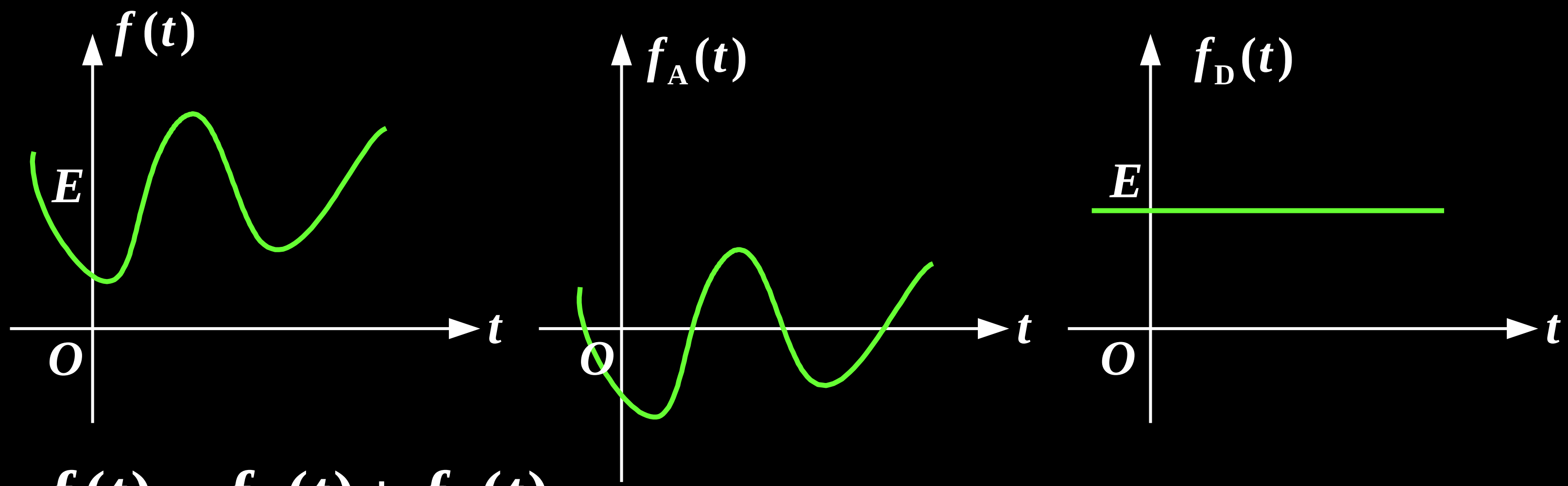
§1.5 信号的分解

为了便于研究信号的传输和处理问题，往往将信号分解为一些简单(基本)的信号之和，分解角度不同，可以分解为不同的分量

- 直流分量与交流分量
- 偶分量与奇分量
- 脉冲分量
- 实部分量与虚部分量
- 正交函数分量
- 利用分形理论描述信号

一．直流分量与交流分量



$$f(t)=f_{\mathrm{A}}(t)+f_{\mathrm{D}}(t)$$

$f_{\mathrm{D}}(t)$：信号的直流分量，即平均值。

$$f_{\mathrm{D}}(t)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[f_{\mathrm{D}}(t)+f_{\mathrm{A}}(t)\right]^2\mathrm{d}t=f_{\mathrm{D}}^2(t)+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f_{\mathrm{A}}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

信号的平均功率 = 信号的直流功率 + 交流功率

二．偶分量与奇分量

对任何实信号而言：

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)\begin{cases} f_e(t):\text{偶分量} \\ f_o(t):\text{奇分量} \end{cases}$$

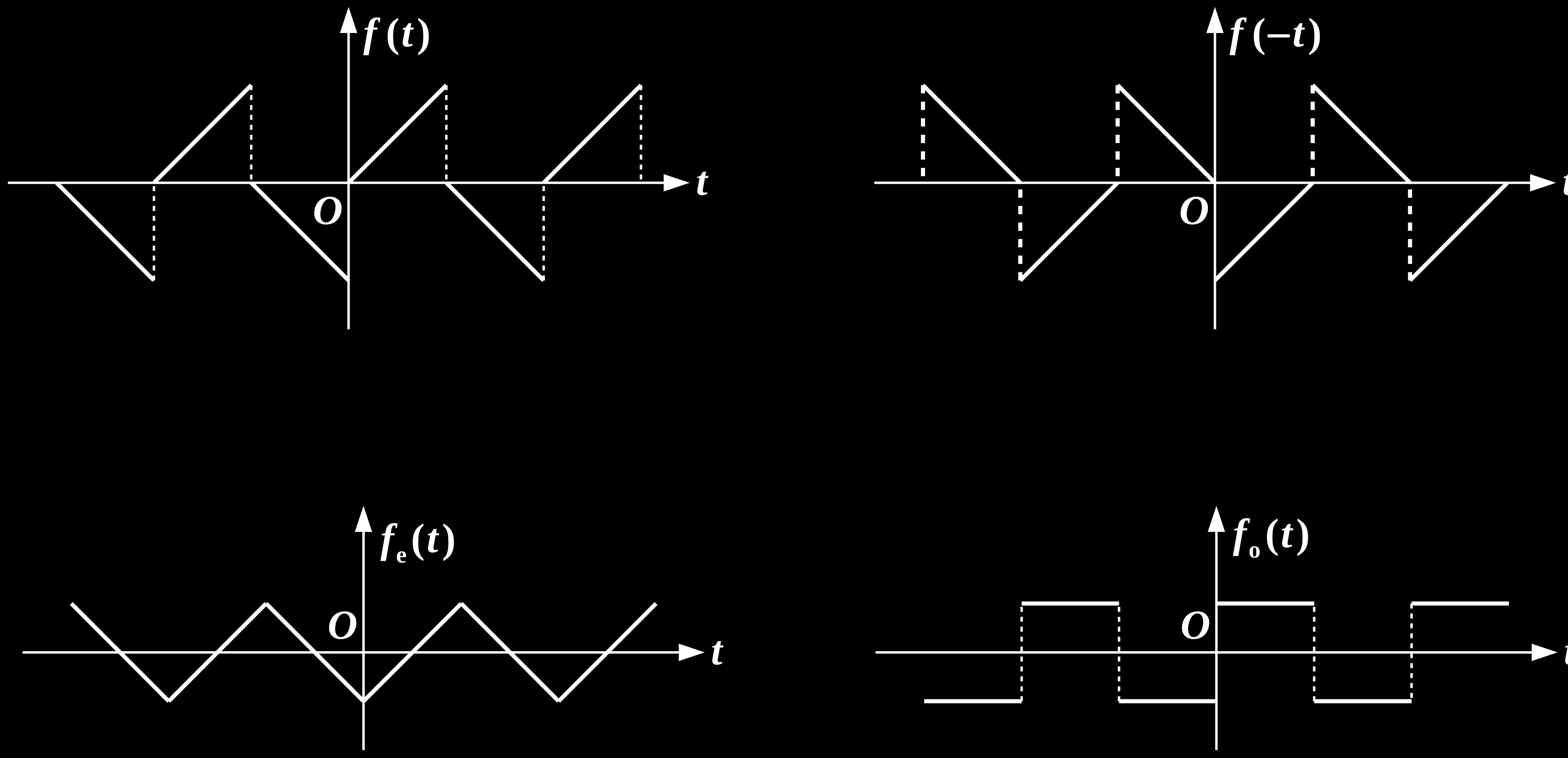
$f_e(t) = f_e(-t)$　　e : even　　$f_o(t) = -f_o(-t)$　　o : odd

$$f_e(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f(-t)\right]$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f(-t)\right]$$

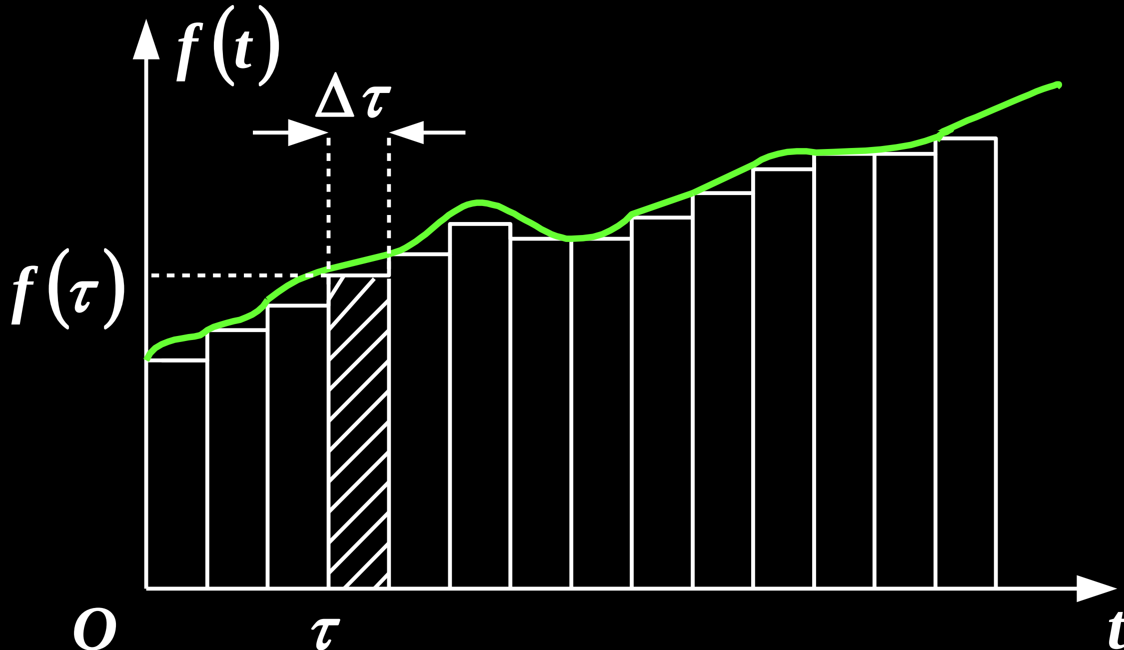
信号的平均功率 = 偶分量功率 + 奇分量功率

例　求$f(t)$的奇分量和偶分量



三. 脉冲分量

1. 矩形窄脉冲序列



当$t=\tau$,

脉高: $f(\tau)$, 脉宽: $\Delta\tau$, 存在区间: $u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)$

此窄脉冲可表示为

$$f(\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]$$

从$\tau=-\infty$到∞, $f(t)$可表示为许多窄脉冲的叠加

$$f(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]$$

$$=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}\cdot\Delta\tau$$

令$\Delta\tau\to 0$

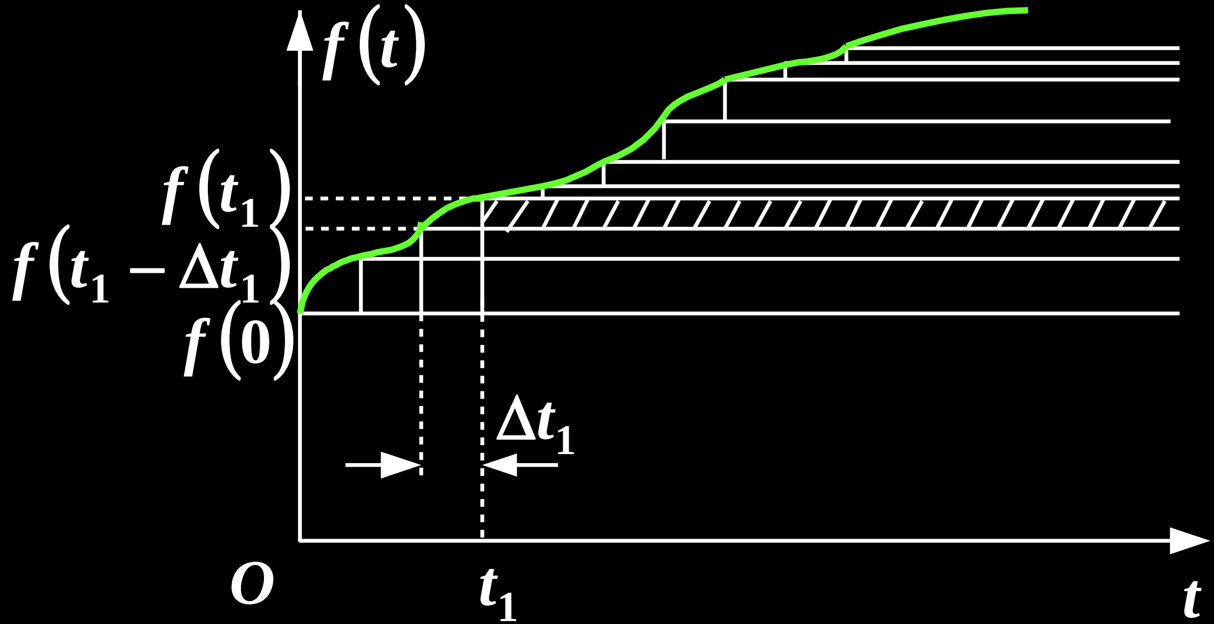
$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\left[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)\right]}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}u(t-\tau)}{\mathrm{d}t}=\delta(t-\tau)$$

$$\Delta\tau\to\mathrm{d}\tau,\quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\to\int_{\tau=-\infty}^{\infty}$$

所以 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

出现在不同时刻的，不同强度的冲激函数的和。

2. 连续阶跃信号之和



$$f(t)=f(0)u(t)+\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t_1)}{\mathrm{d}t_1}u(t-t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

将信号分解为冲激信号叠加的方法应用很广，后面的卷积积分中将用到，可利用卷积积分求系统的零状态响应。

四. 实部分量与虚部分量

瞬时值为复数的信号可分解为实虚部两部分之和。

$$f(t)=f_{\mathrm{r}}(t)+\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)$$

共轭复函数

$$f^{*}(t)=f_{\mathrm{r}}(t)-\mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)$$

即

$$f_{\mathrm{r}}(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f^{*}(t)\right] \qquad \mathrm{j}f_{\mathrm{i}}(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f^{*}(t)\right]$$

实际中产生的信号为实信号，可以借助于复信号来研究实信号。

五．正交函数分量

如果用正交函数集来表示一个信号，那么，组成信号的各分量就是相互正交的。把信号分解为正交函数分量的研究方法在信号与系统理论中占有重要地位，这将是本课程讨论的主要课题。

我们将在第三章中开始学习。

六．利用分形（fractal）理论描述信号

- 分形几何理论简称分形理论或分数维理论；
- 创始人为B.B.Mandelbrot;
- 分形是“其部分与整体有形似性的体系”；
- 在信号传输与处理领域应用分形技术的实例表现在以下几个方面：图像数据压缩、语音合成、地震信号或石油探井信号分析、声纳或雷达信号检测、通信网业务流量描述等。这些信号的共同特点都是具有一定的自相似性，借助分性理论可提取信号特征，并利用一定的数学迭代方法大大简化信号的描述，或自动生成某些具有自相似特征的信号。

可浏览网站：http://www.fractal.com

§1.6 系统模型及其分类

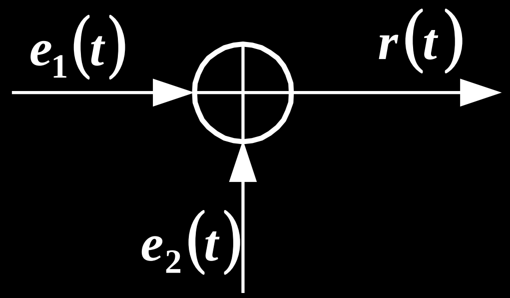
- 描述系统的基本单元方框图
- 系统的定义和表示
- 系统的分类

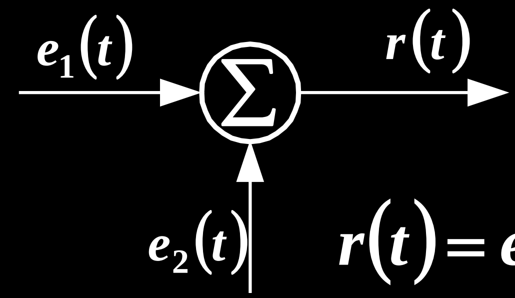
一．信号的时域运算（基本元件）

1. 加法器
2. 乘法器
3. 标量乘法器（数乘器，比例器）
4. 微分器
5. 积分器
6. 延时器

基本元件1

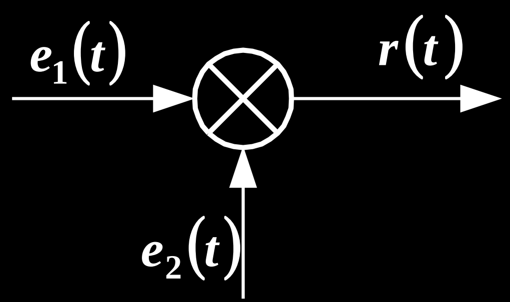
1.加法器





$$r(t)=e_1(t)+e_2(t)$$

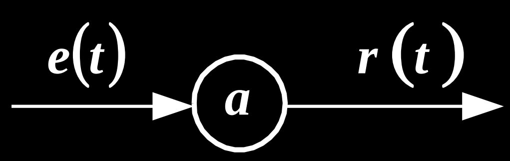
2.乘法器



$$r(t)=e_1(t)\cdot e_2(t)$$

注意：与公式中的卷积符号相区别，没有卷积器。

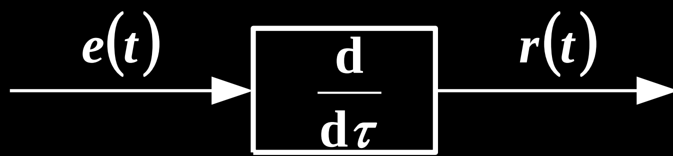
3.标量乘法器（数乘器，比例器）



$$r(t)=ae(t)$$

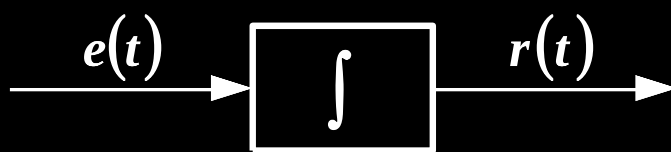
基本元件2

4.微分器



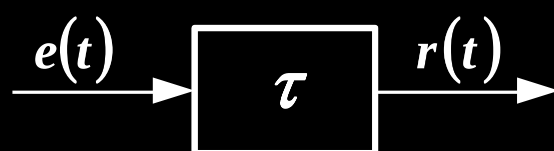
$$r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

5.积分器

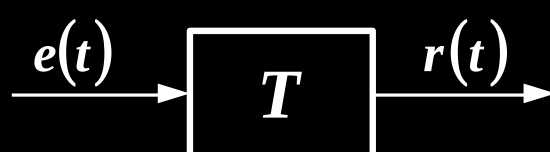


$$r(t)=\int_{-\infty}^{t} e(t)\mathrm{d}t$$

6.延时器



$$r(t)=e(t-\tau)$$



例 请用积分器画出如下微分方程所代表的系统的系统框图。

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$$

解答

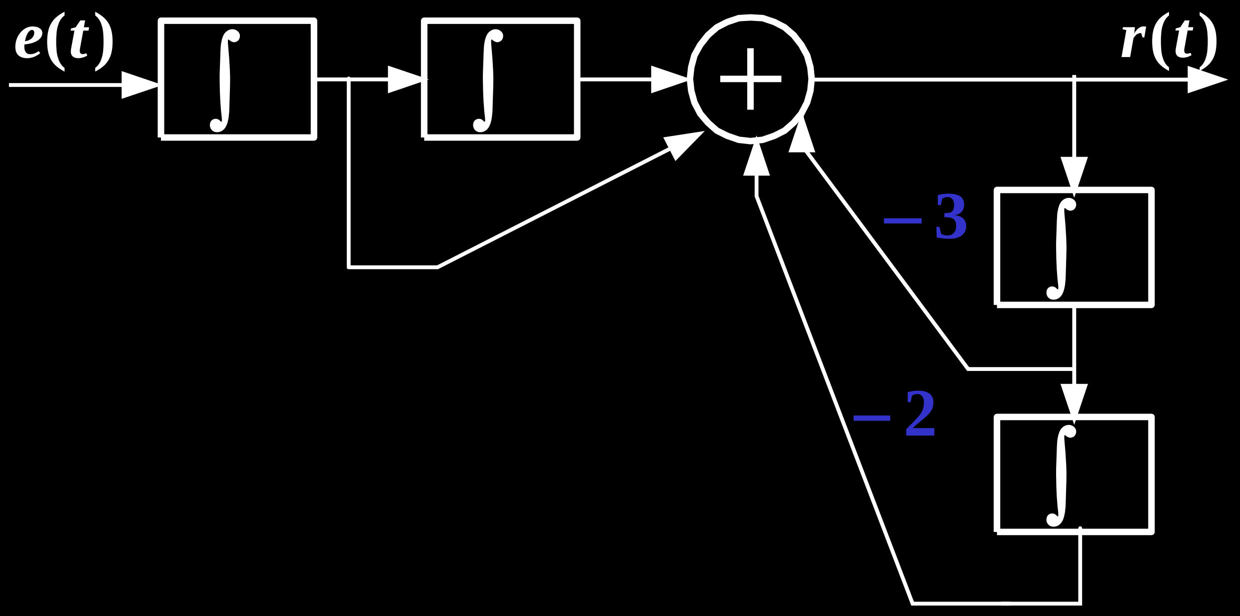
方程左端只保留输出的最高阶导数项

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}=-3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}-2r(t)+\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$$

积分 $n=2$ 次，使方程左端只剩下$r(t)$ 项

$$r(t)=-3\int r(t)\mathrm{d}t-2\iint r(t)\mathrm{d}t+\int e(t)\mathrm{d}t+\iint e(t)\mathrm{d}t$$

系统框图如下页：



系统框图

二．系统的定义和表示

系统：具有特定功能的总体，可以看作信号的变换器、处理器。

系统模型：系统物理特性的数学抽象。

系统的表示：

数学表达式：系统物理特性的数学抽象。

系统图：形象地表示其功能。

三．系统的分类

连续时间系统：微分方程
离散时间系统：差分方程
混合系统

即时系统（非记忆系统 ：代数方程
动态系统（记忆系统）：微分方程或差分方程

集总参数系统: 常微分方程 (t)
分布参数系统: 偏微分方程 (t, x, y, z)

线性　　时变

非线性　　非时变　　系统

因果系统

非因果系统

若系统在t_0时刻的响应只与$t = t_0$和$t < t_0$时刻的输入有关，否则，即为非因果系统。

可逆系统

不可逆系统

若系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。

重点研究：

确定性信号作用下的集总参数线性时不变系统 。

§1.7 线性时不变系统

- 线性系统与非线性系统
- 时变系统与时不变系统
- 线性时不变系统的微分特性
- 因果系统与非因果系统

一. 线性系统与非线性系统

1. 定义

线性系统： 指具有线性特性的系统。

线性： 指均匀性，叠加性。

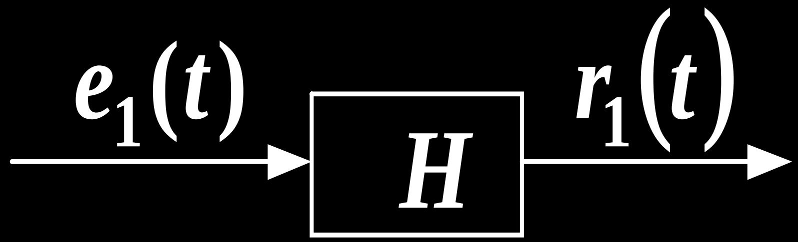
均匀性(齐次性)：

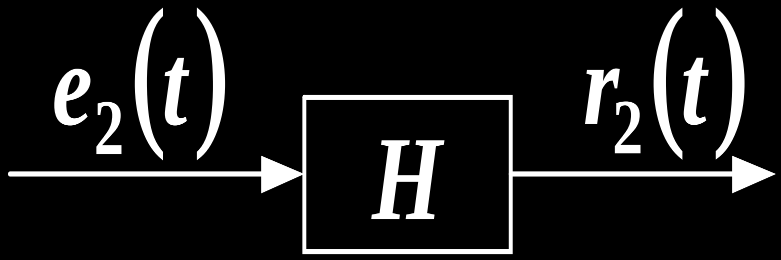
$$e(t) \to r(t) \Rightarrow ke(t) \to kr(t)$$

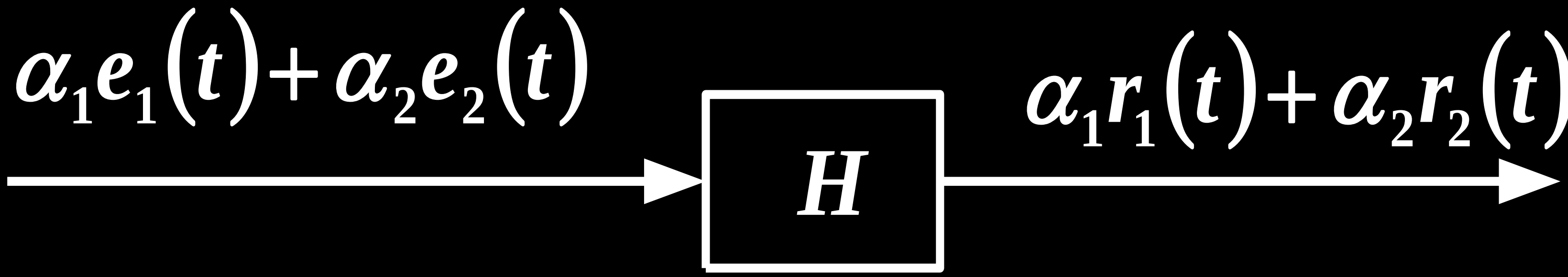
叠加性：

$$\left.\begin{array}{l} e_1(t) \to r_1(t) \\ e_2(t) \to r_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow e_1(t) + e_2(t) \to r_1(t) + r_2(t)$$

线性特性



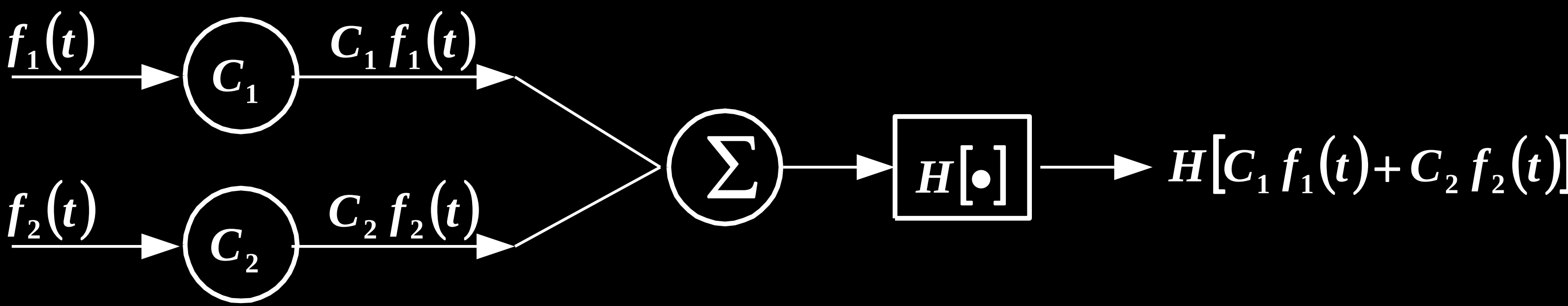


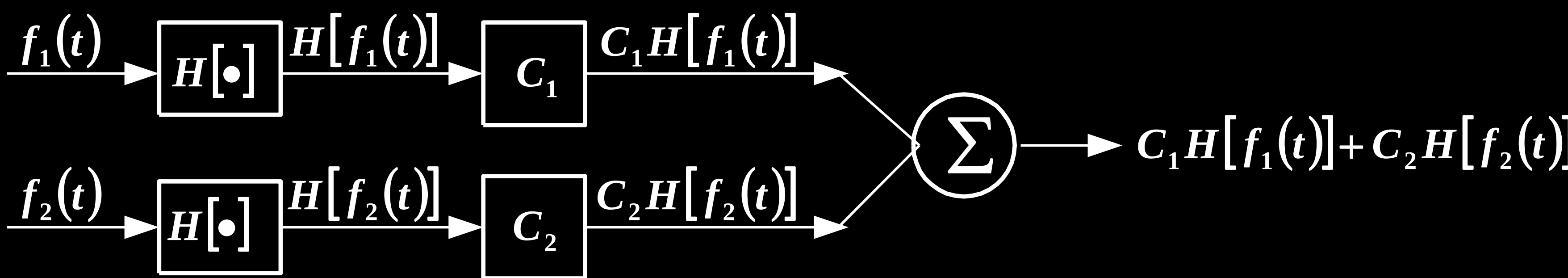


$$\alpha_1 e_1(t)+\alpha_2 e_2(t) \rightarrow \alpha_1 r_1(t)+\alpha_2 r_2(t)$$

2. 判断方法

先线性运算，再经系统＝先经系统，再线性运算





若 $H[C_1 f_1(t)+C_2 f_2(t)]=C_1 H[f_1(t)]+C_2 H[f_2(t)]$

则系统 $H[\bullet]$是线性系统,否则是非线性系统。

注意：外加激励与系统非零状态单独处理。

例1

判断下述微分方程所对应的系统是否为线性系统？

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+10r(t)+5=e(t)\quad t>0$$

解答

分析：根据线性系统的定义，证明此系统是否具有均匀性和叠加性。可以证明：

系统不满足均匀性

系统不具有叠加性

所以此系统为非线性系统。

请看下面证明过程

证明均匀性

设信号$e(t)$作用于系统，响应为$r(t)$

当$Ae(t)$作用于系统时，若此系统具有线性　则

$$\frac{\mathrm{d}\,Ar(t)}{\mathrm{d}t}+10Ar(t)+5=Ae(t) \qquad t>0 \qquad (1)$$

原方程两端乘A：

$$A\left[\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+10r(t)+5\right]=Ae(t) \qquad t>0 \qquad (2)$$

(1),(2)两式矛盾。故此系统不满足均匀性

证明叠加性

假设有两个输入信号 $e_1(t)$及$e_2(t)$ 分别激励系统，则由所给微分方程式分别有：

$$\frac{\mathrm{d}r_1(t)}{\mathrm{d}t}+10r_1(t)+5=e_1(t) \qquad t>0 \qquad (3)$$

$$\frac{\mathrm{d}r_2(t)}{\mathrm{d}t}+10r_2(t)+5=e_2(t) \qquad t>0 \qquad (4)$$

当$e_1(t)+e_2(t)$ 同时作用于系统时，若该系统为线性系统，应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r_1(t)+r_2(t)]+10[r_1(t)+r_2(t)]+5=e_1(t)+e_2(t) \qquad t>0 \qquad (5)$$

(3)+(4)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r_1(t)+r_2(t)]+10[r_1(t)+r_2(t)]+10=e_1(t)+e_2(t) \qquad t>0 \qquad (6)$$

(5)、(6)式矛盾，该系统为不具有叠加性

二．时变系统与时不变系统

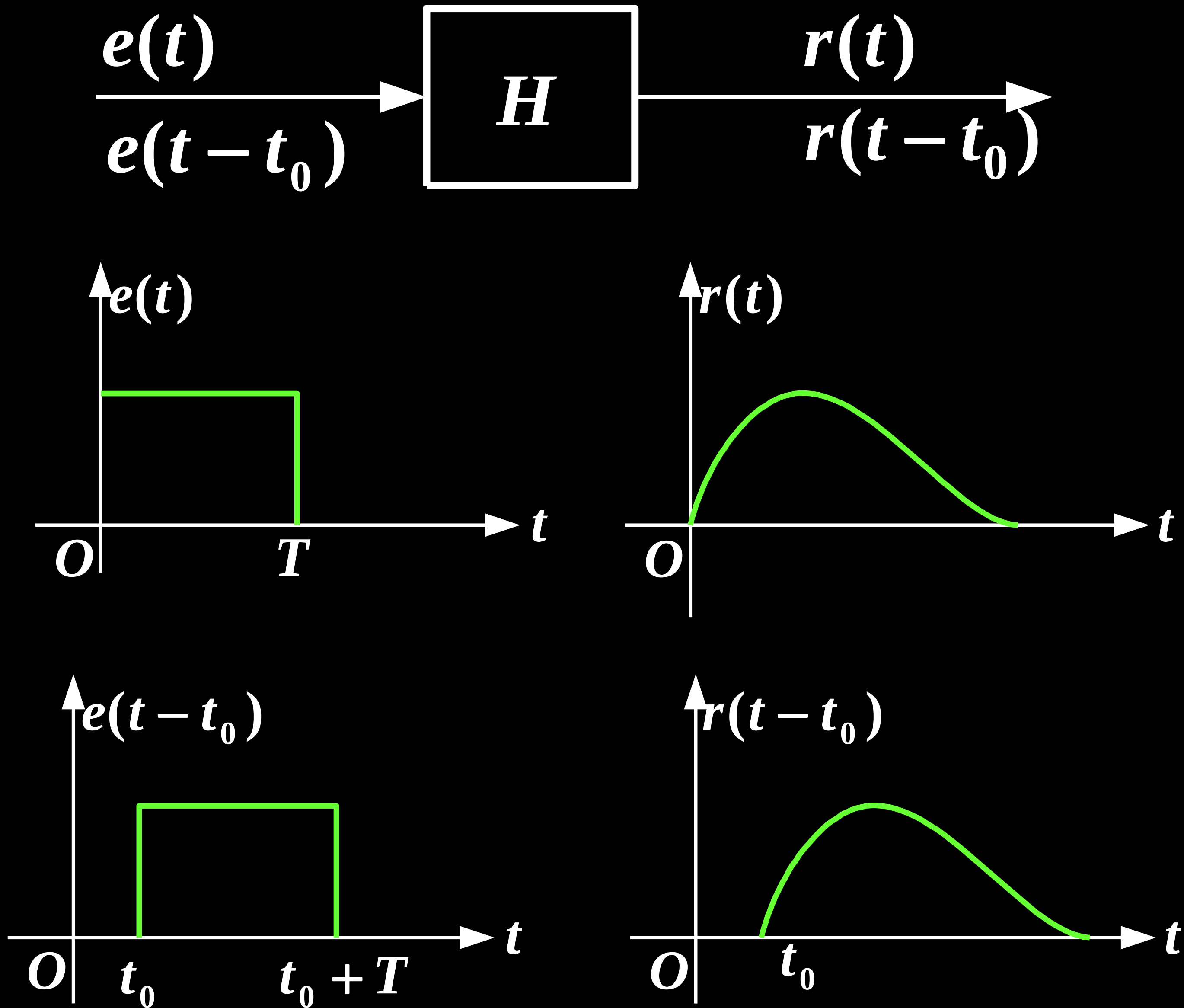
1. 定义

一个系统，在零初始条件下，其输出响应与输入信号施加于系统的时间起点无关，称为非时变系统，否则称为时变系统。

认识：

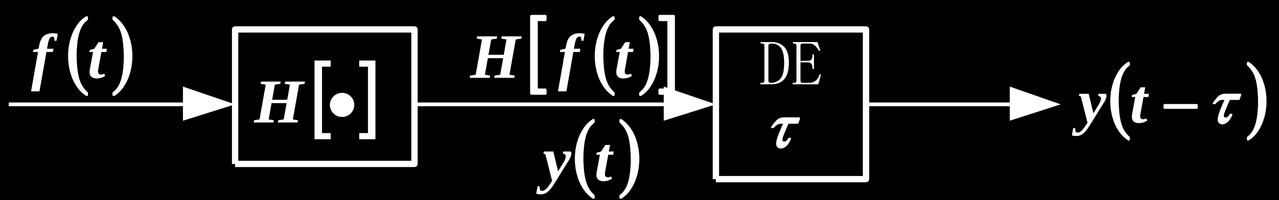
- 电路分析上看：元件的参数值是否随时间而变
- 从方程看：系数是否随时间而变
- 从输入输出关系看：时不变性

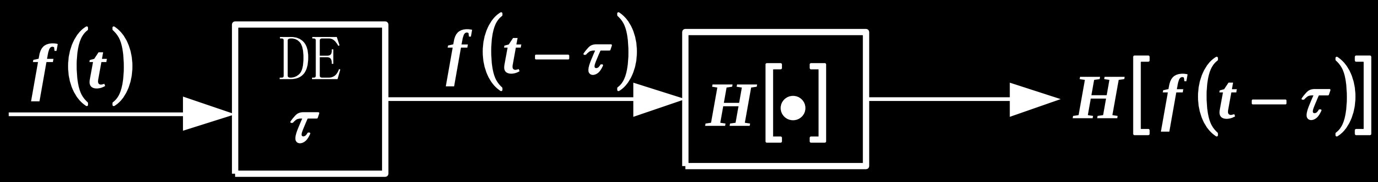
时不变性



2. 判断方法

先时移，再经系统＝先经系统，再时移





若 $H[f(t-\tau)]=y(t-\tau)$

则系统 $H[\bullet]$是非时变系统, 否则是时变系统。

例2 判断下列两个系统是否为非时变系统。

系统1： $r(t)=\cos[e(t)] \quad t>0$

系统2： $r(t)=e(t)\cdot\cos t \quad t>0$

解答

1.系统的作用是对输入信号作余弦运算。

$$(1)\,e(t)\xrightarrow{\text{时移}t_0}e(t-t_0)\xrightarrow{\text{经过系统}}r_{11}(t)=\cos e(t-t_0)\quad t>0$$

$$(2)\,e(t)\xrightarrow{\text{经过系统}}\cos e(t)\xrightarrow{\text{时移}t_0}r_{12}(t)=\cos e(t-t_0)\quad t>0$$

$$r_{11}(t)=r_{12}(t)$$

所以此系统为时不变系统。

系统2：$r(t)=e(t)\cdot\cos t \quad t>0$

系统作用：输入信号乘cos$t$

$$(1)\, e(t)\xrightarrow{\text{时移}t_0} e(t-t_0)$$

$$\xrightarrow{\text{经过系统}} r_{21}(t)=e(t-t_0)\cos t \quad t>0$$

$$(2)\, e(t)\xrightarrow{\text{经过系统}} e(t)\cos t$$

$$\xrightarrow{\text{时移}t_0} r_{22}(t)=e(t-t_0)\cos(t-t_0) \quad t>0$$

$$r_{21}(t)\neq r_{22}(t)$$

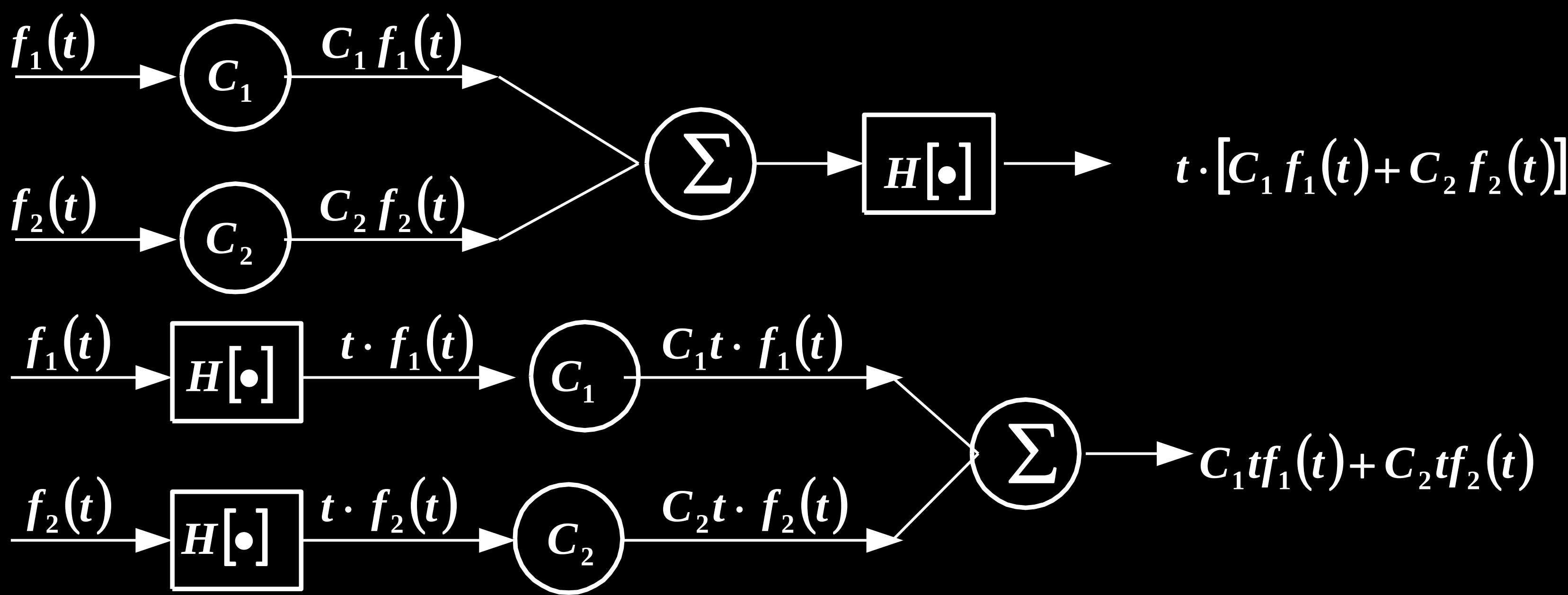
此系统为时变系统。

例3

$y(t) = t \cdot f(t)$ 判断系统是否为线性非时变系统。

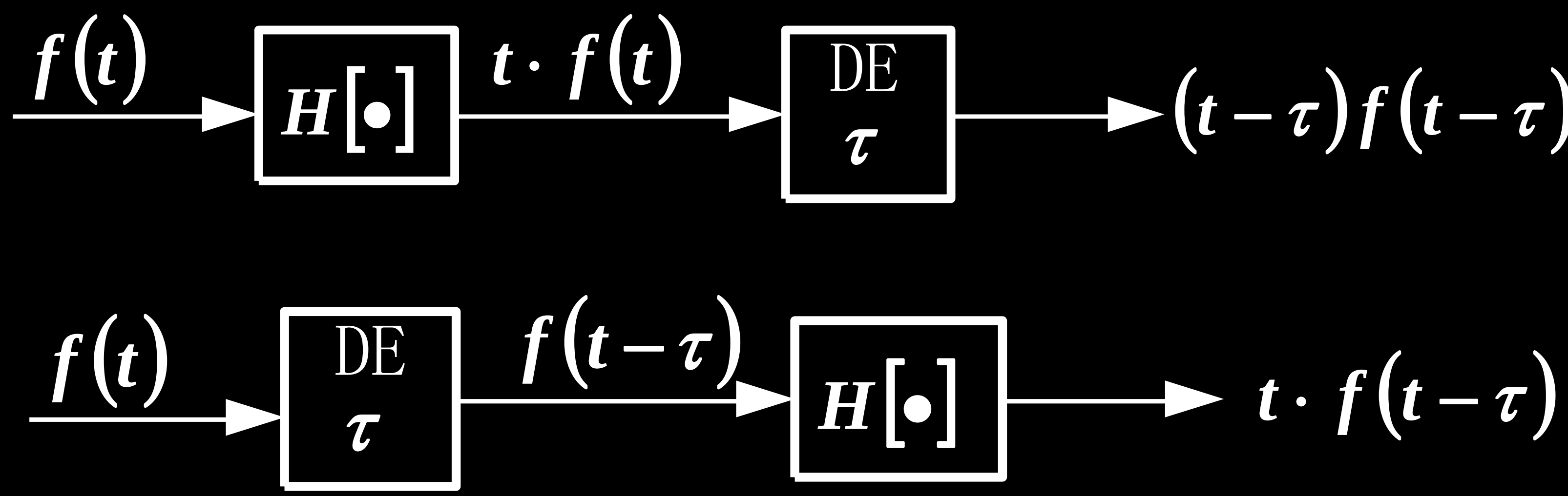
是否为线性系统？是否为时不变系统？

解答



可见, 先线性运算，再经系统＝先经系统，再线性运算, 所以此系统是线性系统。

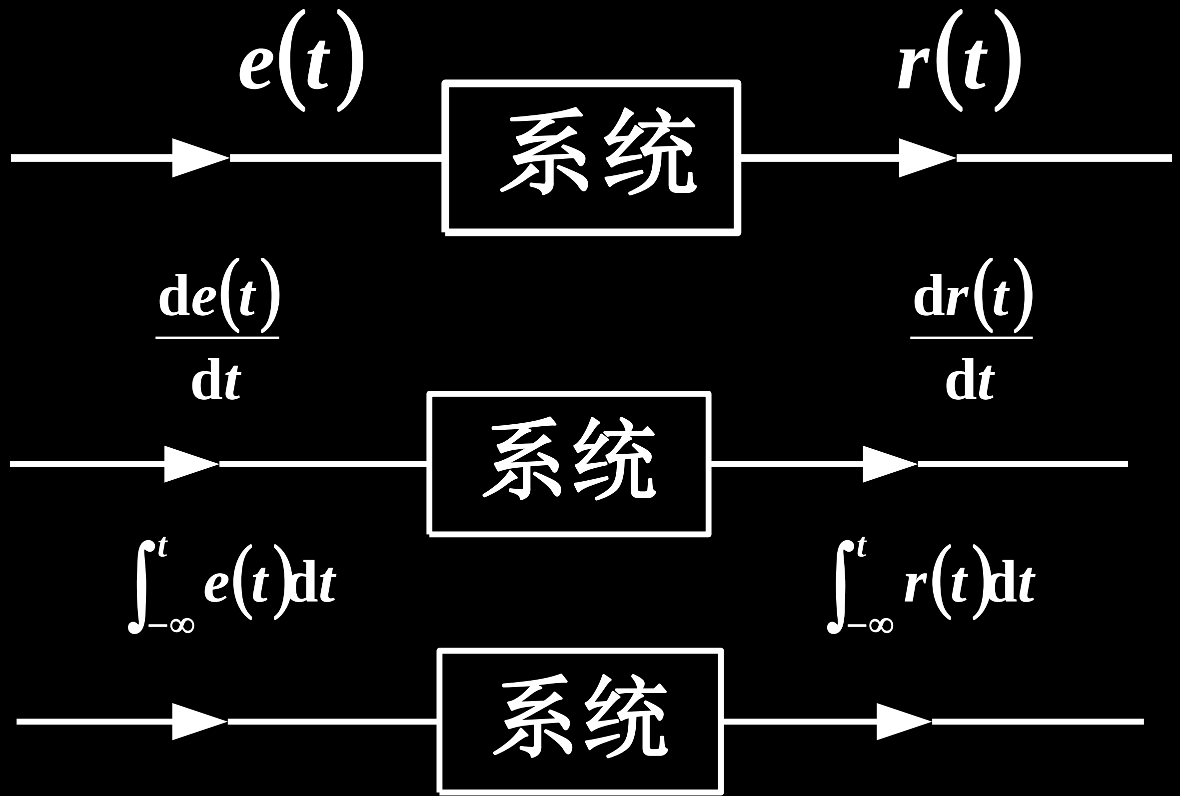
是否为时不变系统呢？



可见，时移、再经系统 $\neq$ 经系统、再时移，所以此系统是时变系统。

三. 线性时不变系统的微分特性

线性时不变系统满足微分特性、积分特性



利用线性证明，可推广至高阶。

四. 因果系统与非因果系统

1. 定义

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时，才会出现输出（响应）的系统。也就是说，因果系统的输出（响应）不会出现在输入信号激励系统以前的时刻。

系统的这种特性称为因果特性。

符合因果性的系统称为因果系统(非超前系统)。

2. 判断方法

输出不超前于输入

3. 实际的物理可实现系统均为因果系统

非因果系统的概念与特性也有实际的意义，如信号的压缩、扩展，语音信号处理等。

若信号的自变量不是时间，如位移、距离、亮度等为变量的物理系统中研究因果性显得不很重要。

4. 因果信号

$t=0$接入系统的信号称为因果信号。

表示为:

$e(t)=e(t)u(t)$ 相当于$t<0, e(t)=0$

例4

微分方程$r(t)=e(t)+e(t-2)$代表的系统是否是因果系统。

解答 $t=0$ $r(0)=e(0)+e(-2)$

现在的响应=现在的激励+以前的激励

所以该系统为因果系统。

微分方程$r(t)=e(t)+e(t+2)$代表的系统是否是因果系统。

解答 $t=0$ $r(0)=e(0)+e(+2)$

未来的激励

所以该系统为非因果系统。

§1.8 系统分析方法

一. 建立系统模型的两种方法

输入——输出描述法：

- 着眼于激励与响应的关系，而不考虑系统内部变量情况；
- 单输入/单输出系统；
- 列写一元 n 阶微分方程。

状态变量分析法：

- 不仅可以给出系统的响应，还可以描述内部变量，如电容电压 $v_C(t)$ 或电感电流 $i_L(t)$ 的变化情况。
- 研究多输入/多输出系统；
- 列写多个一阶微分方程。

二. 数学模型的求解方法

1. 时域分析

- 经典法求解
  - 连续系统:微分方程
  - 离散系统:差分方程
- 卷积积分（或卷积和）法

2. 变换域分析

- 傅里叶变换——FT
- 拉普拉斯变换——LT
- z 变换——ZT
- 离散傅里叶变换——DFT
- 离散沃尔什变换——DWT