§ 4.5 用拉普拉斯变换法分析电路、s域元件模型

主要内容

用拉氏变换法分析电路的步骤

微分方程的拉氏变换

利用元件的s域模型分析电路

一. 用拉氏变换法分析电路的步骤

- 列s域方程（可以从两方面入手）
  - 列时域微分方程，用微积分性质求拉氏变换；
  - 直接按电路的s域模型建立代数方程。
- 求解s域方程。
- $F(s) \to f(t)$，得到时域解答。

二. 微分方程的拉氏变换

$$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0_-)$$

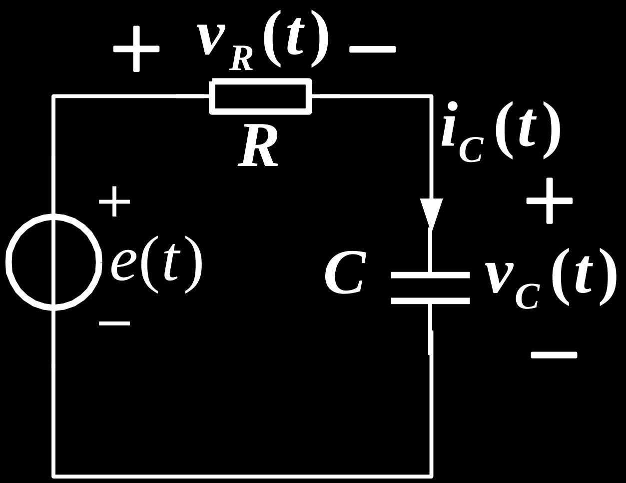
$$L\left[\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=s\left[sF(s)-f(0_-)\right]-f'(0_-)$$

$$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

我们采用0_-系统求解瞬态电路，简便起见，只要知道起始状态，就可以利用元件值和元件的起始状态，求出元件的s域模型。

例4–5–1

已知 $e(t)=\begin{cases}-E & t<0\\ E & t>0\end{cases}$



求$v_C(t)$,$v_R(t)$。

解答

求$v_C(t)=?$

(1)求起始状态 $v_C(0_-)=-E$

(2)列方程$(t>0)$ $RC\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=e(t)=E$

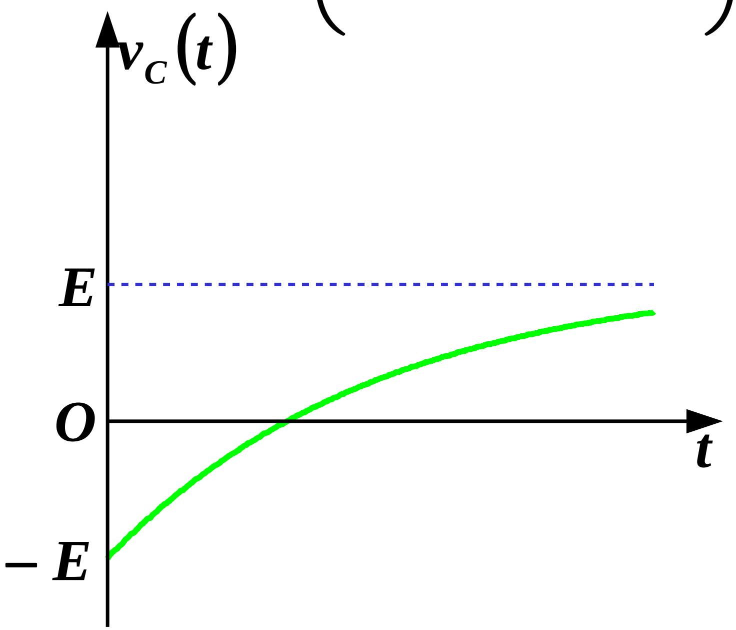
(3)等式两边取单边拉氏变换

$$RC\left[sV_C(s)-v_C(0\_)\right]+V_C(s)=\frac{E}{s}$$

（4）求反变换

$$\text{所以}V_C(s)=\frac{\dfrac{E}{s}+RCv_C(0_-)}{1+RCS}=\frac{E\left(\dfrac{1}{RC}-s\right)}{s\left(s+\dfrac{1}{RC}\right)}=E\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+\dfrac{1}{RC}}\right)$$

$$\text{所以}v_C(t)=\left(E-2E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\qquad(t\geq 0)$$



说明

- $v_C(t)$从0_-的$-E$充电到E;
- 在求$v_C(t)$时，其 0_-和0_+符合换路定则，采用 0_-和0_+均可。

求 $v_R(t) = ?$

① $v_R(0_-) = 0, \quad v_R(0_+) = 2E$

(2)以$v_R(t)$为变量列微分方程

$$\frac{1}{C}\int_{\infty}^{t} \frac{v_R(t)}{R}\mathrm{d}t + v_R(t) = e(t)$$

$$\frac{1}{RC}v_R(t) + \frac{\mathrm{d}v_R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

求解时可以采用0_-系统,也可以采用0_+系统

采用0_-系统

采用0_+系统

两种方法结果一致。

使用0-系统使分析各过程简化。

采用0-系统

(3)对微分方程两边取拉氏变换

$$\frac{1}{RC}v_R(t)+\frac{\mathrm{d}v_R(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

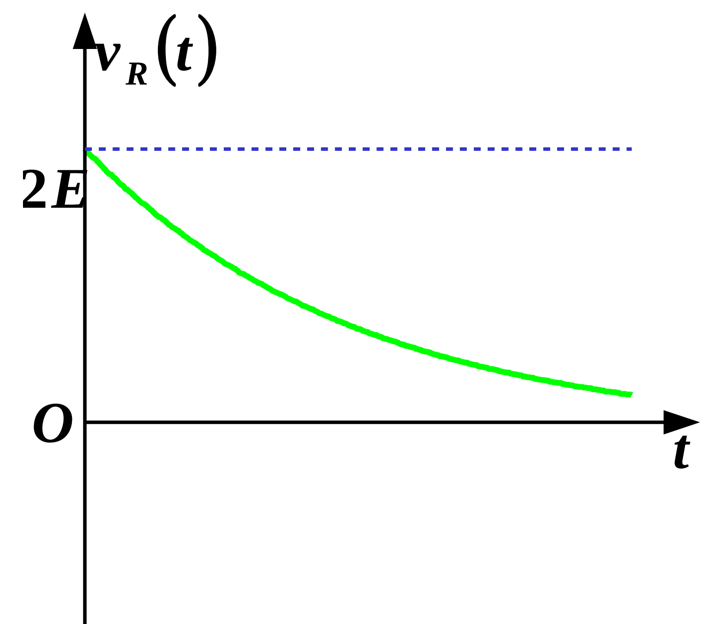
因为$\mathrm{e}(t)=-Eu(-t)+Eu(t)$ 所以$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}(t)}{\mathrm{d}t}=2E\delta(t)$

$$\frac{1}{RC}V_R(s)+sV_R(s)-v_R(0_-)=2E$$

$$v_R(0_-)=0$$

所以 $V_R(s)=\dfrac{2E}{s+\dfrac{1}{RC}}$

所以 $v_R(t)=2E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)$



采用0_+系统

$$\frac{1}{RC}v_R(t)+\frac{\mathrm{d}v_R(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

⑶ 此时$e(t)$按0_+处理

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v_R(0_+)=2E$$

(4)原方程取拉氏变换

$$\frac{1}{RC}V_R(s)+sV_R(s)-2E=0$$

三．利用元件的s域模型分析电路

1. 电路元件的s域模型

2. 电路定理的推广

$i(t) \leftrightarrow I(s)$, KCL : $\sum i(t) = 0 \rightarrow \sum I(s) = 0$

$v(t) \leftrightarrow V(s)$ KVL : $\sum v(t) = 0 \rightarrow \sum V(s) = 0$

线性稳态电路分析的各种方法都适用。

3. 求响应的步骤

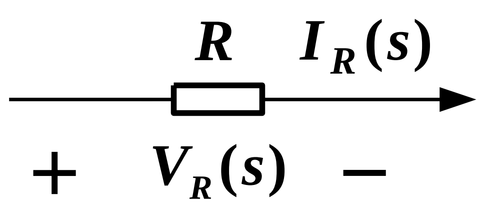
- 画0_-等效电路，求起始状态；
- 画s域等效模型；
- 列s域方程（代数方程）；
- 解s域方程，求出响应的拉氏变换$V(s)$或$I(s)$；
- 拉氏反变换求$v(t)$或$i(t)$。

电阻元件的s域模型

$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

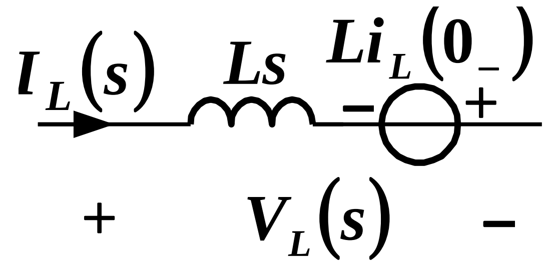
$$\text{或} I_R(s) = \frac{V_R(s)}{R}$$



电感元件的s域模型

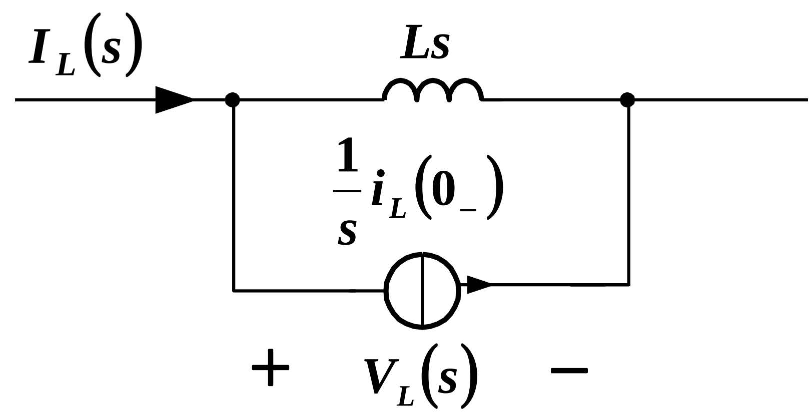
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$V_L(s) = I_L(s)Ls - Li_L(0_-)$$



利用电源转换可以得到电流源形式的s域模型：

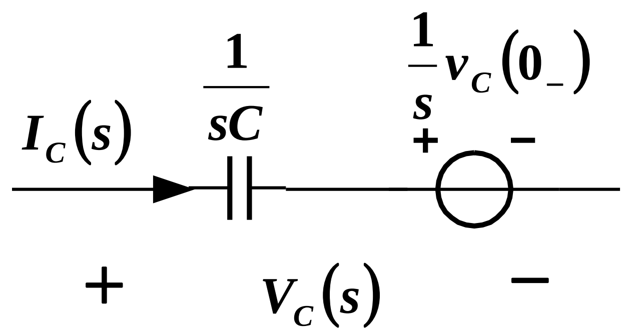
$$I_L(s) = \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{1}{s}i_L(0_-)$$



电容元件的s域模型

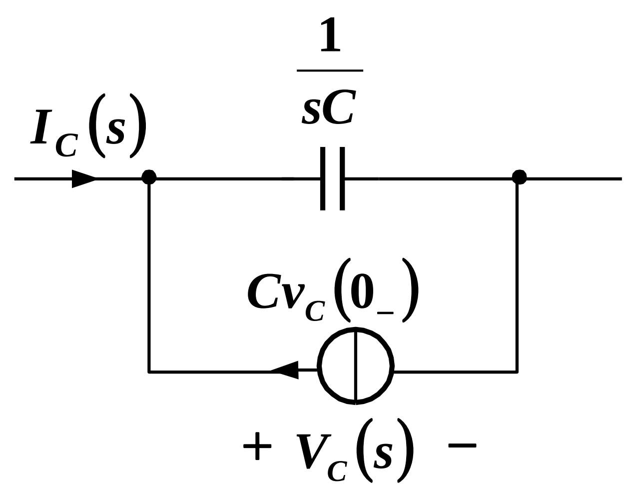
$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$V_C(s)=I_C(s)\frac{1}{sC}+\frac{1}{s}v_C(0_-)$$



电流源形式：

$$I_C(s)=sCV_C(s)-Cv_C(0_-)$$



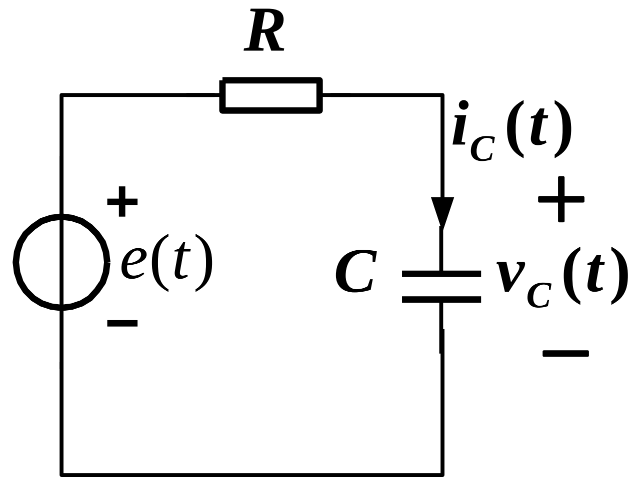
求响应的步骤

- **画0_-等效电路，求起始状态；**
- **画*s*域等效模型；**
- **列*s*域方程（代数方程）；**
- **解*s*域方程，求出响应的拉氏变换$V(s)$或$I(s)$；**
- **拉氏反变换求$v(t)$或$i(t)$。**

例4-5-2

已知 $e(t)=\begin{cases}-E & t<0\\ E & t>0\end{cases}$

利用s域模型求$v_C(t)=?$



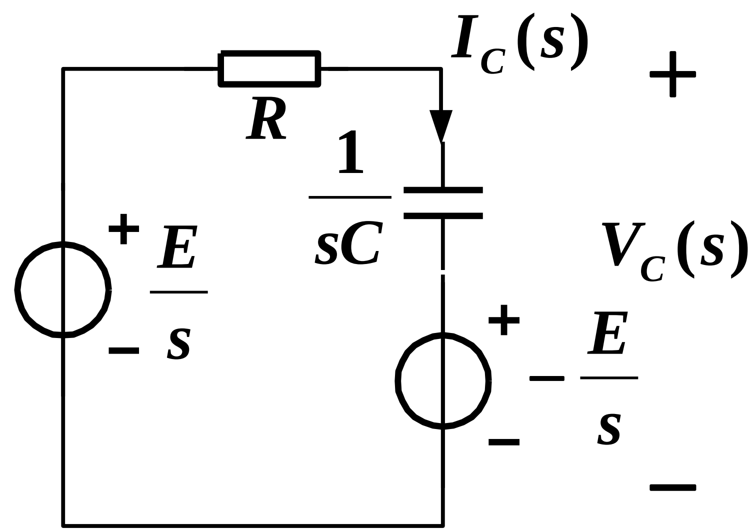
解答

$$e(t)=-Eu(-t)+Eu(t)$$

$$v_C(0_-)=-E$$

列s域方程:

$$I_C(s)\left(R+\frac{1}{sC}\right)=\frac{E}{s}+\frac{E}{s}$$

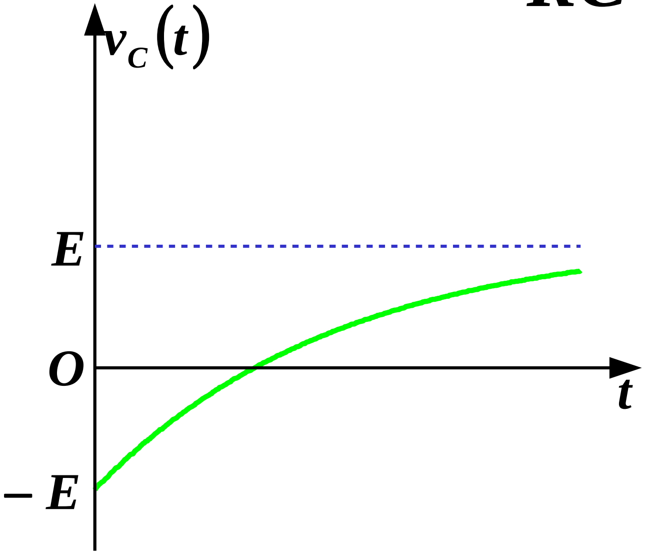


所以 $$I_C(s)=\frac{2E}{s\left(R+\frac{1}{sC}\right)}$$

$$V_C(s)=I_C(s)\cdot\frac{1}{sC}+\frac{-E}{s}$$

$$V_C(s)=\frac{E}{s}-\frac{2E}{s+\frac{1}{RC}}$$

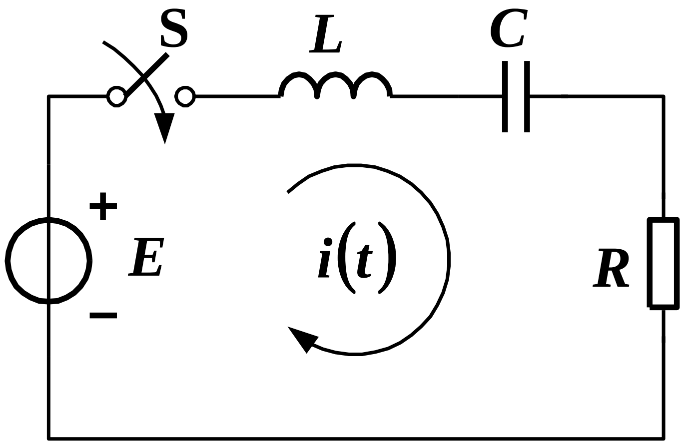
$$v_C(t)=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\quad(t\geq 0)$$

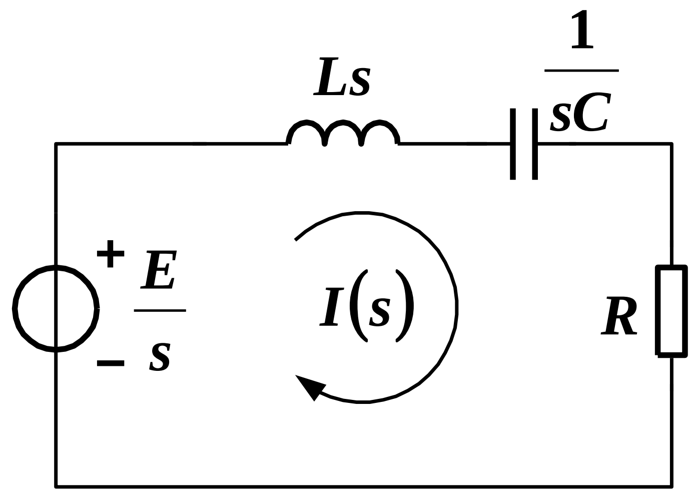


结果同例4-5-1

例4-5-3 下图所示电路起始状态为0，$t=0$时开关S闭合，接入直流电源E，求电流$i(t)$波形。

解:





(1) 起始状态为 0 $\Rightarrow i_L(0_-)=0\,\mathrm{A}, v_C(0_-)=0\,\mathrm{V}$

(2) $t>0$的s域等效模型

(3) 列方程

$$LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=\frac{E}{s}$$

极点

$$LsI(s)+RI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)=\frac{E}{s}$$

$$I(s)=\frac{E}{s\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

极点$p_{1,}\,p_2$：

$$p_1=-\frac{L}{2R}+\sqrt{\left(\frac{L}{2R}\right)^2-\frac{1}{LC}}\quad p_2=-\frac{L}{2R}-\sqrt{\left(\frac{L}{2R}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

故

$$I(s)=\frac{E}{L}\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$=\frac{E}{L}\frac{1}{(p_1-p_2)}\left[\frac{1}{(s-p_1)}-\frac{1}{(s-p_2)}\right]$$

逆变换

$$i(t)=\frac{E}{L(p_1-p_2)}\left(\mathrm{e}^{p_1 t}-\mathrm{e}^{p_2 t}\right)$$

设

$$\alpha=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

则

$$p_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0{}^2},\mathrm{p}_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0{}^2}$$

第一种情况：$\alpha=0$,（无损耗的LC回路）

第二种情况：$\alpha<\omega_0$（即R较小，高Q的LC回路，$\mathrm{Q}=\dfrac{\omega_0}{2\alpha}$）

第三种情况$\alpha=\omega_0$

第四种情况$\alpha>\omega_0$（R较大，低Q，不能振荡）

第一种情况： $\alpha = 0$,(无损耗的LC回路)

$$p_1 = \mathrm{j}\omega_0 \quad p_2 = -\mathrm{j}\omega_0$$

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{j}\omega_0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right) = E\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sin(\omega_0 t)$$

阶跃信号对回路作用的结果产生不衰减的正弦振荡。

第二种情况： $\alpha < \omega_0$ (即R较小， 高Q的LC回路， $\mathrm{Q} = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$)

引入符号 $\omega_d = \sqrt{\omega_0 - \alpha^2}$ $\quad\sqrt{\alpha^2 - \omega_0} = \mathrm{j}\omega_d$

$$p_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega_d \qquad p_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega_d$$

所以

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{j}\omega_d}\left[\mathrm{e}^{(-\alpha + \mathrm{j}\omega_d)t} - \mathrm{e}^{(-\alpha - \mathrm{j}\omega_d)t}\right] = \frac{E}{L\omega_d} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

衰减振荡， $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, R越小， α 就越小， 衰减越慢

第三种情况： $\alpha = \omega_0$

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad p_1 = p_2 = -\alpha$$

这时有重根的情况，$I(s)$表示式为 $I(s) = \dfrac{E}{L}\dfrac{1}{(s+\alpha)^2}$

$$i(t) = \frac{E}{L}\cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{E}{L}\cdot t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$$

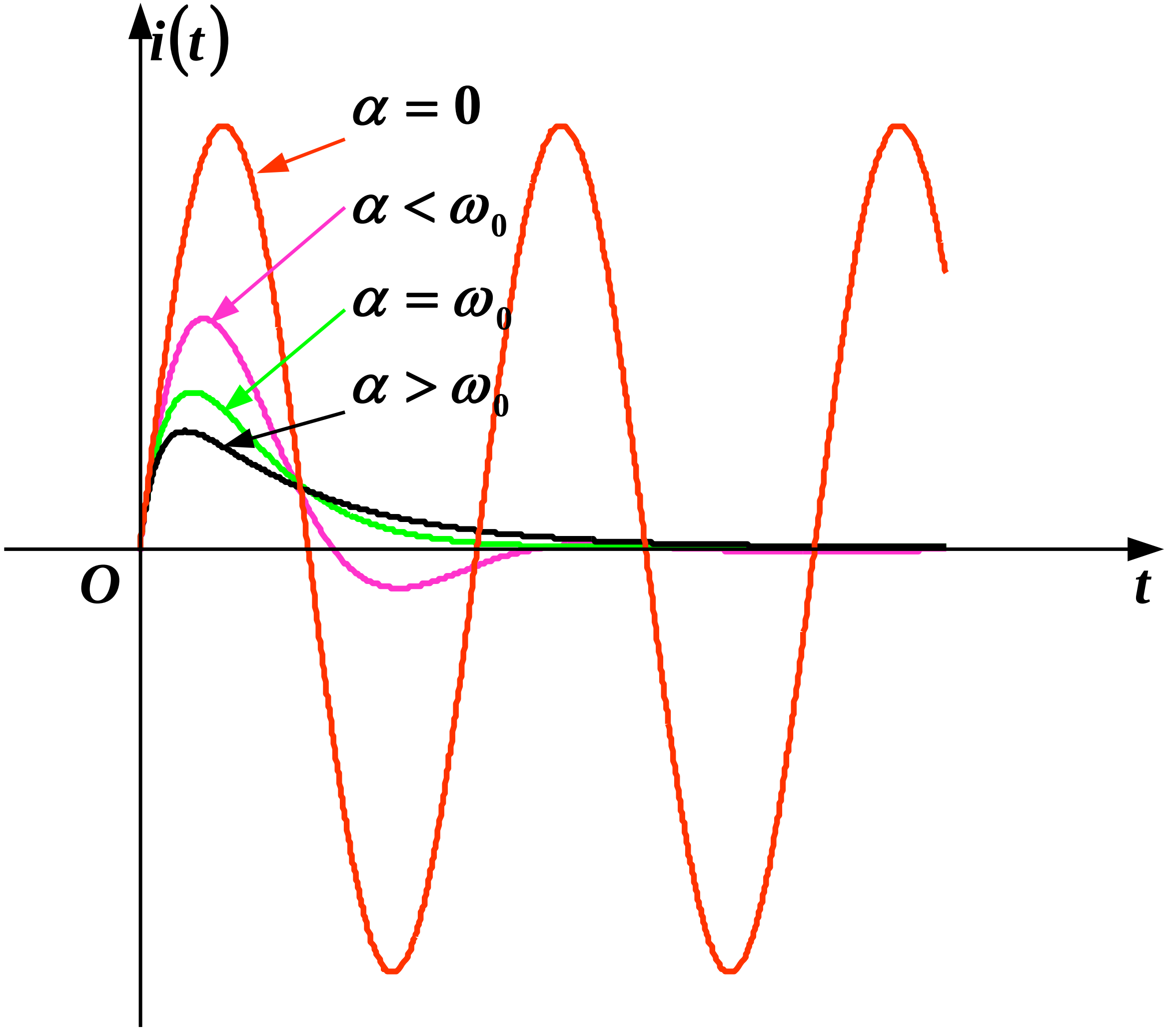
R越大，阻尼大，不能产生振荡，是临界情况

第四种情况： $\alpha > \omega_0$ (R较大，低Q，不能振荡)

$$i(t) = \frac{E}{L}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

$$= \frac{E}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sinh\left(\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t\right)$$

波形



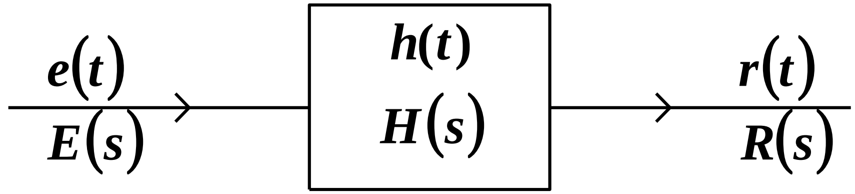
§4.6 系统函数(网络函数)$H(s)$

- 系统函数
- LTI互联网络的系统函数

  并联　　级联　　反馈连接

一. 系统函数

1. 定义



$$r(t)=e(t)*h(t)\leftrightarrow R(s)=E(s)\cdot H(s)$$

所以 $$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$$

响应的拉氏变换与激励的拉氏变换之比

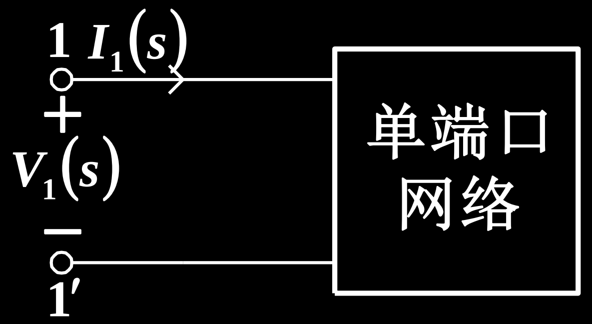
其中 $R(s)=L[r(t)],E(s)=L[e(t)]$

当$e(t)=\delta(t)$时, 系统的零状态响应

$$R(s)=H(s)\quad r(t)=h(t)\quad 则L[h(t)]=H(s)$$

2.$H(s)$的几种情况

策动点函数： 激励与响应在同一端口时



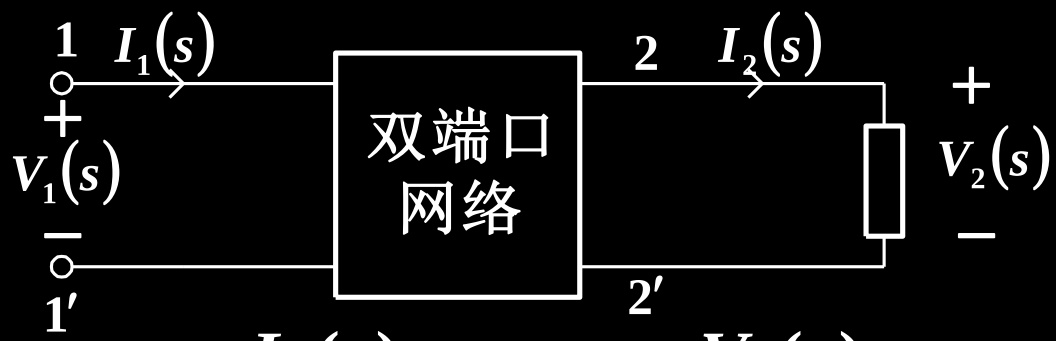
$$H(s)=\frac{I_1(s)}{V_1(s)}$$

策动点导纳

$$H(s)=\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$$

策动点阻抗

转移函数： 激励和响应不在同一端口



$$H(s)=\frac{I_2(s)}{V_1(s)}$$

转移导纳

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{I_1(s)}$$

转移阻抗

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

电压比

$$H(s)=\frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$

电流比

3．求$H(s)$的方法

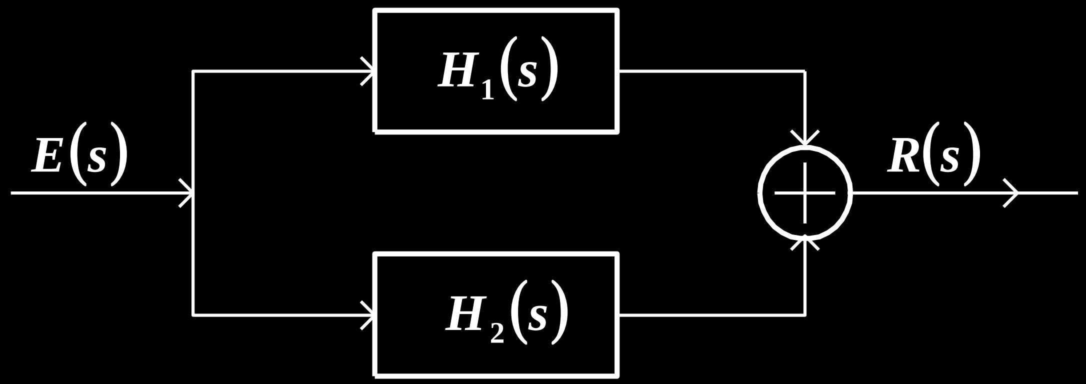
- $h(t) \to H(s)$
- 微分方程两端取拉氏变换→ $H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}$
- 利用网络的s域元件模型图，列s域方程→ $H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}$

4. 应用：求系统的响应

- 方法一：$H(s)\to h(t)\to r(t)=e(t)*h(t)$
- 方法二：$R(s)=H(s)E(s)\to r(t)$

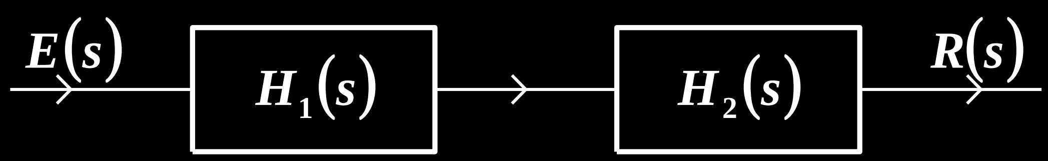
二．LTIS互联的系统函数

1．LTI系统的并联



$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$ $\quad$ $H(s)=H_1(s)+H_2(s)$

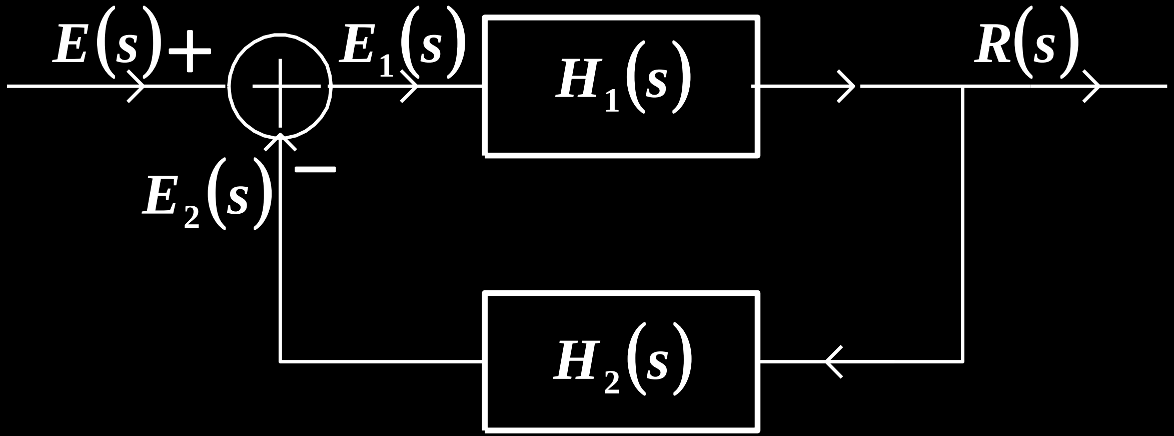
2．LTI系统的级联



时域：$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

频域：$H(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)$

3．LTI系统的反馈连接



$$E_1(s) = E(s) - E_2(s) \qquad E_2(s) = R(s) \cdot H_2(s)$$

$$R(s) = H_1(s) \cdot \left[E(s) - E_2(s)\right]$$

$$= H_1(s)E(s) - H_1(s)E_2(s)$$

$$= H_1(s)E(s) - H_1(s)H_2(s) \cdot R(s)$$

所以 $$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

4．结论

在s域可进行代数运算：

- 已知子系统的$h_i(t)$或$H_i(s)$，可以求出整个系统的$H(s)$。
- 已知总的$H(s)$及部分系统的$H_i(s)$，也可以求出另一个子系统的$H_j(s)$。

例4-6-1

已知系统$\dfrac{d^2 r(t)}{dt^2}+5\dfrac{dr(t)}{dt}+6r(t)=2\dfrac{d^2 e(t)}{dt^2}+6\dfrac{de(t)}{dt}$，激励为$e(t)=(1+e^{-t})u(t)$，求系统的冲激响应$h(t)$和零状态响应$r_{zs}(t)$。

解答

(1)在零起始状态下，对原方程两端取拉氏变换

$$s^2R(s)+5sR(s)+6R(s)=2s^2E(s)+6sE(s)$$

则 $H(s)=\dfrac{R(s)}{E(s)}=\dfrac{2s}{s+2}=2-\dfrac{4}{s+2}$ 所以$h(t)=2\delta(t)-4e^{-2t}u(t)$

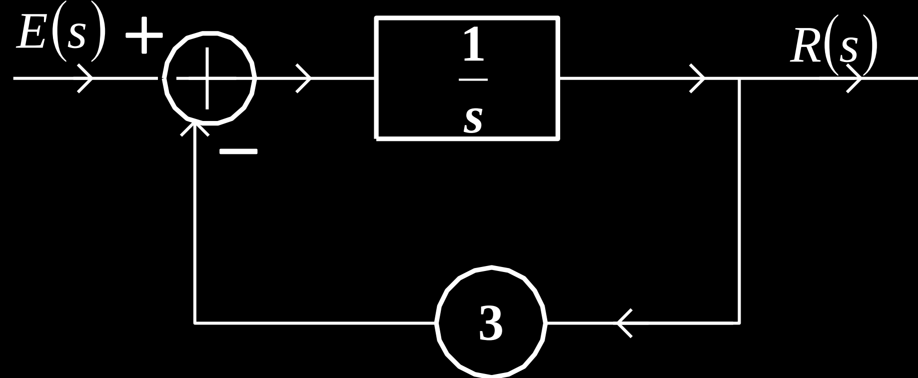
(2) 因为 $r_{zs}(t)=h(t)*e(t)$ 或 $R_{ZS}(s)=H(s)\cdot E(s)$

所以 $R_{ZS}(s)=\dfrac{2s}{s+2}\cdot\dfrac{2s+1}{s(s+1)}=\dfrac{2(2s+1)}{(s+2)(s+1)}=\dfrac{6}{s+2}-\dfrac{2}{s+1}$

所以 $r_{ZS}(t)=-2e^{-t}u(t)+6e^{-2t}u(t)$

例4-6-2

已知系统的框图如下，请写出此系统的系统函数和描述此系统的微分方程。



解答

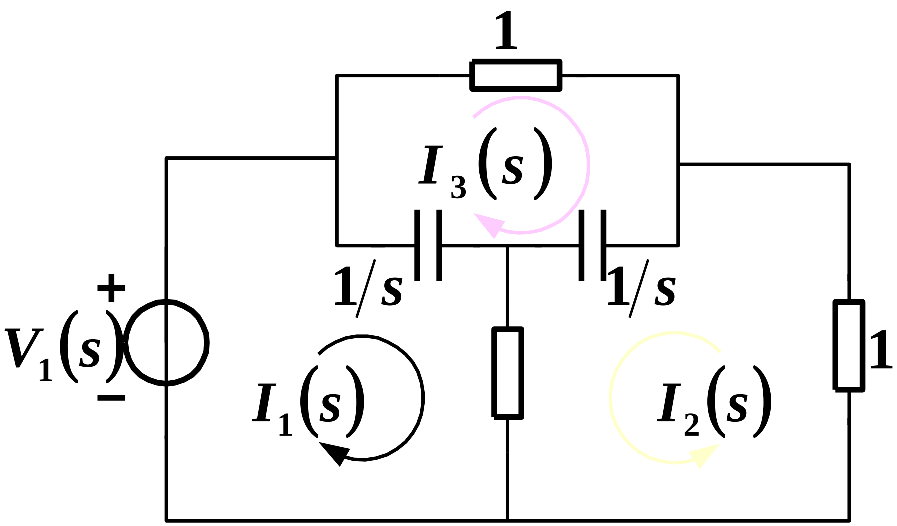
$$H(s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\cdot 3}=\frac{1}{s+3}\qquad H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{1}{s+3}$$

$$sR(s)+3R(s)=E(s)$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+3r(t)=e(t)$$

例4-6-3

求下图所示电路的转移导纳函数$Y_{21}(s)=\dfrac{I_2(s)}{V_1(s)}$。



$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{s}+1\right)I_1(s)+I_2(s)-\dfrac{1}{s}I_3(s)=V_1(s)\\ I_1(s)+\left(\dfrac{1}{s}+2\right)I_2(s)+\dfrac{1}{s}I_3(s)=0\\ -\dfrac{1}{s}I_1(s)+\dfrac{1}{s}I_2(s)+\left(\dfrac{2}{s}+1\right)I_3(s)=0\end{cases}$$

解:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{s}+1 & 1 & -\dfrac{1}{s}\\ 1 & \dfrac{1}{s}+2 & \dfrac{1}{s}\\ -\dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s} & \dfrac{2}{s}+1\end{vmatrix}$$

$$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix}1 & \dfrac{1}{s}\\ -\dfrac{1}{s} & \dfrac{2}{s}+1\end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{s}+1 & 1 & -\frac{1}{s} \\ 1 & \frac{1}{s}+2 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{2}{s}+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s^2+5s+2}{s^2}$$

$$\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{2}{s}+1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{s^2+2s+1}{s^2}$$

于是得到

$$Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = -\frac{s^2+2s+1}{s^2+5s+2}$$

Δ为矩阵的行列式,称为网络的特征方程式,反映了$H(s)$的特性。