 4 个驱动关节力的变化曲线函数都非常相似，只是由于支链物理模型数据不完全一致使得支链之间的曲线数据产生一定的差距。

6.3.2 驱动关节力矩变化曲线

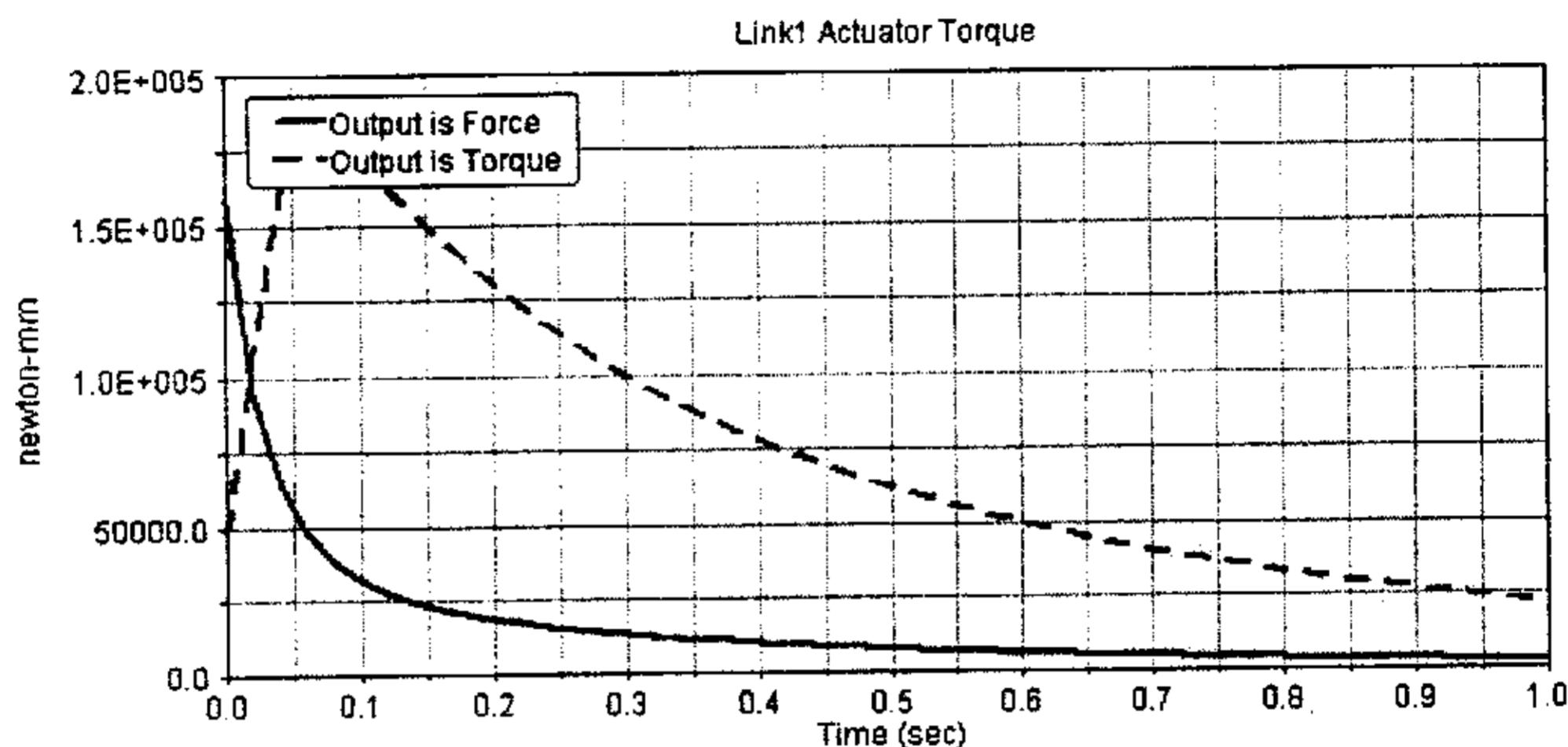


图 6-24 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 1 驱动关节受扭矩曲线

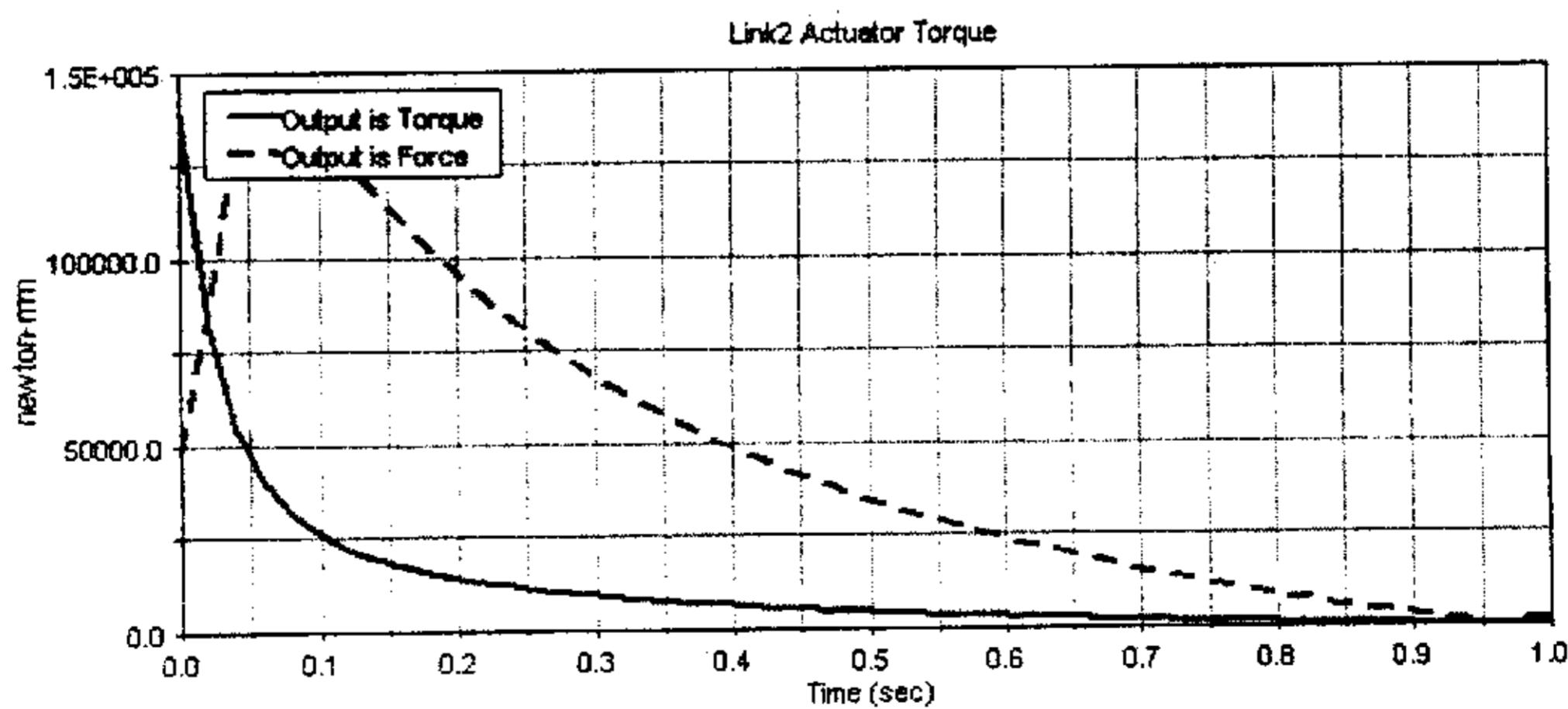


图 6-25 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 2 驱动关节受力矩曲线

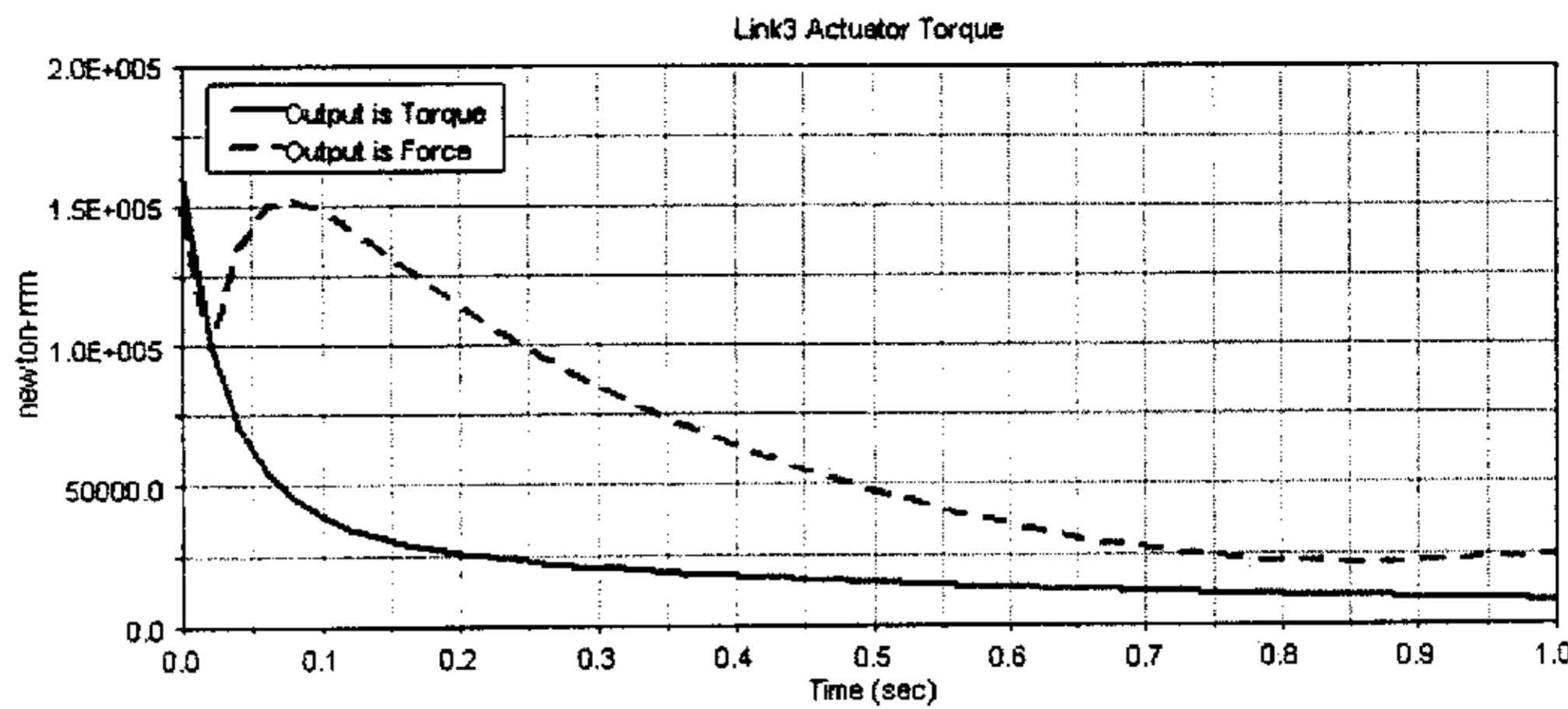


图 6-26 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 3 驱动关节受力矩曲线

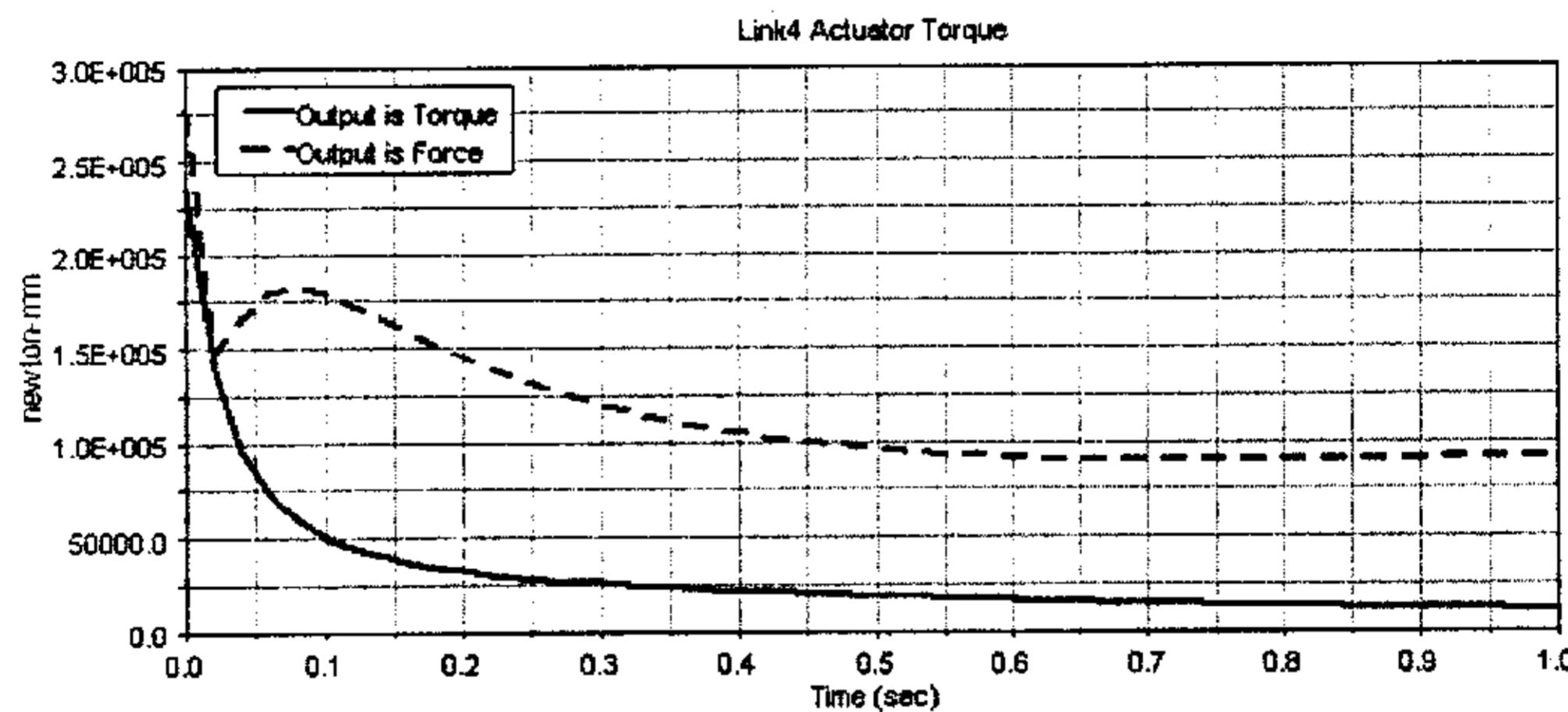


图 6-27 动平台分别施加扭矩和力时对应的支链 4 驱动关节受力矩曲线

图 6-24 到 6-27 绘制出了驱动关节的力矩随时间的变化曲线, 其中实线对应着动平台施加的为纯力矩约束, 虚线对应着动平台施加的为纯力约束的情况。从中可见:

- ◆ 各个驱动关节所受力矩对应动平台两种施加载荷情况的变化曲线在运动开始阶段变化比较明显, 而在曲线测量后期则趋于某一稳定值。这与驱动关节的受力变化情况是类似的。

- ◆ 由于并联机器人采用的对称结构，因此对于动平台的任一种情况 4 个驱动关节受的力矩变化曲线函数都是非常相似的，只是由于支链物理模型数据不完全一致才有曲线数据的差距。

上述驱动关节力和力矩所表现出的动力学特性曲线从另一方面反映了机构的结构特性，对于控制策略以及驱动设备的选取都是比较有利的，并能进一步优化并联机构。

6. 4 本章小结

本章从虚拟样机技术的角度建立了机构模型，在 ADAMS 仿真环境内描绘出了与运动学相关的结构参数曲线、输入输出位姿运动曲线以及与动力学相关的驱动关节力和扭矩的变化曲线。测量的结果表明，模型在运动过程中满足所需的结构条件，并且平台的位姿运动曲线数据也符合理论的推导。动力学曲线则显示了支链驱动关节在不同输出条件下的力或者力矩变化趋势，是进行机构控制规划的依据。

第七章 总结与展望

少自由度并联机器人的研究是目前机器人学里研究的热点和难点,具有一定的挑战性。本课题以 4-RRCR 并联机器人的运动学作为研究对象,力求通过有效的理论和方法描述出机构的各种运动学参数。科学的研究和探索总是向前不断发展的,因此希望通过对自己过去一年多的工作进行总结和回顾,阐明经验教训,并对课题的持续性发展进行展望。

7.1 课题的工作总结

课题的性质是偏重于理论性的研究,注重于各种理论和方法的交叉运用。因此,课题工作的三分之二是用于理论分析与研究,另外三分之一则是模型的实际仿真分析。总之,所完成的工作是理论与实际的一个结合过程,其内容主要包括以下几个方面:

1. 阅读了大量的相关的 6 自由度、3 自由度和 4 自由度并联机器人资料,从中寻求相关的运动学分析方法和理论,确定以螺旋理论为研究的理论基础。
2. 系统地完成了包括自由度、正运动学和逆运动学、雅可比以及奇异位形在内的机构运动学分析,进行了大量的推导和计算。
3. 运用虚拟样机软件建立机构的仿真模型,了解机构在结构上的性能优劣,进一步对机构的数学模型进行验证。

本人在课题的研究过程中,综合应用了各种理论和方法,进行了大量的思考和推算,论文的编写具有如下的创新点:

1. 对过约束并联机构采用非传统的自由度理论进行分析,从力螺旋和运动螺旋的角度论证了机构自由度数目的正确性,并且详细描述了机构的自由度属性。
2. 建立了并联机构运动学的数学模型,把复杂的空间机构转化成数学语言,并以此为基础推导和计算出了机构的运动学正反解方程。
3. 建立机构运动平台的雅可比矩阵,并分三种情况详细讨论了机构可能出现的奇异位形情况。
4. 在 ADAMS 软件环境下建立机构的虚拟模型,对机构进行实时仿真,绘制出相关的运动学曲线,从三维角度完成运动学分析。

7.2 研究展望

本课题是对某一并联机器人的运动学提出研究方法并进行计算,只是机

器人学理论分析的一个组成部分,而如果要让机器人投入到实际应用则还有相当远的距离。针对自己所做的课题工作以及对并联机器人研究现状的了解,在此浅谈几点体会:

1. 课题中采用的分析方法在 4-RRCR 并联机器人的运动学上取得了成功,但在其他并联机器人上是否同样适用,从而扩展机器人的方法论,这一点有待于进一步的应用和归纳。
2. 课题对于 4-RRCR 并联机器人动力学只进行了简单的仿真及分析,这是否与动力学理论推导相符合,并能得出正确的结论,这一点也有待于进一步研究。
3. 课题研究的最终目的是为实际应用服务,因此,制作样机实物模型并开发相关的控制系统,这是对课题研究最重要的延伸。

参考文献

1. Koevermans W.P. et al, "Design and performance of the four DoF motion system of the NLR research flight simulator", AGARD Conf. Proc. No 198, Flight Simulation, La Haye, 20-30 October 1975: 17-1/17-11.
2. Byun Y.K., Cho H.S., "Analysis of a novel 6-DOC 3-PPSP Parallel Manipulator", The Int J of Robotics research, 1997, Vol 16(6): 859~872.
3. Wang J. and Gosselin C.M., "Kinematic Analysis and Singularity Loci of Spatial Four-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators Using a Vector Formulation", ASME Transactions Journal of Mechanical Design, 1988, Vol 120(4): 555~558.
4. Hesselbach J., Plitea N., Frindt M., and Kusiek A., "A New Parallel Mechanism to Use for Cutting Convex Glass Panels", In Advances in Robot Kinematics, Lenarcic J. and Husty M.L., Kluwer Academic, London, 1998: 165~174.
5. Rolland L.H., "The Manta and the Kanuk Novel 4-DoF Parallel Mechanisms for Industrial Handling", In Proc ASME Int Conf on Mechanical Engineering, Nashville, TN, November 1999.
6. Lenarcic J., Stanisic M.M., and Parenti-Castelli V., "A 4-DoF Parallel Mechanism Simulating the Movement of the Human Sternum-Clavicle-Scapula Complex", In Advances in Robot Kinematics, Lenarcic J. and Stanisic M.M., Kluwer Academic, London: 325~332.
7. 董孔如, 张祥德, 赵明扬, "一种 4 自由度并联机构位置正解的快速算法", 机器人, 1999, 21(7): 620~624.
8. 赵明扬, 余晓流, 王启义, 房立金, "一种并联机床运动平台位姿测量方法", 中国机械工程, 1999, Vol 10(10): 1112~1113.
9. Chen W.J., Zhao M.Y., Zhou J.P. and Qin Y. F., "A 2T-2R 4-DoF Parallel Manipulator", In CD-ROM Proceedings, 2002 ASME DETC/CIE, Montreal, Canada, DETC2002/MECH-34303.
10. 范守文, 徐礼矩, 甘泉, "新型混联虚拟轴机床加工仿真系统的设计与实现", 机械科学与技术, 2002, 21(5): 796~798.
11. Company O. and Pierrot F., "A New 3T-1R Parallel Robot. In Proc", Int Conf. on Robotics and Automation, Tokyo, Japan, 25-27 October 1999: 557~562.
12. Zlatanov D. and Gosselin C.M., "A Family of New Parallel Architectures

- with Four Degrees of Freedom", Journal of Computational Kinematics, F. C. Park and C.C. Iurascu, eds, 2001: 57-66.
13. Yuefa Fang and Lung-Wen Tsai., "Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DoF Parallel Manipulators with Identical Limb Structure", The International Journal of Robotics Research, 2002 , 21(9): 799-810.
14. 黄真, 孔令富, 方跃法, 并联机器人机构学理论及控制[M], 北京, 机械工业出版社, 1997: 228-245.
15. 黄真, 空间机构学[M], 北京, 机械工业出版社, 1991: 127-143.
16. 方跃法, 少自由度机器人运动学特性研究, 燕山大学博士后研究报告, 1996.
17. Kenneth J. and Waldron Gary L., "Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery", Hamilton Printing, John Wiley & Sons, New York, (1999): 1-42.
18. Dan B.Marghitu and Malcolm J. Crocker, "Analytical Elements of Mechanism", Cambridge University Press, Cambridge, 2001, 12.
19. Stamper R.E., "A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom", Ph.D Thesis, University of Maryland, 1997: 14.
20. Chase M.A., "Vector Analysis of linkages", ASME J. Eng. Ind., 1963, Vol 85: 289-297.
21. Lee H.Y. and Liang C.G, "A New Vector Theory for the Analysis of Spatial Mechanisms", Mech Mach Theory, 1998, Vol 23 (3): 209-217.
22. Duffy J. and Rooney J., "A Foundation for a Unified Theory of Analysis of Spatial Mechanisms", ASME J. Eng. Ind., 1975, Vol.97(4): 1159-1164.
23. Yuan M.S.C. and Freudenstein F., "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates", ASME J. Eng. Ind., 1971, Vol 93 (1): 61-73.
24. Zhang C. and Song S., "Forward Position Analysis of Nearly General Stewart Platforms", ASME Journal of Mechanical Design, 1994, Vol 114: 444-450.
25. 胡明, 郭成, 蔡光起, 戴炬, "一种三自由度并联机器人机构运动学计算", 东北大学学报(自然科学版), 1998, Vol 19 (4): 411-414.
26. 赵铁石, 黄真, "一种新型四自由度并联平台机构及其位置分析", 机械科学与技术, 2000, Vol 19 (6): 927-929.
27. 陈文家, 张剑锋, 杨玲, 赵明扬, "一种新型四自由度并联机器人", 扬

- 州大学学报（自然科学版），2002，Vol 5 (2): 41-45.
28. 金琼, 杨廷力, “一类新型三平移并联机器人机构的位置分析”, 东南大学学报（自然科学版）, 2001, Vol 31 (5): 33-38.
29. 孔宪文, 黄真, “3-RPS 控制位置用并联机器人机构的位置反解”, 机械科学与技术, 1999, Vol 18 (3): 424-426.
30. 邹豪, 王启义, 赵明扬, 李群有, 张波, “基于运动耦合结构的并联机器人运动学正逆解”, 中国机械工程, 1997, Vol 8 (6): 30-32.
31. Bing Zhou, Hao Fang, Lu Ren and Zuren Feng, “Closed-Form Direct Position Kinematics Solution For a 3-RSR Platform Manipulator”, Proceeding of the 3th World Congress on Intelligent Control and Automation, Hefei, P.R.China, 2000.
32. Der-Ming Ku, “Direct displacement analysis of a Stewart platform mechanism”, Mechanism and Machine Theory, 1997, Vol 34(1999): 453-465.
33. J.-P. Merlet, “Direct Kinematics of Parallel Manipulators”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993, Vol 9(6): 842-846.
34. Ragahavan M. and Roth B., “Solving Polynomial Systems for the Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms and Robot Manipulators”, Transactions of the ASME Special 50th Anniversary Design Issue, 1995, Vol 117: 71-79.
35. Waldrom K.J, “The Constraint Analysis of Mechanisms”, J.Mech., 1966, Vol 2: 101-114.
36. Davies T.H. and Primrose E.J.F., “An Algebra for the Screw Systems of a Pair of Bodies in a Kinematic Chain”, Proc.3rd World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, 1971, Paper D-14: 199-212.
37. Baker J.E., “On Relative Freedom Between Links in Kinematic Chains with Cross-Jointing”, Mech.Mach. Theory, 1980, Vol 15: 397-413.
38. Mohamed M.G., Sanger J. and Duffy J., “Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Devices”, Proc 6th IFToMM Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1983, New Delhi, India.
39. Mohamed M.G. and Duffy J., “A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators”, ASME.J.Mech.Transm.Autom.Des., 1985, Vol 107 (2): 226-229.
40. Sugimoto K., “Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra”, ASME.J. Mech.Transm. Autom. Des., 1987,

- Vol 109 (1): 3-7.
- 41. Oblak D. and Kohli D., "Boundary Surfaces, Limit Surfaces, Crossable and Noncrossable Surfaces in Workspace of Mechanical Manipulators", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1988, Vol 110: 389-396.
 - 42. Gosselin C. and Angeles J., "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, Vol 6: 281-290.
 - 43. Tahmasebi F. and Tsai L.W., "On the Stiffness of a Novel Six-DOF Parallel Minimanipulator", *Journal of Robotic Systems*, 1995, Vol 12(12): 845-856.
 - 44. Gosselin C. and Angeles J., "A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators", *Journal of Mechanical Design*, 1991, Vol 113: 220-226.
 - 45. Ma O. and Angeles J., "Architecture Singularities of Platform Manipulators", *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1991: 1542-1547.
 - 46. Shi X. and Fenton R., "Structural Instabilities in Platform-Type Parallel Manipulators Due to Singular Configurations", *ASME Proceeding of the 1992 ASME Design Engineering Technical Conference*, 1992, DE-Vol 45: 347-352.
 - 47. Wang J. and Gosselin C., "Kinematic Analysis and Singularity Loci of Spatial Four-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators", *Proceedings of The 1996 ASME Design Engineering Technical Conference*, MECH: 1106.
 - 48. Gosselin C. and Angeles J., "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, Vol 6: 281-290.
 - 49. Zlatanov D., Fenton R. and Benhabib B., "A Unifying Framework for Classification and Interpretation of Mechanism Singularities", *ASME Journal of Mechanical Design*, 1995, Vol 117: 566-572.
 - 50. Merlet J-P., "Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry", *International Journal of Robotics Research*, 1989, Vol 8: 45-56.
 - 51. Joshi S.A. and Tsai L.W., "Jacobian Analysis of Limited-DoF Parallel Manipulators", *ASME Transactions Journal of Mechanical Design*, 2002, 124(2): 254-258.

52. 郑建荣, ADAMS—虚拟样机技术入门与提高[M], 北京: 机械工业出版社, 2002: 1-3.
53. Guglielmetti P. and Longchamp R., “A closed Form Inverse Dynamics Model of the Delta Parallel Robot”, Proceedings from the International Federation of Automatic Control Conference on Robot Control, 1994: 39-44.
54. Miller K. and Clavel R., “The Lagrange-based Model of Delta-4 Robot Dynamics”, Robotersysteme 8, 1992: 49-54.

附录

1: $(h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}, h_{i4})$ 的表达式

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3 & \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_{i2} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i2} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i2} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_3 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i2} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_{i4} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i4} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i4} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_3 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i4} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_{i5} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i5} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i5} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_3 & \boldsymbol{\varepsilon}'_{i5} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \end{vmatrix} = (0, 0, h_{i1}; h_{i2}, h_{i3}, h_{i4})$$

$$h_{i1} = v_2 \cos \varphi_1 + w_2 \sin \varphi_1$$

$$\begin{aligned} h_{i2} = & l_{10} v_2 \cos \varphi_1 + d w_2 \cos \varphi_1 - l_{11} v_2 \cos \theta_{11} \cos \varphi_1 + d v_2 \cos \varphi_1 \cot \varphi_1 - l_{11} w_2 \cos \varphi_1 \sin \theta_{11} \\ & - l_{11} v_2 \cos \varphi_1 \cot \varphi_1 \sin \theta_{11} + l_{10} w_2 \sin \varphi_1 - l_{11} w_2 \cos \theta_{11} \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

$$h_{i3} = -l_{10} u_2 \cos \varphi_1 + l_{11} u_2 \cos \theta_{11} \cos \varphi_1 - d u_2 \cos \varphi_1 \cot \varphi_1 + l_{11} u_2 \cos \varphi_1 \cot \varphi_1 \sin \theta_{11}$$

$$h_{i4} = -d u_2 \cos \varphi_1 + l_{11} u_2 \sin \theta_{11} \cos \varphi_1 - l_{10} u_2 \sin \varphi_1 + l_{11} u_2 \cos \theta_{11} \sin \varphi_1$$

$$h_{21} = -u_1 \cos \varphi_2 - w_1 \sin \varphi_2$$

$$h_{22} = -l_{20} v_1 \cos \varphi_2 + l_{21} v_1 \cos \theta_{21} \cos \varphi_2 - d v_1 \cos \varphi_2 \cot \varphi_2 + l_{21} v_1 \cos \varphi_2 \cot \varphi_2 \sin \theta_{21}$$

$$\begin{aligned} h_{23} = & l_{20} u_1 \cos \varphi_2 + d w_1 \cos \varphi_2 - l_{21} u_1 \cos \theta_{21} \cos \varphi_2 + d u_1 \cos \varphi_2 \cot \varphi_2 - l_{21} w_1 \cos \varphi_2 \sin \theta_{21} \\ & - l_{21} u_1 \cos \varphi_2 \cot \varphi_2 \sin \theta_{21} + l_{20} w_1 \sin \varphi_2 - l_{21} w_1 \cos \theta_{21} \sin \varphi_2 \end{aligned}$$

$$h_{24} = -d v_1 \cos \varphi_2 + l_{21} v_1 \sin \theta_{21} \cos \varphi_2 - l_{20} v_1 \sin \varphi_2 + l_{21} v_1 \cos \theta_{21} \sin \varphi_2$$

$$h_{31} = -v_2 \cos \varphi_3 + w_2 \sin \varphi_3$$

$$\begin{aligned} h_{32} = & l_{30} v_2 \cos \varphi_3 - d w_2 \cos \varphi_3 - l_{31} v_2 \cos \theta_{31} \cos \varphi_3 + d v_2 \cos \varphi_3 \cot \varphi_3 + l_{31} w_2 \cos \varphi_3 \sin \theta_{31} \\ & - l_{31} v_2 \cos \varphi_3 \cot \varphi_3 \sin \theta_{31} - l_{30} w_2 \sin \varphi_3 + l_{31} w_2 \cos \theta_{31} \sin \varphi_3 \end{aligned}$$

$$h_{33} = -l_{30} u_2 \cos \varphi_3 + l_{31} u_2 \cos \theta_{31} \cos \varphi_3 - d u_2 \cos \varphi_3 \cot \varphi_3 + l_{31} u_2 \cos \varphi_3 \cot \varphi_3 \sin \theta_{31}$$

$$h_{34} = d u_2 \cos \varphi_3 - l_{31} u_2 \sin \theta_{31} \cos \varphi_3 + l_{30} u_2 \sin \varphi_3 - l_{31} u_2 \cos \theta_{31} \sin \varphi_3$$

$$h_{41} = u_1 \cos \varphi_4 - w_1 \sin \varphi_4$$

$$h_{42} = -l_{40}v_1\cos\varphi_4 + l_{41}v_1\cos\theta_{41}\cos\varphi_4 - dv_1\cos\varphi_4\cot\varphi_4 + l_{41}v_1\cos\varphi_4\cot\varphi_4\sin\theta_{41}$$

$$h_{43} = l_{40}u_1\cos\varphi_4 - dw_1\cos\varphi_4 - l_{41}u_1\cos\theta_{41}\cos\varphi_4 + du_1\cos\varphi_4\cot\varphi_4 + l_{41}w_1\cos\varphi_4\sin\theta_{41} \\ - l_{41}u_1\cos\varphi_4\cot\varphi_4\sin\theta_{41} - l_{40}w_1\sin\varphi_4 + l_{41}w_1\cos\theta_{41}\sin\varphi_4$$

$$h_{24} = dv_1\cos\varphi_4 - l_{41}v_1\sin\theta_{41}\cos\varphi_4 + l_{40}v_1\sin\varphi_4 - l_{41}v_1\cos\theta_{41}\sin\varphi_4$$

2: $\varepsilon_i^0 \circ \varepsilon'_{i1}$ 的表达式

$$\varepsilon_1^0 \circ \varepsilon'_{11} = h_{12} - l_{10}h_{11} - \frac{dh_{11}\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}$$

$$\varepsilon_2^0 \circ \varepsilon'_{21} = h_{23} + l_{20}h_{21} - \frac{-dh_{21}\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}$$

$$\varepsilon_3^0 \circ \varepsilon'_{31} = h_{32} + l_{30}h_{31} - \frac{-dh_{31}\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3}$$

$$\varepsilon_4^0 \circ \varepsilon'_{41} = h_{43} - l_{40}h_{41} - \frac{dh_{41}\cos\varphi_4}{\sin\varphi_4}$$

作者在攻读硕士学位期间发表的论文

“一种新型 4 自由度并联机器人自由度分析”. 北方交通大学学报（自然科学版）， 2003 年第 4 期。

致 谢

本论文是在导师方跃法教授的悉心指导下完成的。两年来，导师不遗余力的谆谆教诲，不仅保证了课题的顺利完成，而且使本人的专业理论水平和科研能力得到进一步的巩固和提高，这些必将为我今后的工作和学习奠定良好的基础。从导师这里，我不仅学到了丰富的知识，更为重要的是我学到了严谨的治学态度和高屋建瓴的工作方法，这将使我终身受益。在此论文完成之际，作者特向敬爱的导师致以最诚挚和崇高的谢意。

在日常科研及论文完成工作中，感谢李建勇教授、鄂明成副教授、赵勇副教授、姚燕安副教授、房海容老师对我的关心和帮助。平常与这些老师的交流使我懂得了很多作学问的方法和做人的道理。

感谢实验室郭盛博士、胡淮庆博士、陈辉硕士、吉鸿涛硕士、杨延昭硕士、靳大为硕士、胡明硕士和刘伟硕士等同学对我工作的大力支持和无私帮助，感谢他们给我提供了一个和谐友好的工作环境；尤其感谢郭盛博士对我的课题研究提出了许多行之有效的想法和建议。

借此机会，特别感谢家乡的父母、亲人，是他们给了我认真努力从事科研工作的精神和力量。

再次向所有关心、支持和帮助过作者的人们表示衷心的感谢，并致以深深的敬意。

作者：温庆荣

二零零四年三月 于北京交通大学